

Formes automorphes adéliques sur \mathbf{GL}_2

Ce dernier cours est une ouverture vers le cours d'Olivier Taibi et ne comporte pas vraiment de démonstration (mais on essaye de motiver autant que faire se peut certaines constructions et résultats, et d'en esquisser la preuve, quand cela est possible). On introduit le langage adélique, qui permet de traiter tous les espaces $A(G(\mathbf{R}), \Gamma)$ (avec Γ sous-groupe de congruence de $G(\mathbf{Z})$) d'un seul coup et permet de voir de manière plus claire l'intérêt arithmétique des formes automorphes (chose soigneusement ignorée dans les autres cours...). On explique ensuite le lien avec les formes automorphes pour $G(\mathbf{R})$, le "théorème de factorisation" de Flath et Bernstein, et on étudie ce qui se passe pour les formes modulaires. Enfin, on donne une très (lire trop) rapide introduction aux représentations lisses du groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en insistant sur les représentations sphériques.

Si A est un anneau, on écrira $G(A) = \mathbf{GL}_2(A)$ et $G'(A) = \mathbf{SL}_2(A)$.

1 La théorie globale

1.1 L'anneau des adèles et le groupe des idèles

Soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \cup \{\infty\}$. Pour tout $v \in \mathcal{P}$ on dispose d'un complété \mathbf{Q}_v de \mathbf{Q} , avec $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$ et \mathbf{Q}_p le corps des nombres p -adiques quand p est premier. Soit $|\cdot|_p$ la norme p -adique sur \mathbf{Q}_p et $\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$ la boule unité de \mathbf{Q}_p , un anneau compact s'identifiant à $\varprojlim \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$.

L'anneau des adèles \mathbf{A} est le sous-anneau de $\prod_{v \in \mathcal{P}} \mathbf{Q}_v$ formé des suites $(a_v)_v$ telles que $a_v \in \mathbf{Z}_v$ pour presque tout¹ $v < \infty$. On dispose d'une injection naturelle $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{A}$, envoyant x sur la suite constante de terme x . Cette inclusion $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A}$ est très semblable à l'inclusion $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$: on munira \mathbf{A} d'une topologie pour laquelle \mathbf{Q} est discret dans \mathbf{A} et le quotient \mathbf{A}/\mathbf{Q} est compact.

On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f$, \mathbf{A}_f (les **adèles finies**) étant défini de la manière évidente et contenant $\hat{\mathbf{Z}} := \prod_p \mathbf{Z}_p$ comme sous-anneau. Il existe une unique topologie d'anneau sur \mathbf{A}_f telle que les $(x + N\hat{\mathbf{Z}})_{N \in \mathbf{Z}_{>0}}$ forment une base de voisinages ouverts de x pour tout $x \in \mathbf{A}_f$. La topologie induite sur $\hat{\mathbf{Z}}$ est la topologie produit, pour laquelle il est compact. On munit \mathbf{A} de la topologie produit, via la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}_f$. C'est un anneau localement compact, et \mathbf{Q} y est discret et co-compact (exercice ci-dessous). Une base de voisinages ouverts de $x = (x_v)_v \in \mathbf{A}$ est donnée par les $\prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} \mathbf{Z}_v$, S étant un sous-ensemble fini de \mathcal{P} contenant $\{\infty\}$ et U_v étant des voisinages ouverts de x_v .

Exercice 1.1. a) Vérifier que la flèche naturelle $[0, 1] \times \hat{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{A}/\mathbf{Q}$ est surjective et que $\mathbf{Q} \cap]-1, 1[\times \hat{\mathbf{Z}} = \{0\}$.

¹i.e. tous à l'exception éventuelle d'un nombre fini.

b) Montrer que \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{A}_f (alors qu'il est discret dans \mathbf{A}).

Le **groupe des idèles** \mathbf{A}^* est le groupe des inversibles de \mathbf{A} . Muni de la topologie induite, \mathbf{A}^* n'est pas un groupe topologique, car $x \rightarrow x^{-1}$ n'est pas continue (exercice!). On munit \mathbf{A}^* d'une topologie plus forte, induite par l'inclusion $\mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{A}, x \rightarrow (x, x^{-1})$. Une base de voisinages de 1 est donnée par les $\prod_v U_v$, U_v étant des voisinages de 1 dans \mathbf{Q}_v^* et $U_v = \mathbf{Z}_v^*$ pour presque tout v . Le groupe \mathbf{Q}^* est encore discret dans \mathbf{A}^* , mais $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$ n'est pas compact (\mathbf{Q}^* n'est même pas un réseau dans \mathbf{A}^*).

Avant de passer à \mathbf{GL}_2 , discutons très rapidement le cas du groupe \mathbf{GL}_1 .

Définition 1.1. Un **caractère de Hecke** est un morphisme continu $\omega : \mathbf{Q}^* \backslash \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$.

Pour comprendre les caractères de Hecke on utilise la décomposition

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{R}_{>0} \times \hat{\mathbf{Z}}^*).$$

Le morphisme

$$|\cdot| : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{R}_{>0}, |x| = \prod_v |x_v|_v$$

est un caractère de Hecke, et $x \rightarrow |x|^s$ l'est aussi pour $s \in \mathbf{C}$. D'autre part, tout caractère de Dirichlet $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ induit un caractère de Hecke $\chi : \mathbf{Q}^* \mathbf{R}_{>0} \backslash \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ en composant la projection² $\mathbf{A}^* \rightarrow \hat{\mathbf{Z}}^*$ avec la flèche naturelle $\hat{\mathbf{Z}}^* \rightarrow (\hat{\mathbf{Z}}/N\hat{\mathbf{Z}})^* \simeq (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$. En posant $\chi_v(x_v) = \chi(1, 1, \dots, x_v, 1, \dots)$ on obtient un caractère de \mathbf{Q}_v^* .

Exercice 1.2. Avec les notations ci-dessus, montrer que pour p premier à N on a $\chi_p(x) = \chi(p)^{-v_p(x)}$, donc χ_p est **non ramifié**³. Montrer aussi que $\chi_\infty(x) = \text{sgn}(x)^k$ si $\chi(-1) = (-1)^k$, et que $\chi(x) = \prod_{v \in \mathcal{P}} \chi_v(x_v)$ pour tout $x = (x_v)_v \in \mathbf{A}^*$. Montrer enfin que tout caractère de Hecke est de la forme $\omega(x) = |x|^s \cdot \chi(x)$, χ étant induit par un caractère de Dirichlet et $s \in \mathbf{C}$.

Exercice 1.3. a) Montrer que \mathbf{Q}^* n'est pas dense dans \mathbf{A}_f^* .

b) En posant $\mathbf{A}^1 = \ker(|\cdot|)$, montrer que $\mathbf{A}^1/\mathbf{Q}^* \simeq \hat{\mathbf{Z}}^*$ est compact.

