(1)

Formule des traces stable et cohomologie galoisienne (d'après Kottwitz)

But expliquer comment on stabilise la formule des traces (partie géométrique) pour les groupes utilisés dans Harris-Taylor, Scholze, etc.

(1) Groupe dual

Soit F corps et $G/_F$ réductif connexe. Soit $\Gamma = \Gamma_F = Gal(\bar{F}/F)$

RK ds la suite groupe signifiera réductif connexe (sauf quand c'est clair qu'il ne l'est pas ...).

Le choix d'une paire de Borel (T, B) de $G \otimes \bar{F}$ induit une donnée radicielle

$$\Psi_{(T,B)} = (X^*(T), \Delta^*(T,B), X_*(T), \Delta_*(T,B)) \qquad X^*(T) = Hom(T, G_m)$$

$\Delta^*(T,B)$ = racines simples positives de T (elles apparaissent donc dans $T \subset Lie\, B$

les données $\Psi_{(T_1,B_1)}$ et $\Psi_{(T_2,B_2)}$ sont canoniq. isom si $(T_1, B_1), (T_2, B_2)$ sont des paires de Borel. On les identifie entre elles et on note juste $\Psi(G) = \varprojlim_{(T,B)} \Psi_{(T,B)} = (X^*, \Delta^*, X_*, \Delta_*)$. Alors — toutes les suites que j'écris sont exactes!

$$1 \to Int(G) \to Aut(G) \to Aut\,\Psi(G) \to 1$$

et le choix d'un épinglage Σ de G déploie cette suite exacte : tout $f \in Aut\,\Psi(G)$ se relève en un unique $f \in Aut(G)$ fixant Σ. ~~En particulier, Soit sur~~

Suivant Kottwitz, un groupe dual $\hat{G}$ de G sera un groupe$/_{\mathbb{C}}$ (réductif connexe) muni d'une action de Γ qui fixe un épinglage Σ de $\hat{G}$ et d'un Γ-isomorphisme $\Psi(\hat{G}) \simeq \Psi(G)^\vee := (X_*, \Delta_*, X^*, \Delta^*)$

Par Chevalley, un tel groupe existe et est unique à conj près : en effet, par Chevalley et le fait que $\Psi(G)^\vee$ est encore une donnée rad basée réduite on voit $\exists\, \hat{G}/_{\mathbb{C}}$ red conn tq $\Psi(\hat{G}) \simeq \Psi(G)^\vee$ comme données radicielles. L'action de Γ sur $\Psi(G)$ en induit une sur $\Psi(\hat{G})$. Le choix d'un épinglage Σ de $\hat{G}$ permet de relever ceci en une action de Γ sur $\hat{G}$ qui fixe Σ.

__Lemme 1__ 2 épinglages fixés par Γ de $\hat{G}$ sont conjugués par $\hat{G}^\Gamma$.

__Dem__ facile, voir Kottwitz, Duke, au début. ∎

Si $f : G \to H$ est un morphisme __normal__ (ie $f(G) \triangleleft H$), il induit un morphisme $\hat{f} : \hat{H} \to \hat{G}$, qui n'est pas tout à fait canonique (il faut

(2) choisir des épinglages de $\hat{G}$, $\hat{H}$ fixés par Γ pour relever l'action de f sur $\Psi(\hat{G})$, $\Psi(\hat{H})$). Mais d'après le lemme 1, le morphisme $\hat{f}: Z(\hat{H}) \to Z(\hat{G})$ est canonique.