1.2 Le groupe $G(\mathbf{A})$

On veut établir des résultats analogues pour le groupe $G(\mathbf{A}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$. Notons $G_v = G(\mathbf{Q}_v)$ pour $v \in \mathcal{P}$ (donc $G_\infty = G(\mathbf{R})$). Abstraitement, $G(\mathbf{A})$ s'identifie au groupe des suites $(g_v)_v \in \prod_{v \in \mathcal{P}} G_v$ avec $g_v \in G(\mathbf{Z}_v)$ pour presque tout $v < \infty$. On en fait un groupe topologique localement compact unimodulaire en le munissant d'une topologie naturelle⁴ pour laquelle $G_\infty \times \prod_p G(\mathbf{Z}_p)$ (avec la topologie produit) est ouvert. Alors $G(\mathbf{Q})$ est un sous-groupe discret dans $G(\mathbf{A})$, mais ce n'est pas un réseau de $G(\mathbf{A})$, cependant $Z(\mathbf{A})G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$ est bien de volume invariant fini, où Z

²induite par la décomposition $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{R}_{>0} \times \hat{\mathbf{Z}}^*)$

³i.e. trivial sur \mathbf{Z}_p^*

⁴qui n'est pas celle induite par $M_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4$, mais plutôt par l'inclusion $G(\mathbf{A}) \subset M_2(\mathbf{A}) \times \mathbf{A} \simeq \mathbf{A}^5$, $g \rightarrow (g_{ij}, 1/\det g)$. C'est la topologie produit via la décomposition $G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{R}) \times G(\mathbf{A}_f)$, une base de voisinages ouverts de 1 dans $G(\mathbf{A}_f)$ étant donnée par les sous-groupes de congruence $G(N) = \ker(G(\hat{\mathbf{Z}}) \rightarrow G(\hat{\mathbf{Z}}/N\hat{\mathbf{Z}}) \simeq G(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}))$, qui sont distingués d'indice fini dans $G(\hat{\mathbf{Z}}) = \prod_p G(\mathbf{Z}_p)$.

est le centre de \mathbf{GL}_2 (matrices scalaires). Des constructions identiques s'appliquent au groupe $G' = \mathbf{SL}_2$ (en fait à tout groupe algébrique sur \mathbf{Q}), et $G'(\mathbf{Q})$ est un réseau (non co-compact) de $G'(\mathbf{A})$. Un résultat très important est le suivant:

Proposition 1.1. (*"approximation forte"*) $G'(\mathbf{Q})$ est dense dans $G'(\mathbf{A}_f)$.

Proof. Exercice: utiliser le fait que $G'(\mathbf{Q}_v)$ est engendré par des matrices unipotentes supérieures et inférieures, et utiliser la densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{A}_f . \square

Notons que $G(\mathbf{Q})$ n'est pas dense dans $G(\mathbf{A}_f)$ (exercice!). On déduit de la densité de $G'(\mathbf{Q})$ dans $G'(\mathbf{A}_f)$ que $G'(\mathbf{A}_f) = G'(\mathbf{Q})U'$ pour tout sous-groupe ouvert compact U' de $G'(\mathbf{A}_f)$, puis que l'application $G'(\mathbf{R}) \rightarrow G'(\mathbf{A}), x \rightarrow (x, 1)$ induit un homéomorphisme

$$G'(\mathbf{Q}) \backslash G'(\mathbf{A}) / U' \simeq \Gamma' \backslash G'(\mathbf{R}), \text{ où } \Gamma' = G'(\mathbf{Q}) \cap U'.$$

Combinée avec la décomposition $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{R}_{>0} \times \hat{\mathbf{Z}}^*)$, cela montre que pour tout sous-groupe compact ouvert U de $G(\mathbf{A}_f)$ tel que $\det U = \hat{\mathbf{Z}}^*$ on a un homéomorphisme (avec $G(\mathbf{R})^+ = \{g \in G(\mathbf{R}) \mid \det g > 0\}$)

$$\Gamma \backslash G(\mathbf{R})^+ \simeq G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / U,$$

avec $\Gamma = G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R})^+ U$, vu comme sous-groupe de $G(\mathbf{R})$ via la projection sur la composante infinie. Cela s'applique par exemple à $K_0(N)$, le sous-groupe de $G(\hat{\mathbf{Z}})$ des matrices triangulaires supérieures modulo N (très utile dans l'étude des formes modulaires).

Exercice 1.4. a) Montrer que $G(\mathbf{A}_f) = G(\mathbf{Q}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ et que l'application $G(\mathbf{R}) \rightarrow G(\mathbf{A}), x \rightarrow (x, 1)$ induit un homéomorphisme

$$G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R}) \simeq G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}}).$$

b) Montrer que l'on a un homéomorphisme

$$\Gamma_0(N) \backslash \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \simeq Z(\mathbf{A}) G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_0(N).$$

c) Montrer que l'on a un homéomorphisme

$$\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}) \backslash \mathbf{SL}_2(\mathbf{A}) \simeq \varprojlim_N \Gamma(N) \backslash \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}),$$

où l'on ordonne les $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ par la relation de divisibilité.

1.3 Divers espaces automorphes adéliques

Nous allons rapidement reprendre un certain nombre de constructions vues dans le cours 3, concernant les formes automorphes sur $G(\mathbf{R})$ de niveau Γ , en insistant sur l'analogie entre les paires $(G(\mathbf{R}), \Gamma)$ et $(G(\mathbf{A}), G(\mathbf{Q}))$. Une première étape consiste à définir la notion de fonction lisse sur $G(\mathbf{A})$ (l'analogue de $C^\infty(G(\mathbf{R}))$):

Définition 1.2. Une fonction $f : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ est dite **lisse** si au voisinage de tout $x \in G(\mathbf{A})$ f est une fonction lisse de la variable archimédienne, i.e. pour tout $x \in G(\mathbf{A})$ il existe un voisinage $U = \prod_{v \in \mathcal{P}} U_v$ de x dans $G(\mathbf{A})$ et $\phi \in C^\infty(U_\infty)$ telle que $f(y) = \phi(y_\infty)$ pour $y = (y_v)_v \in U$.

L'espace $C^\infty(G(\mathbf{A}))$ des fonctions lisses sur $G(\mathbf{A})$ est un $G(\mathbf{A})$ -module (par translation à droite) et un $U(\mathfrak{g})$ -module (avec $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G(\mathbf{C}))$), l'action de $\mathfrak{g}(\mathbf{R}) = \text{Lie}(G_\infty)$ étant donnée par la formule usuelle.

Les formes automorphes pour $G(\mathbf{R})$ de niveau Γ sont des fonctions lisses sur $\Gamma \backslash G(\mathbf{R})$, $K_\infty := O(2)(\mathbf{R})$ et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ -finies, à croissance modérée. L'analogue de K_∞ dans le cadre adélique est le sous-groupe compact maximal

$$K = \prod_v K_v = K_\infty \times \prod_p G(\mathbf{Z}_p)$$

de $G(\mathbf{A})$. La notion de croissance est définie en utilisant la norme sur $G(\mathbf{A})$ donnée par $\|(g_v)_v\| = \prod_v \|g_v\|_v$, avec

$$\|x\|_\infty := \sqrt{\sum_{i,j} |x_{i,j}|^2 + 1/|\det x|^2}, \quad \|x\|_p := \max(|x_{i,j}|_p, |1/\det x|_p).$$

Cela étant dit, les définitions suivantes sont naturelles (en notant Z le centre de \mathbf{GL}_2 , donc $Z(\mathbf{A})$ est le centre de $G(\mathbf{A})$, etc).

Définition 1.3. L'espace $A(G)$ des **formes automorphes adéliques** pour G est l'espace des fonctions lisses $\phi : G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$, K et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ -finies⁵, à croissance modérée⁶. L'espace $A(G)_{\text{cusp}}$ des **formes cuspidales** est le sous-espace des $\phi \in A(G)$ telles que

$$\int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0, \quad \forall g \in G(\mathbf{A}).$$

Si $\omega : \mathbf{Q}^* \backslash \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un caractère de Hecke on note $A(G, \omega)$ (resp. $A(G, \omega)_{\text{cusp}}$) l'espace des formes automorphes (resp. cuspidales) ϕ telles que $\phi(zg) = \omega(z)\phi(g)$ pour $z \in Z(\mathbf{A})$ et $g \in G(\mathbf{A})$.

Il est très utile d'introduire aussi des espaces de Hilbert du type L^2 . Pour des raisons analytiques⁷ il convient de fixer un caractère central **unitaire** $\omega : Z(\mathbf{Q}) \backslash Z(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}^*$, i.e. un caractère de Hecke unitaire $\omega : \mathbf{Q}^* \backslash \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$.

Définition 1.4. On définit une représentation unitaire de $G(\mathbf{A})$ sur l'espace de Hilbert

$$L^2(\omega) = \{\phi : G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C} \text{ mesurable} \mid \phi(zg) = \omega(z)\phi(g), z \in Z(\mathbf{A}),$$

$$\int_{Z(\mathbf{A})G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})} |\phi(x)|^2 dx < \infty\},$$

en faisant agir $G(\mathbf{A})$ par $(g.\phi)(x) = \phi(xg)$. Noter que $|\phi|$ est bien invariante par $Z(\mathbf{A})$ puisque ω est unitaire, donc la définition a un sens. On note

$$L^2_{\text{cusp}}(\omega) = \{\phi \in L^2(\omega) \mid \int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0 \text{ p.p. } g \in G(\mathbf{A})\}.$$

⁵Comme d'habitude, cela signifie que les espaces engendrés par les translatés à droite de ϕ par K et par $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ sont de dimension finie.

⁶i.e. il existe c et N tels que $|f(g)| \leq c\|g\|^N$ pour tout $g \in G(\mathbf{A})$.

⁷liées au fait que $Z(\mathbf{A})G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$ est de volume invariant fini, alors que $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$ ne l'est pas.

Remarque 1.5. On laisse au lecteur de vérifier, en utilisant Fubini et la compacité de $\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}$, que $x \rightarrow \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ est bien intégrable pour presque tout g (donc la définition a un sens) et que $L_{\text{cusp}}^2(\omega)$ est un sous-espace fermé, $G(\mathbf{A})$ -stable de $L^2(\omega)$.

Comme dans le cas réel, $A(G)$ n'est pas stable par l'action naturelle (translation à droite) de $G(\mathbf{A})$ sur $C^\infty(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}))$, car la condition de K -finitude n'est pas stable par translation à droite. Il est facile de voir que $A(G)$ est stable par translation à droite par $G(\mathbf{A}_f)$ et K_∞ . En fait, on verra que $A(G)$ est un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse, au sens suivant:

Définition 1.5. Un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -**module lisse** est un (\mathfrak{g}, K_∞) -module M muni d'une action linéaire de $G(\mathbf{A}_f)$, commutant à celle de \mathfrak{g} et K_∞ et tel que $M = \cup_U M^U$, la réunion portant sur les sous-groupes ouverts compacts U de $G(\mathbf{A}_f)$. On dit que M est **admissible** si chaque M^U est un (\mathfrak{g}, K_∞) -module admissible.

Le fait que le $G(\mathbf{A}_f)$ -module $A(G)$ est lisse⁸ est une conséquence du fait plus général qu'une fonction lisse K -finie sur $G(\mathbf{A})$ est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$, qui est un exercice pas totalement trivial. La lissité du $G(\mathbf{A}_f)$ -module $A(G)$ est fondamentale, car elle permet de relier $A(G)$ aux formes automorphes sur $G(\mathbf{R})$, et donc d'en déduire beaucoup d'informations, car on sait déjà beaucoup de choses sur ces formes automorphes.

Pour préciser un peu tout ceci, fixons un sous-groupe ouvert compact U de $G(\hat{\mathbf{Z}})$. Nous avons vu que $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}_f)/U$ est fini et possède un système de représentants $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in G(\hat{\mathbf{Z}})$, i.e. $G(\mathbf{A}_f) = \coprod_{i=1}^s G(\mathbf{Q})\gamma_i U$. Regardons γ_i comme des éléments de $G(\mathbf{A})$ (en les identifiant à $(1, \gamma_i)$) et U comme sous-groupe de $G(\mathbf{A})$, et posons

$$\Gamma_i = G(\mathbf{Q}) \cap \gamma_i U \gamma_i^{-1}.$$

Les Γ_i sont arithmétiques (même de congruence) dans $G(\mathbf{Q})$, contenus dans $G(\mathbf{Q}) \cap G(\hat{\mathbf{Z}}) = G(\mathbf{Z})$ et on a une identification $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/U \simeq \coprod_i \Gamma_i \backslash G(\mathbf{R})$. En effet, puisque $G(\mathbf{A}_f) = \coprod_{i=1}^s G(\mathbf{Q})\gamma_i U$, tout $g \in G(\mathbf{A})$ possède un représentant dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/U$ de la forme (x, γ_i) avec $x \in G(\mathbf{R})$ et $1 \leq i \leq s$. De plus, i est uniquement déterminé et $(x, \gamma_i), (y, \gamma_i)$ sont dans la même double classe si et seulement si x et y ont la même image dans $\Gamma_i \backslash G(\mathbf{R})$ (tout ceci est immédiat). On obtient donc un isomorphisme

$$\{f : G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/U \rightarrow \mathbf{C}\} \simeq \bigoplus_{i=1}^s \{f_i : \Gamma_i \backslash G(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{C}\}, f \rightarrow (f_i)_i, f_i(x) = f(x, \gamma_i)$$

et on vérifie sans mal⁹ qu'il induit une identification

$$A(G)^U \simeq \bigoplus_{i=1}^s A(G(\mathbf{R}), \Gamma_i).$$

Cela permet de déduire beaucoup de propriétés de $A(G)$ à partir de celles établies pour les $A(G(\mathbf{R}), \Gamma)$:

⁸i.e. toute forme automorphe est invariante à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbf{A}_f)$

⁹Cf. notes de Chenevier, prop 7.39

Théorème 1.6. (*Harish-Chandra*)

a) Si $f \in A(G)$ et $g_f \in G(\mathbf{A}_f)$, la fonction $x \rightarrow f(x, g_f)$ sur $G(\mathbf{R})$ est analytique réelle.

b) $A(G)$ est un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse.

c) Les fonctions dans $A(G, \omega)_{\text{cusp}}$ sont bornées,¹⁰ en particulier

$$A_{\text{cusp}}(G, \omega) \subset L^2_{\text{cusp}}(\omega).$$

d) Pour tout idéal de codimension finie J de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ l'espace $A(G, \omega)_{\text{cusp}}[J]$ des formes tuées par J est un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse admissible.

On dispose alors du théorème fondamental suivant (rappelons que $\widehat{G(\mathbf{A})}$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbf{A})$):

Théorème 1.7. (*Harish-Chandra, Gelfand, Graev, Piatetski-Shapiro*) La représentation $L^2_{\text{cusp}}(\omega)$ possède une décomposition discrète

$$L^2_{\text{cusp}}(\omega) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi \in \widehat{G(\mathbf{A})}} \pi^{\oplus m(\pi)}}, \quad m(\pi) < \infty.$$

Cette décomposition induit, via l'inclusion $A(G, \omega)_{\text{cusp}} \subset L^2_{\text{cusp}}(\omega)$, un isomorphisme

$$A(G, \omega)_{\text{cusp}} \simeq \bigoplus_{\pi \in \widehat{G(\mathbf{A})}} HC(\pi)^{\oplus m(\pi)}, \quad HC(\pi) := \cup_U HC(\pi^U),$$

la réunion portant sur les sous-groupes ouverts compacts U de $G(\mathbf{A}_f)$. De plus, chaque $HC(\pi)$ est un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse, admissible, irréductible, dense dans π .