Lemme 2 $G \to Z(\hat{G})$ est un foncteur contravariant exact

$$\begin{array}{ccc} F\text{ gr réductifs connexes} & \longrightarrow & \mathbb{C}\text{-groupes diagonalisables} \\ + F\text{-morphismes normaux} & & + \text{action de } \Gamma \end{array}$$

Dem seul truc pas évident est l'exactitude. Elle se déduit du

Lemme 3 On a $X_*(Z(\hat{G})) = X^*(G) = \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(G_{\bar{F}}, G_{m,\bar{F}})$

Dem Soit T un F-tore max de G, $\hat{T}$ tore max de $\hat{G}$ tq $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$
tout est sur $\bar{F}$

On a $Z(\hat{G}) = \bigcap_{\alpha \in \Phi(\hat{T}, \hat{G})} \mathrm{Ker}\, \alpha = \bigcap_{\alpha \in \Phi(T,G)} \mathrm{Ker}\, \alpha^\vee \Rightarrow$

$$X^*(Z(\hat{G})) = X_*(T) / \mathbb{Z} \cdot \Phi^\vee(T,G) \quad \text{et} \quad X_*(Z(\hat{G})) = X^*(G).$$ ☐

Prop cruciale : G_{der} est simplement connexe $\Leftrightarrow$ $Z(\hat{G})$ est connexe.
Dans ce cas $Z(\hat{G}) = \hat{D}$, où $D = G/G_{der}$

Dem $Z(G)$ connexe $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z} \cdot \Phi(T,G)$ facteur direct de $X^*(T)$ } cf livre de Springer
G_{der} simpl connexe $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z} \cdot \Phi^\vee(T,G)$ — — — — — $X_*(T)$

1^{er} point est alors clair. L'autre vient du lemme 3 et de $X^*(G) = X^*(D)$. ☐

RK 1) $\hat{G}$ ne dépend que de la classe d'isom de G sur $\bar{F}$

2) L'action de Γ sur $\hat{G}$ ne dépend que de la classe de F-formes intérieures à laquelle G appartient. Cette act est triviale ssi G est une forme intérieure d'un F-groupe déployé.

3) T F-tore $\Rightarrow$ $\hat{T} = \mathrm{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$, action de Γ via celle sur $X_*(T)$
Cette act est triviale $\Leftrightarrow$ T F-déployé.

Rappel On dit que $H/_F$ est une forme intérieure de $G/_F$ si on peut trouver $i: G \otimes F^s \xrightarrow{\sim} H \otimes F^s$ tq $i^{-1} \circ \gamma(i) \in \mathrm{Int}(G \otimes F^s)$ $\forall \gamma \in \Gamma$. Par exemple, les formes intérieures de GL_n/F sont les F-algèbres simples centrales de dimension n^2 sur F.

les F-formes de G sont classifiées par $H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}_{F^s}(G \otimes F^s))$. Si G est quasi-déployé, les F-formes intérieures de G sont classifiées par $H^1(\Gamma, G_{ad})$
$\overset{?}{\simeq} \mathrm{Int}(G \otimes F^s)$)

③ ② Invariants locaux de Kottwitz

Soit F un corps local de caractéristique 0 et T un F-tore. Par Tate-Nakayama (cf notes de Kneser pour exemple), $H^1(F,T)$ et $H^1(F,X^*(T))$ sont des groupes abéliens finis en dualité via

$$H^1(F,T)\times H^1(F,X^*(T))\to H^2(F,\bar F^\times)=\mathrm{Br}\,F\simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\xrightarrow[x\to e^{2i\pi x}]{}\mathbb{C}^\times$$

(via $T(\bar F)\times X^*(T)\to \bar F^\times$).

Rk utile : on a des versions avec H^2 et H^0, mais il faut prendre des complétions du H^0. Ce qu'on va utiliser est le fait que $H^2(F,T)=0$ si T est anisotrope sur F, car alors $H^0(F,X^*(T))=0$.

Lemme 4 On a un isom canonique de gr abélien

$$H^1(F,X^*(T))\xrightarrow{\sim}\pi_0(\hat T^\Gamma)=\hat T^\Gamma/(\hat T^\Gamma)^\circ$$

Donc $H^1(F,T)\xrightarrow{\sim}(\pi_0(\hat T^\Gamma))^D$ où D = dualité des gr ab finis.