Définition 1.6. Les facteurs directs irréductibles de $A(G, \omega)_{\text{cusp}}$ (i.e. les $HC(\pi)$ ci-dessus) sont les **représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbf{A})$** (de caractère central ω). Noter bien qu'il ne s'agit pas de vraies représentations de $G(\mathbf{A})$, mais plutôt de $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules lisses, irréductibles, admissibles.

Remarque 1.8. Donnons quelques indications rapides concernant la preuve du théorème ci-dessus. L'existence de la décomposition discrète découle (via le critère général, cf. cours 4) de la compacité des opérateurs $\phi \rightarrow f \cdot \phi : g \rightarrow \int_{G(\mathbf{A})} f(x) \phi(xg) dx$ pour $f \in C_c^\infty(G(\mathbf{A})) := C_c^\infty(G(\mathbf{R})) \otimes_{\mathbf{C}} \text{LC}_c(G(\mathbf{A}_f))$ sur $L^2_{\text{cusp}}(\omega)$. Ces opérateurs sont même Hilbert-Schmidt. La preuve utilise bien sûr des estimées sur les ensembles de Siegel, comme dans le cas réel (cf. cours 8). Les assertions concernant les $HC(\pi)$ se démontrent comme à la fin du cours 3. Montrons l'admissibilité des facteurs irréductibles de $A(G, \omega)_{\text{cusp}}$. Si M est un tel facteur et $f \in M$ est non nulle, il existe un idéal J de codimension finie dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tuant f . Alors J tue M par irréductibilité de M et le fait que l'action de J commute à toutes les autres. Ainsi $M \subset A(G, \omega)_{\text{cusp}}[J]$ et ce dernier est admissible par le théorème 1.6.

Un résultat beaucoup plus profond est le suivant:

¹⁰même à décroissance rapide sur les ensembles de Siegel adéliques, définis comme on le pense...

Théorème 1.9. (*multiplicité 1*) (Jacquet-Langlands, Piatetski-Shapiro, Shalika) On a $m(\pi) \in \{0, 1\}$ pour tout $\pi \in \widehat{G(\mathbf{A})}$, autrement dit

$$\dim \mathrm{Hom}_{G(\mathbf{A})}^{\mathrm{cont}}(\pi, L_{\mathrm{cusp}}^2(\omega)) \leq 1$$

et

$$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)}(\Pi, A(G, \omega)_{\mathrm{cusp}}) \leq 1$$

pour tout $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse irréductible Π .

La preuve de ce théorème est longue et compliquée. Elle fait intervenir beaucoup d'ingrédients, et le but des paragraphes ci-dessus est d'en faire une liste non exhaustive.

2 Du global au local

Nous avons vu que les caractères de Hecke possèdent des décompositions $\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v)$, les χ_v étant des caractères de \mathbf{Q}_v^* , non ramifiés pour presque tout v . Nous allons voir qu'un résultat similaire est vrai pour les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbf{A})$. Cela demande quelques préliminaires et nettement plus d'effort...

2.1 Représentations lisses de G_p

On fixe un nombre premier p et on note $\mathrm{Rep}(G_p)$ la catégorie des **représentations lisses de G_p** , i.e. des représentations \mathbf{C} -linéaires¹¹ π de G_p telles que

$$\pi = \bigcup_{U \subset G_p} \pi^U,$$

la réunion portant sur les sous-groupes ouverts compacts U de G_p (il suffit de se restreindre aux $U_n = 1 + p^n M_2(\mathbf{Z}_p)$ avec $n \geq 1$). La lissité est une condition de continuité naturelle en absence d'une topologie sur π .

Soit $\mathcal{H}(G_p) = \mathrm{LC}_c(G_p)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact dans G_p . Ses éléments sont précisément les combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques 1_{gU} , avec $g \in G_p$ et U un sous-groupe ouvert compact de G_p (on peut aussi considérer les combinaisons des 1_{Ug} , ou des $1_{U'gU}$, on obtient la même chose). C'est une algèbre (pas unitaire!) pour le produit de convolution

$$f * f'(g) = \int_{G_p} f(x) f'(x^{-1}g) dx,$$

la mesure de Haar dx sur le groupe unimodulaire G_p étant telle que le volume de $K_p := G(\mathbf{Z}_p)$ soit 1.

Chaque $\pi \in \mathrm{Rep}(G_p)$ est naturellement un $\mathcal{H}(G_p)$ -module, via

$$\pi(f).v = \int_{G_p} f(g) g.v dg,$$

¹¹de dimension arbitraire, pas forcément finie! noter aussi qu'il n'y a pas de topologie sur V .

l'intégrale $\int_{G_p} f(g)g.vdg$ étant en fait une somme finie déguisée, définie comme suit: on choisit un sous-groupe ouvert compact U de G_p tel que $v \in \pi^U$ et f est invariante à droite par U , et on pose

$$\int_{G_p} f(g)g.vdg = \text{vol}(U) \cdot \sum_{g \in G_p/U} f(g)g.v,$$

la somme étant finie puisque le support de f est compact et U est ouvert. On vérifie que l'expression ci-dessus ne dépend pas de U et que $\pi(f * f') = \pi(f) \circ \pi(f')$. Par exemple $e_U = \frac{1_U}{\text{vol}(U)} \in \mathcal{H}(G_p)$ et l'opérateur $\pi(e_U)$ est un projecteur sur π^U . On obtient ainsi une équivalence de catégories entre $\text{Rep}(G_p)$ et la catégorie des $\mathcal{H}(G_p)$ -modules **lisses** M , i.e. tels que pour tout $m \in M$ il existe $f \in \mathcal{H}(G_p)$ avec $\pi(f)m = m$.

Une notion très importante et satisfaite par les représentations "provenant du global" est celle d'admissibilité:

Définition 2.1. Une représentation $\pi \in \text{Rep}(G_p)$ est dite **admissible** si chaque π^U est de dimension finie¹². De manière équivalente, π est admissible si et seulement si $\pi(f)$ est un opérateur de rang fini pour tout $f \in \mathcal{H}(G_p)$.

Remarque 2.1. a) Soit $K_p = G(\mathbf{Z}_p)$, un sous-groupe compact maximal de G_p . Soit \hat{K}_p l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations continues, irréductibles (de dimension finie) de K_p et soit $\pi(\tau)$ la composante τ -isotypique pour $\tau \in \hat{K}_p$ (i.e. la somme des sous-espaces K_p -stables $W \subset \pi$ isomorphes en tant que K_p -module à τ). Alors π est admissible si et seulement si $\pi = \bigoplus_{\tau \in \hat{K}_p} \pi(\tau)$, chaque $\pi(\tau)$ étant de dimension finie. Autrement dit, la condition est exactement la même que celle pour les groupes réels!

b) Si π est admissible, il est clair que π est de dimension dénombrable. De plus, le lemme de Schur s'applique: si de plus π est irréductible, alors $\text{End}_{G_p}(\pi) = \mathbf{C}$ (la preuve est un exercice, beaucoup plus facile que pour les groupes réels!).

c) Si π est admissible, on obtient une forme linéaire $f \rightarrow \text{Tr}(\pi(f))$ sur $\mathcal{H}(G_p)$ (bien définie car $\pi(f)$ est de rang fini, donc sa trace a un sens). Un théorème profond de Harish-Chandra¹³ montre l'existence d'une fonction localement intégrable Θ_π sur G_p telle que

$$\text{Tr}(\pi(f)) = \int_{G_p} \Theta_\pi(g)f(g)dg$$

pour tout $f \in \mathcal{H}(G_p)$. Bien sûr, on appelle Θ_π le **caractère de π** . C'est une fonction constante sur les classes de conjugaison dans G_p et localement constante sur les éléments semi-simples réguliers de G_p (i.e. matrices diagonalisables sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$, à valeurs propres distinctes).

d) Un autre résultat tout à fait non-trivial et bien utile est l'analogie suivant du fait qu'un (\mathfrak{g}, K) -module irréductible est admissible: tout objet irréductible de $\text{Rep}(G_p)$ est admissible! Ce résultat est dû à Jacquet et Bernstein.