Dem $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\xrightarrow[\exp]{}\mathbb{C}^\times\to 0 \Rightarrow 0\to X_*(\hat T)\to X_*(\hat T)\otimes\mathbb{C}=\mathrm{Lie}\,\hat T\to X_*(\hat T)\otimes\mathbb{C}^\times=\hat T\to 0$. Donc $1\to X_*(\hat T)^\Gamma\to \mathrm{Lie}\,\hat T^\Gamma\to \hat T^\Gamma\to H^1(F,X_*(\hat T))\to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H^1(F,\mathrm{Lie}\,\hat T)}$

$\Rightarrow H^1(F,X^*(T))\simeq H^1(F,X_*(\hat T))\xrightarrow{\sim}\hat T^\Gamma/\exp\mathrm{Lie}\,\hat T^\Gamma$ car $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Lie}\,\hat T<\infty$

$\xrightarrow{\sim}\pi_0(\hat T^\Gamma)$. ∎

Def $G/_F$ on pose $A(G)=(\pi_0(Z(\hat G)^\Gamma))^D$, un groupe ab fini.

$G\to A(G)$ est un foncteur covariant F-gr réductifs $\to$ gr ab finis.
+ mor normaux

Th (Kottwitz) $\exists!\ \alpha_G : H^1(F,G)\to A(G)$ fonctorielle (pour les mor. normaux) qui induit $H^1(F,T)\xrightarrow{\sim}A(T)$ déjà vu.

Dem 1) Si G_{der} simpl connexe, on a vu que $A(G)=A(D)$ $D=G/G_{der}$ et on peut poser $\underbrace{H^1(F,G)\to H^1(F,D)\xrightarrow{\sim}A(D)=A(G)}_{\alpha_G}$.

2) Soit $x\in H^1(F,G)$ et K une ext fin gal$/_F$ qui déploie G et trivialise x. D'après Langlands (cf aussi Kottwitz, Duke sect 6) on peut trouver une suite exacte $\underbrace{1\to Z\to H\to G\to 1}$ avec $Z\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Res}_{K/F}\mathbb{G}_m)^n$ ← convenable

on parle de z-extension.

H der simpl connexe
Z central ds H

(4) On a $H^2(F,Z) \hookrightarrow H^2(K,Z)$, donc le diag. évident mq x vient d'un $y \in H^1(F,H)$.

$$\begin{tikzcd} H^1(F,H) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_H"] & H^1(F,G) \ni x \arrow[d, dashed] \\ A(H) \arrow[r, "\beta"] & A(G) \end{tikzcd}$$

On pose $\alpha_G(x) = \beta(\alpha_H(y))$

On vérifie (pénible!) que c'est bien défini et fonctoriel.

<u>Rappel sur les tores fondamentaux</u> Un F-tore max de G est fondamental s'il est de F-rang minimal

Th 2 (Kneser) 1) Si T est un tore fondamental de $G \Rightarrow H^1(F,T) \twoheadrightarrow H^1(F,G)$

2) Si F p-adique, les tores fondam. sont elliptiques.

3) Si G semi-simple simpl connexe $\Rightarrow \forall$ T tore fondam on a $H^2(F,T)=0$

<u>RK</u> les tores fondam de G sont en bij avec ceux de G_{sc} = revêt univ de G_{der}

<u>Dem</u> cf section 10 de Kottwitz, Math Annalen, c'est assez délicat (pour moi). ∎

<u>Prop 2</u> 1) T un F-tore maximal de $G \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} H^1(F,T) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_T"] & H^1(F,G) \arrow[d, "\alpha_G"] \\ A(T) \arrow[r] & A(G) \end{tikzcd}$$

$\downarrow$ via $Z(\hat{G}) \hookrightarrow \hat{T}$

2) $\gamma \in G(F)_{ss}$, $I = G_\gamma^0$. Alors $\exists$ une inclusion canonique $Z(\hat{G}) \subset Z(\hat{I})$, induisant

$$\begin{tikzcd} H^1(F,I) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_I"] & H^1(F,G) \arrow[d, "\alpha_G"] \\ A(I) \arrow[r] & A(G) \end{tikzcd}$$

⚠ Ce n'est pas formel, car $T \to G$, $I \to G$ ne sont pas normaux.

<u>Dem</u> 1) par dévissage (z-extension) on se ramène à G_{der} simpl connexe. On peut alors utiliser la fonctorialité totale pour $T \to G/G_{der}$, $G \to G/G_{der}$

2) choisir un tore fondam T de I, lui appliquer 1) et utiliser $H^1(F,T) \twoheadrightarrow H^1(F,I)$ (Thm 2). ∎

<u>Th 3</u> (Kottwitz) 1) Si F p-adique $\Rightarrow \alpha_G$ isom

2) Si $F=\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Ker}\alpha_G = \operatorname{Im}[H^1(F,G_{sc}) \to H^1(F,G)]$

$\operatorname{Im}\alpha_G = \operatorname{Ker}[A(G) \to \pi_0(Z(\hat{G}))^\Gamma]$ via la norme $Z(\hat{G}) \to Z(\hat{G})^\Gamma$

<u>Dem du 1</u> Par dévissage OPS G_{der} simpl connexe. Soit $D = G/G_{der}$. $1 \to G_{der} \to G \to D \to 1$ + $H^1(F,G_{der})=0$ (Kneser) $\Rightarrow \operatorname{Ker}[H^1(F,G) \to H^1(F,D)] = 0 \underset{\text{tw}}{\Rightarrow} H^1(F,G) \to H^1(F,D)$ inj

Soit T tore fondam $\Rightarrow 1 \to T_{der} \to T \to D \to 1$ et $H^2(F,T_{der}) = 0$ car T_{der} anisotr (cf rk 1) $\Rightarrow H^1(F,T) \twoheadrightarrow H^1(F,D) \Rightarrow H^1(F,T)$ bij avec $H^1(F,D) \simeq A(D)$. ∎

le 2 est plus délicat, cf section 1 du papier de Kottwitz ds Math. Annalen.

5 ③ Invariant de Kottwitz global

F corps de nombres, G/F réductif connexe, v place de $F \rightsquigarrow G_v/F_v \rightsquigarrow A(G_v)$

Noter que $Z(\hat{G}_v) = Z(\hat{G})$, d'où une inclusion $Z(\hat{G})^\Gamma \subset Z(\hat{G}_v)^{\Gamma_v} \Rightarrow$ une flèche $A(G_v) \to A(G) \Rightarrow$ une flèche

$$\bigoplus_v H^1(F_v, G_v) \xrightarrow[\oplus d_{G_v}]{} \bigoplus_v A(G_v) \xrightarrow[\Sigma]{} A(G) \qquad (*)$$

Noter que $\bigoplus_v H^1(F_v, G_v) = H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F))$.

Th 4 (Kottwitz) le noyau de $(*)$ est l'image de $H^1(F, G)$ dans $\bigoplus_v H^1(F_v, G_v)$

Dem On va construire une flèche β_G normal-fonctorielle tq

• on a

$$\begin{tikzcd} H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)) \arrow[r] \arrow[d] & A(G) \\ H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F})) \arrow[ur, "\beta_G"'] & \end{tikzcd}$$

• on a $\operatorname{Ker}\beta_G =$ image de $H^1(F, G_{ad})$ dans $H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F}))$

Il est immédiat d'en déduire le th. On construit β_G comme d_G:

• pour les tores $G = T$, β_G est induite par Tate-Nakayama global. Ceci fournit une dualité parfaite entre $H^1(F, T(\bar{\mathbb{A}}_F)/T(\bar{F}))$ et $H^1(F, X^*(T))$ (via cup-produit et $H^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times_F/\bar{F}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$)

le lemme 4 (qui n'utilise pas F local) $\Rightarrow H^1(F, T(\bar{\mathbb{A}}_F)/T(\bar{F})) \simeq A(T)$ fonctoriel en T. On prend pour β_T cet isom.