2.2 Facteurs locaux

Puisque $G(\mathbf{A}_f)$ est à (pas si) peu de choses près le produit des groupes G_p , on peut espérer que les $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules lisses irréductibles se factorisent

¹² U étant comme d'habitude un sous-groupe ouvert compact de G_p

¹³toujours lui!

aussi, et la construction suivante n'est pas absurde: partons d'un (\mathfrak{g}, K_∞) -module irréductible (donc admissible, cf. cours 4) π_∞ et d'une famille $(\pi_p)_p$, où π_p est une représentation lisse, irréductible de G_p (donc admissible, cf. remarque ci-dessus). On suppose que pour presque tout p la représentation π_p est **non ramifiée**, i.e. l'espace $\pi_p^{K_p}$ est non nul, où $K_p = G(\mathbf{Z}_p)$. On verra (cf. paragraphe suivant) que cet espace est alors une droite. Fixons des vecteurs non nuls $e_p \in \pi_p^{K_p}$.

Définition 2.2. Le **produit tensoriel restreint** $\pi = \otimes'_v \pi_v$ des π_v (relativement au choix des e_p) est l'espace engendré par les vecteurs de la forme $\otimes_v x_v$ avec $x_v \in \pi_v$ et $x_p = e_p$ pour presque tout p . De manière plus précise,

$$\otimes'_v \pi_v = \varinjlim_S \otimes_{v \in S} \pi_v,$$

la limite portant sur les sous-ensembles finis¹⁴ $S \subset \mathcal{P}$, les flèches de transition (injectives) étant données par $\otimes_{v \in S} x_v \rightarrow \otimes_{v \in S} x_v \otimes \otimes_{v \in S' \setminus S} e_v$.

Le théorème suivant est absolument fondamental. Sa preuve est relativement formelle, bien qu'assez longue...

Théorème 2.2. (Flath) Avec les hypothèses et notations ci-dessus, $\otimes'_v \pi_v$ est naturellement un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse, admissible, irréductible, indépendant (à isomorphisme près) du choix des e_p . Tout $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse, admissible, irréductible π est ainsi obtenu, et les "**facteurs locaux**" π_v sont **uniquement déterminés à isomorphisme près**.

La version hilbertienne de ce théorème coute nettement plus cher. Considérons des représentations irréductibles unitaires π_v de G_v sur des espaces de Hilbert, presque partout non ramifiées¹⁵. Elles induisent une représentation unitaire $\pi = \hat{\otimes}'_v \pi_v$ de $G(\mathbf{A})$: on choisit pour presque tout p des vecteurs **unitaires** $e_p \in \pi_p^{K_p}$, on définit $\otimes'_v \pi_v$ comme ci-dessus, on le munit du produit hermitien pour lequel $\langle \otimes_v x_v, \otimes_v y_v \rangle = \prod_v \langle x_v, y_v \rangle$ et on définit $\pi = \hat{\otimes}'_v \pi_v$ comme le complété de $\otimes'_v \pi_v$.

Théorème 2.3. (Bernstein) La représentation $\pi = \hat{\otimes}'_v \pi_v$ de $G(\mathbf{A})$ est irréductible unitaire, indépendante (à isomorphisme près) du choix des e_p , et toute représentation irréductible unitaire π de $G(\mathbf{A})$ est ainsi obtenue, les facteurs locaux $(\pi_v)_v$ étant **uniquement déterminés à isomorphisme près**.

Ces deux résultats sont compatibles au sens suivant: si $\Pi \in \widehat{G(\mathbf{A})}$ et si Π_v sont ses facteurs locaux (donc $\Pi_v \in \widehat{G}_v$), en notant π_v l'espace des vecteurs K_v -finis de Π_v (si $v < \infty$ on a $\pi_v = \cup_{U \subset G_v} \Pi_v^U$) on obtient une famille de représentations lisses irréductibles π_p de G_p , ainsi qu'un (\mathfrak{g}, K_∞) -module irréductible π_∞ , et on a un isomorphisme de $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules

$$\Pi^{K\text{-fini}} \simeq \otimes'_v \pi_v.$$

Le résultat suivant raffine le théorème de multiplicité un:

Théorème 2.4. (multiplicité 1 fort) (Jacquet-Langlands, Piatetski-Shapiro, Miyake, Casselman) Soient $\Pi, \Pi' \subset L^2(\omega)_{\text{cusp}}$ (resp. $A(G, \omega)_{\text{cusp}}$) des sous $G(\mathbf{A})$ -modules (resp. sous $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules) irréductibles, de facteurs locaux $(\Pi_v)_v$ et $(\Pi'_v)_v$. Si $\Pi_v \simeq \Pi'_v$ pour presque tout v , alors $\Pi = \Pi'$.

¹⁴assez gros pour que π_p soit non ramifiée pour $p \notin S$

¹⁵i.e. $\pi_p^{K_p} \neq 0$ pour presque tout p

2.3 Représentations non ramifiées

Au vu du théorème de factorisation, une question naturelle se pose: quelles sont les représentations lisses, irréductibles, non ramifiées de G_p ? On appellera une telle représentation π **sphérique**. Notons $\text{Irr}(G_p)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets irréductibles de $\text{Rep}(G_p)$. On confondra souvent une représentation et sa classe d'isomorphisme.

Exercice 2.5. Les seuls objets de dimension finie dans $\text{Irr}(G_p)$ sont les $g \rightarrow \chi(\det g)$ avec $\chi : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ un caractère lisse (i.e. trivial sur un sous-groupe ouvert de \mathbf{Z}_p^*). Les représentations sphériques de dimension finie sont donc les $g \rightarrow \chi(\det g)$ avec χ non ramifié (i.e. trivial sur \mathbf{Z}_p^*).

Une manière simple de construire des objets de $\text{Rep}(G_p)$ est par induction d'un caractère lisse du tore diagonal T de G_p . Concrètement, on part de deux caractères lisses $\chi_1, \chi_2 : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ et on considère la représentation de G_p sur

$$I(\chi_1, \chi_2) = \{ \phi \in \text{LC}(G_p) \mid \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \chi_1(a)\chi_2(d)|a/d|_p^{1/2}\phi(g) \forall a, b, d, g \},$$

G_p agissant par $(g.\phi)(x) = \phi(xg)$. On a noté $\text{LC}(G_p)$ l'espace des fonctions localement constantes sur G_p (à valeurs complexes). Le facteur $|a/d|_p^{1/2}$ (qui encode le caractère non unimodulaire du Borel supérieur) est là pour assurer que si χ_i sont unitaires¹⁶ alors $I(\chi_1, \chi_2)$ est unitarisable¹⁷. Il faut se fatiguer un peu pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.6. *La représentation $I(\chi_1, \chi_2)$ est lisse, admissible, de longueur au plus 2 et génériquement irréductible. Plus précisément, posons $\chi = \chi_1\chi_2^{-1}$.*

- si $\chi \neq |\cdot|^\pm$, alors $I(\chi_1, \chi_2)$ est irréductible et on pose $\pi(\chi_1, \chi_2) = I(\chi_1, \chi_2)$.
- si $\chi = |\cdot|^{-1}$ (resp. $\chi = |\cdot|$) on a une suite exacte dans $\text{Rep}(G_p)$, avec $\pi(\chi_1, \chi_2)$ irréductible

$$0 \rightarrow (\chi_1|\cdot|^{1/2}) \circ \det \rightarrow I(\chi_1, \chi_2) \rightarrow \pi(\chi_1, \chi_2) \rightarrow 0$$

(resp. $0 \rightarrow \pi(\chi_1, \chi_2) \rightarrow I(\chi_1, \chi_2) \rightarrow (\chi_2|\cdot|^{1/2}) \circ \det \rightarrow 0$).

Enfin, $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\delta_1, \delta_2)$ si et seulement si $(\delta_1, \delta_2) \in \{(\chi_1, \chi_2), (\chi_2, \chi_1)\}$.

Les $\pi(\chi_1, \chi_2)$ avec $\chi \neq |\cdot|^\pm$ forment la **série principale**, les autres $\pi(\chi_1, \chi_2)$ forment la **série spéciale**. Les séries spéciales sont précisément les tordues $\text{St} \otimes (\delta \circ \det)$ de la **représentation de Steinberg** St par les caractères lisses δ . On a

$$\text{St} = \text{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), \mathbf{C})/\text{constantes},$$

le groupe G_p agissant par homographies sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Un excellent exercice consiste à montrer que St est bien lisse, admissible et irréductible.

Théorème 2.7. *Les représentations sphériques de dimension infinie sont précisément les séries principales non ramifiées, i.e. les $\pi(\chi_1, \chi_2)$ avec χ_i non ramifiés et $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\cdot|^\pm$.*

Noter qu'un caractère χ de \mathbf{Q}_p^* est non ramifié si et seulement s'il est de la forme $\chi(x) = t^{v_p(x)}$ avec $t \in \mathbf{C}^*$. En mettant ensemble le début de ce paragraphe et

¹⁶i.e. à valeurs dans les nombres complexes de module 1

¹⁷i.e. possède un produit hermitien G_p -invariant

le théorème ci-dessus, on obtient: **les représentations sphériques de G_p sont classifiées par les paires (t_1, t_2) de nombres complexes non nuls, modulo l'action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par permutation des facteurs.** Plus précisément, étant donnés deux nombres $t_1, t_2 \in \mathbf{C}^*$, la représentation $I(t_1, t_2) := I(\chi_1, \chi_2)$ (avec $\chi_i(x) = t_i^{v_p(x)}$) possède un unique sous-quotient sphérique noté $\pi(t_1, t_2)$, et $\pi(t_1, t_2) \simeq \pi(s_1, s_2)$ si et seulement si $(t_1, t_2) \in \{(s_1, s_2), (s_2, s_1)\}$. La représentation $\pi(t_1, t_2)$ est de dimension finie (et alors de dimension 1) si et seulement si $t_1/t_2 \in \{p, p^{-1}\}$. Il n'est d'ailleurs pas difficile de vérifier à la main que $I(t_1, t_2)^{K_p}$ est une droite, engendrée par une fonction parfaitement explicite. Le foncteur $\pi \rightarrow \pi^{K_p}$ étant exact sur les représentations lisses admissibles, l'existence d'un unique sous-quotient sphérique est claire.

Ce qui n'est pas clair, c'est que l'on obtient ainsi toutes les représentations sphériques. La preuve utilise **l'algèbre de Hecke sphérique**

$$\mathcal{H}_p = \{\phi \in \mathcal{H}(G_p) \mid \phi(k_1 g k_2) = \phi(g), k_i \in K_p, g \in G\}.$$

C'est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G_p)$, d'élément neutre 1_{K_p} . Une base de \mathcal{H}_p en tant que \mathbf{C} -espace vectoriel est donnée par les $1_{K_p g K_p}$, les g parcourant un système de représentants de $K_p \backslash G_p / K_p$. La **décomposition de Cartan p -adique** (i.e. théorie des diviseurs élémentaires...) fournit

$$G_p = \coprod_{a \leq b \in \mathbf{Z}} K_p \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ 0 & p^b \end{pmatrix} K_p,$$

donc une base est donnée par les $1_{K_p \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ 0 & p^b \end{pmatrix} K_p}$ avec $a \leq b \in \mathbf{Z}$. A partir de là, il n'est pas très difficile d'établir le théorème fondamental suivant:

Théorème 2.8. *Le morphisme de \mathbf{C} -algèbres $\mathbf{C}[X^{\pm 1}, Y] \rightarrow \mathcal{H}_p$ envoyant X sur $R_p := 1_{K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K_p}$ et Y sur $T_p := 1_{K_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K_p}$ est un isomorphisme.*

Remarque 2.9. Ce résultat est un cas très particulier de **l'isomorphisme de Satake**, qui est (pour \mathbf{GL}_2 ...) un isomorphisme de \mathbf{C} -algèbres

$$S : \mathcal{H}_p \simeq \text{LC}_c(T/T^0)^{S_2}, \quad S(f)(t) = |a/d|^{1/2} \int_N f(tn) dn, t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Ici $T = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{pmatrix}$ est le tore diagonal de G_p , $N = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_p^* \end{pmatrix}$ et $\text{LC}_c(?)$ est l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $?$. Le groupe $S_2 \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (groupe de Weyl de G_p ...) agit sur T et T^0 comme on le pense, en permutant les coefficients diagonaux. L'isomorphisme évident $T/T^0 \simeq \mathbf{Z}^2$ en induit un autre

$$\text{LC}_c(T/T^0) \simeq \mathbf{C}[X^{\pm}, Y^{\pm}], \quad 1_{\begin{pmatrix} p^u & 0 \\ 0 & p^v \end{pmatrix}} \rightarrow X^u Y^v.$$

On obtient ainsi un isomorphisme de \mathbf{C} -algèbres

$$S : \mathcal{H}_p \simeq \mathbf{C}[X^{\pm}, Y^{\pm}]^{S_2} \simeq \mathbf{C}[X + Y, (XY)^{\pm}].$$

On vérifie par calcul direct que

$$S(R_p) = XY, \quad S(T_p) = p^{1/2}(X + Y).$$

Si $\Pi \in \text{Rep}(G_p)$, alors Π^{K_p} est naturellement un \mathcal{H}_p -module. Des arguments formels et généraux montrent que si Π est sphérique, alors le \mathcal{H}_p -module Π^{K_p} est simple et la classe d'isomorphisme de Π est déterminée par celle de ce module. Puisque $\mathcal{H}_p \simeq \mathbf{C}[X^\pm, Y]$, les \mathcal{H}_p -modules simples sont de dimension 1, et donc \mathcal{H}_p agit sur la droite Π^{K_p} par un morphisme d'algèbres $\lambda_\Pi : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathbf{C}$. D'autre part, un calcul direct montre que l'action de \mathcal{H}_p sur $\pi(t_1, t_2)^{K_p}$ est donnée par

$$R_p.v = t_1 t_2 v, \quad T_p.v = p^{1/2}(t_1 + t_2)v, \quad v \in \pi(t_1, t_2)^{K_p}.$$

En prenant $t_1, t_2 \in \mathbf{C}^*$ tels que $t_1 t_2 = \lambda_\Pi(X)$ et $p^{1/2}(t_1 + t_2) = \lambda_\Pi(Y)$, on peut conclure que $\Pi \simeq \pi(t_1, t_2)$, ce qui finit la preuve du théorème 2.7.

Définition 2.3. Le **paramètre de Satake** d'une représentation sphérique Π est le couple (non ordonné) $(t_1, t_2) \in (\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)/(S_2)$ tel que $\Pi \simeq \pi(t_1, t_2)$.

Explicitement, t_1, t_2 sont déterminés par

$$t_1 + t_2 = p^{-1/2} z_\Pi, \quad t_1 t_2 = \omega_\Pi(p),$$

où z_Π est la valeur propre de T_p sur la droite Π^{K_p} et ω_Π est le caractère central de Π (i.e. $z.v = \omega_\Pi(z)v$ pour $z \in Z(G_p)$ et $v \in \Pi$), dont l'existence est assurée par le lemme de Schur.

Finissons ce paragraphe par une remarque culturelle importante: on peut naturellement se demander s'il existe d'autres objets irréductibles dans $\text{Rep}(G_p)$ que ceux que l'on vient d'exhiber, i.e. les sous-quotients irréductibles des $I(\chi_1, \chi_2)$ (en d'autres termes, les caractères, les séries principales et spéciales). La réponse est positive et les représentations restantes sont appelées **supercuspidales**. Leur étude est délicate. On dispose en effet du magnifique théorème suivant, qui est au coeur de la **correspondance de Langlands pour G_p** et dans lequel $W_{\mathbf{Q}_p}$ est le groupe de Weil de \mathbf{Q}_p , i.e. le groupe des automorphismes $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ induisant une puissance entière du Frobenius sur le corps résiduel $\overline{\mathbf{F}_p}$ de $\overline{\mathbf{Q}_p}$. Il possède une structure naturelle de groupe localement compact, contenant le sous-groupe d'inertie de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ comme sous-groupe ouvert (attention, cette topologie n'est pas celle induite par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$!).

Théorème 2.10. (*Jacquet-Langlands, Tunnell, Kutzko*) *Il existe une bijection "naturelle" entre les classes d'isomorphisme de représentations supercuspidales de G_p et les classes d'isomorphisme de représentations continues irréductibles de dimension 2 de $W_{\mathbf{Q}_p}$.*

Remarque 2.11. a) On peut aussi mettre en bijection les autres représentations irréductibles de G_p avec certaines représentations réductibles de dimension 2 de $W_{\mathbf{Q}_p}$ (munies d'un opérateur nilpotent vérifiant certaines conditions techniques dans le cas de la série spéciale).

b) Ce genre de subtilité n'apparaît pas "à l'infini": "les groupes réels ne possèdent pas de représentation supercuspidale", i.e. tout (\mathfrak{g}, K_∞) -module irréductible apparaît comme sous-objet d'un (\mathfrak{g}, K_∞) -module induit (dont la définition est très semblable à celle des $I(\chi_1, \chi_2)$, en partant de caractères continus $\chi_i : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ et en considérant l'espace des fonctions continues K_∞ -finies à droite sur $G(\mathbf{R})$, telles que $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \chi_1(a)\chi_2(d)|a/d|^{1/2}f(g)$ pour tous a, b, d, g).

3 Formes modulaires et formes automorphes

Expliquons maintenant le lien avec les formes modulaires. Pour "simplifier", on ne traite que le cas des formes cuspidales. Soit $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ un caractère de Dirichlet et soit $\chi : \mathbf{Q}^*\mathbf{R}_{>0}\backslash\mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ le caractère de Hecke associé. Si $f \in S_k(N, \chi)$ est une forme modulaire cuspidale sur $\Gamma_1(N)$, de caractère χ (on a donc $f(\gamma.z) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$ avec les notations usuelles pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$), on lui associe une forme cuspidale $\phi_f \in A(G, \chi)_{\text{cusp}}$ comme suit.

Puisque

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot (G(\mathbf{R})^+ \times K_0(N)), \quad \Gamma_0(N) = G(\mathbf{Q}) \cap (G(\mathbf{R})^+ \times K_0(N)),$$

avec $G(\mathbf{R})^+ = \mathbf{R}_{>0} \cdot G'(\mathbf{R})$ (bien sûr, $\mathbf{R}_{>0}$ est vu comme sous-groupe central de $G(\mathbf{R})$, i.e. les matrices scalaires, à coefficients diagonaux dans $\mathbf{R}_{>0}$), il existe une unique application $\phi_f : \mathbf{R}_{>0}G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ telle que pour tous $g_\infty \in G'(\mathbf{R})$ et $k \in K_0(N)$ on ait (en posant $\chi(k) = \chi(a)$ si $k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)

$$\phi_f(g_\infty k) = \chi(k) f|_k g_\infty(i).$$

Le résultat suivant est une traduction d'un résultat démontré dans le cours 3.

Théorème 3.1. *L'application $f \rightarrow \phi_f$ induit un isomorphisme entre $S_k(N, \chi)$ et le sous-espace de $A(G, \chi)_{\text{cusp}}$ formé des fonctions ϕ telles que*

- $\phi(gk) = \chi(k)\phi(g)$ et $\phi\left(g \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = e^{ik\theta}\phi(g)$ pour $k \in K_0(N), g \in G(\mathbf{A}), \theta \in \mathbf{R}$.

- $X_- \phi = 0$, où $X_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in U(\mathfrak{g})$.

De plus, pour une normalisation convenable des mesures de Haar on a

$$\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathscr{H}} |f(z)|^2 y^k \frac{dx dy}{y^2} = \int_{G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} |\phi_f(g)|^2 dg.$$

Définition 3.1. On note

$$\pi(f) = \overline{\mathbf{C}[G(\mathbf{A})]\phi_f} \subset L^2(\chi)_{\text{cusp}}$$

la sous-représentation de $L^2(\chi)_{\text{cusp}}$ engendrée par $f \in S_k(N, \chi)$ et

$$\Pi(f) = HC(\pi(f)) \subset A(G, \chi)_{\text{cusp}}$$

le $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse associé à f .

En mettant ensemble les résultats précédents, on obtient le beau résultat suivant:

Théorème 3.2. *a) $\pi(f)$ (resp. $\Pi(f)$) est irréductible si et seulement si f est $\mathbf{T}^{(N)}$ -propre¹⁸.*

b) Si $f, f' \in S_k(N, \chi)$ sont $\mathbf{T}^{(N)}$ -propres, alors $\pi(f) = \pi(f')$ si et seulement si les valeurs propres des opérateurs de Hecke T_p sur f et f' sont les mêmes pour presque tout p premier à N .

¹⁸i.e. vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke T_p avec p premier à N .

Discutons rapidement la preuve du théorème. Soit $f \in S_k(N, \chi)$. Une observation importante est que pour tout p premier à N la fonction ϕ_f est invariante par K_p (cela découle du fait que $\phi_f(gk) = \chi(k)\phi_f(g)$ pour $k \in K_0(N)$). En particulier, on peut parler de l'action de \mathcal{H}_p sur ϕ_f , et on vérifie par un calcul direct la formule

$$\phi_{T_p(f)} = p^{\frac{k}{2}-1} T_p \cdot \phi_f,$$

où l'on rappelle que le T_p à droite est l'élément $1_{K_p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} K_p$ de \mathcal{H}_p , agissant par convolution sur ϕ_f .

Si $\pi(f)$ (resp. $\Pi(f)$) est irréductible, par le théorème de décomposition $\Pi(f) \simeq \otimes'_v \Pi_v$ avec Π_p irréductible lisse, non ramifiée pour presque tout p . Puisque $\Pi(f)^{K_p} \neq 0$ pour p premier à N , on voit que Π_p est sphérique et donc \mathcal{H}_p agit par des scalaires sur $\Pi_p^{K_p}$ et donc aussi sur $\Pi(f)^{K_p} \simeq \Pi_p^{K_p} \otimes \otimes'_{v \neq p} \Pi_v$. En particulier $T_p \cdot \phi_f = \alpha \phi_f$ pour un $\alpha \in \mathbf{C}$. L'injectivité de $f \rightarrow \phi_f$ montre que f est vecteur propre de T_p .

L'autre sens est nettement plus délicat. Supposons que $f \in S_k(N, \chi)$ vérifie $T_p(f) = \lambda_p f$ pour p premier à N et montrons que $\Pi(f)$ est irréductible. La relation $\phi_{T_p(f)} = p^{k/2-1} T_p \cdot \phi_f$ montre que $T_p \cdot \phi_f = p^{1-\frac{k}{2}} \lambda_p \phi_f$ et on a trivialement $R_p \cdot \phi_f = \chi(p) \phi_f$. Puisque $A(G, \chi)_{\text{cusp}}$ est un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module semi-simple, il en est de même de $\Pi(f)$. Soit $\Pi \subset \Pi(f)$ un facteur irréductible et supposons que $\Pi \neq \Pi(f)$. Par semi-simplicité de $\Pi(f)$ on peut écrire $\Pi(f) = \Pi \oplus \Pi'$ pour un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module Π' . On note F la projection de ϕ_f sur Π . Notons que $F \neq 0$, sinon $\Pi(f) \subset \Pi'$ (puisque $\Pi(f)$ est engendré par ϕ_f). De plus, F est K_p -invariant et $T_p \cdot F = p^{1-k/2} \lambda_p F$ puisque c'est vrai pour ϕ_f . On en déduit que si $(\Pi_v)_v$ sont les facteurs locaux de Π , alors Π_p est sphérique et ses paramètres de Satake vérifient $p^{1/2}(t_1 + t_2) = p^{1-k/2} \lambda_p$ et $t_1 t_2 = \chi(p)$. Cela ne dépend que de f , k et χ , donc les facteurs locaux en tout premier p ne divisant pas N de tout facteur irréductible Π de $\Pi(f)$ sont isomorphes. On conclut par le théorème de multiplicité 1 fort que $\Pi(f)$ est irréductible. La preuve du point b) utilise exactement le même genre d'idées.

Remarque 3.3. Gardons notre $f \in S_k(N, \chi)$ telle que $T_p(f) = \lambda_p f$ pour p premier à N . L'argument ci-dessus montre que si Π_v sont les facteurs locaux de $\Pi(f)$, alors Π_p est sphérique, de paramètres de Satake

$$t_{1,p} = p^{\frac{1-k}{2}} \alpha_p, \quad t_{2,p} = p^{\frac{1-k}{2}} \beta_p,$$

où

$$X^2 - \lambda_p X + \chi(p) p^{k-1} = (X - \alpha_p)(X - \beta_p).$$

Considérons maintenant le (\mathfrak{g}, K_∞) -module Π_∞ . Supposons de plus que $k \geq 2$. Nous avons vu que $X_- \phi_f = 0$ et que $\phi_f(g \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}) = e^{ik\theta} \phi_f(g)$. On en déduit que Π_∞ possède un vecteur non nul tué par X_- et qui se transforme comme ci-dessus sous l'action de K_∞^0 . Il se trouve qu'il existe un unique tel (\mathfrak{g}, K_∞) -module irréductible, à isomorphisme près: c'est la **série discrète SD_k de poids k** , dont une \mathbf{C} -base est donnée par des vecteurs $\dots, v_{-k-4}, v_{-k-2}, v_{-k}, v_k, v_{k+2}, v_{k+4}, \dots$ et l'action de \mathfrak{g} et K_∞ est décrite par

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} v_j = e^{ij\theta} v_j, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_j = v_{-j}, \quad H v_j = j v_j, \quad X_\pm v_j = \frac{k \pm j}{2} v_{j \pm 2},$$

avec

$$H = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $X_-v_k = 0$ et $X_+v_{-k} = 0$, et l'élément de Casimir $C = H^2 + 2X_+X_- + 2X_-X_+$ agit par le scalaire $k(k-2)$ sur SD_k . Réciproquement, on dispose du beau résultat suivant:

Théorème 3.4. (Casselman) Soit $\Pi \subset A(G, \chi)_{\text{cusp}}$ un $(\mathfrak{g}, K_{\infty}) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module lisse irréductible tel que le facteur local $\Pi_{\infty} \simeq SD_k$, avec $k \geq 2$. Il existe un unique entier $N = N(\pi) \geq 1$ (le conducteur de Π) et une unique forme primitive $f \in S_k(N, \chi)$ telle que Π soit engendré par ϕ_f .

L'entier N est défini à partir des conducteurs locaux des facteurs locaux Π_p , de manière à ce que l'espace

$$\Pi^{\text{new}} = \{\phi \in \Pi \mid X_- \phi = 0, \phi(gk) = \chi(k)\phi(g), k \in K_0(N)\}$$

soit de dimension 1. Il possède alors une base ϕ_f , avec $f \in S_k(N, \chi)$, et quitte à renormaliser f on montre que f est primitive. En notant

$$\text{Aut}(k, \chi) = \{\Pi \subset A(G, \chi)_{\text{cusp}} \text{ irréductible} \mid \Pi_{\infty} \simeq SD_k, N(\pi) = N\},$$

on obtient une décomposition

$$S_k(N, \chi)^{\text{new}} = \bigoplus_{\Pi \in \text{Aut}(k, \chi)} \Pi^{\text{new}}.$$

Finissons ce paragraphe par un résultat tout simplement magnifique, dont la preuve est un véritable tour de force de géométrie algébrique (et pourrait faire l'objet d'un cours de M2 sur un an tout entier...).

Théorème 3.5. (Eichler-Shimura, Deligne) Si $f \in S_k(N, \chi)$ est \mathbf{T}^N -propre, les paramètres de Satake de f en tout p premier à N sont de module 1. Concrètement, on a $|\lambda_p| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$ si $T_p(f) = \lambda_p f$.

Remarque 3.6. a) Voici une tentative naive (et fautive) de démontrer cet énoncé par voie purement "théorie des représentations": puisque $\phi_f \in L^2(\chi)_{\text{cusp}}$, les facteurs locaux $\Pi_{f,p}$ sont unitarisables. S'il était vrai que les paramètres de Satake d'une représentation sphérique unitarisable de G_p sont de module 1, le théorème s'en déduirait. Malheureusement, cela n'est pas vrai. En effet, il existe une famille de représentations sphériques unitarisables, "la série (sphérique) complémentaire", dont les paramètres de Satake ne sont pas de module 1. Elles correspondent aux $\pi(t_1, t_2)$ avec $t_1 = p^{\sigma/2+it}, t_2 = p^{-\sigma/2+it}$ avec $t \in \mathbf{R}$ et $0 < |\sigma| < 1$, et correspondent à une valeur propre t_p de T_p vérifiant $2\sqrt{p} < |t_p| < p+1$, alors que les séries principales sphériques $\pi(t_1, t_2)$ avec $|t_1| = |t_2| = 1$ correspondent à $|t_p| \leq 2\sqrt{p}$.

b) Ces deux derniers théorèmes permettent d'établir la conjecture de Ramanujan-Petersson pour les représentations cuspidales dont le facteur local à la place infinie est une série discrète. Le cas restant fait l'objet de la conjecture de Selberg, encore largement ouverte.