• si G_{der} est simpl. connexe, $D := G/G_{der}$ et on pose

$$\begin{tikzcd} H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F})) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\beta_G"'] & H^1(F, D(\bar{\mathbb{A}}_F)/D(\bar{F})) \arrow[r, "\sim"] & A(D) = A(G) \end{tikzcd}$$

• le cas général utilise des z-extensions. Pour faire tourner la machine, il faut pouvoir choisir une z-ext $1 \to Z \to H \to G \to 1$ tq $x \in H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F}))$ (fixé par avance) vienne de $H^1(F, H(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_H(\bar{F}))$

Cela se fait comme dans le cas local, mais il faut vérifier que $H(\bar{\mathbb{A}}_F) \twoheadrightarrow G(\bar{\mathbb{A}}_F)$ exercice!.

le point délicat est de calculer $\operatorname{Ker}\beta_G$. Je dis d'abord que tout élément de $\operatorname{Ker}\beta_G$ vient de $H^1(F, G_{der}(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_{G_{der}}(\bar{F}))$. Pour cela il suffit de vérifier l'exactitude de

$$1 \to G_{der}(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_{G_{der}}(\bar{F}) \to G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F}) \to D(\bar{\mathbb{A}}_F)/D(\bar{F}) \to 1$$

(6) qui suit de $G(\bar{\mathbb{A}}_F) \twoheadrightarrow D(\bar{\mathbb{A}}_F)$ et $Z_G(\bar{F}) \twoheadrightarrow D(\bar{F})$.

Donc quitte à remplacer G par G_{sc}, OPS G semisimple simpl connexe.

On veut montrer alors la surjectivité de

$$H^1(F, G_{ad}) \longrightarrow H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F})). \quad (*)$$

Mais
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Z_G(\bar{F}) \arrow[r] & G(\bar{\mathbb{A}}_F) \arrow[r] & G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F}) \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & Z_G(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & G(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u] & G_{ad}(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u] & 1 \end{tikzcd}$$
induit
$$\begin{tikzcd} H^1(F, Z_G) \arrow[r] & H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)) \arrow[r] & H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F})) \arrow[r] & H^2(F, Z_G) \\ & H^1(F,G) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(F, G_{ad}) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[u] & H^2(F, Z_G) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

<u>lemme</u> α est surjective.

<u>Dem</u> Soit $c \in H^2(F, Z_G)$. $\exists S$ ens fini de places tq $\forall v \notin S$ c_v trivial.

Soit T_v tore fondamental de G_v $\forall v \in S$. Il est facile de construire un F-tore T de G tq $T_{/F_v}$ est $G(F_v)$- conjugué à T_v. On a $1 \to Z \to T \to T_{ad} \to 1$

$\Rightarrow$ $H^1(F, T) \to H^1(F, T_{ad}) \to H^2(F, Z) \to H^2(F, T)$. Comme

T_v est fondam $\Rightarrow$ $H^2(F_v, T_v) = 0$. L'image de c ds $H^2(F,T)$ est donc dans

$Ш^2(F, T) = 0$ (Kneser-Harder) $\Rightarrow$ c vient de $H^1(F, T_{ad})$, donc aussi de $H^1(F, G_{ad})$ ☒

Pour conclure, soit $x \in H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)/Z_G(\bar{F}))$. Son image ds $H^2(F, Z_G)$ vient d'un $y \in H^1(F, G_{ad})$ par le lemme. En tordant G par y OPS y triv $\Rightarrow$ x vient de $H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F))$ et donc aussi de $H^1(F,G)$ car G ss sc $\Rightarrow$ G satisfait Hasse et $H^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}_F)) \longleftarrow H^1(F,G)$ surj. ☒

<u>RK</u> les résultats classiques et fort délicats (certains d'entre eux) suivants ont été utilisés.

1) Kneser : F p-adique et G ss sc $\Rightarrow$ $H^1(F, G) = 1$

2) Kneser – Harder – Chernousov : F corps nombres et $G_{/F}$ ss sc

Alors $Ш(G) = 1$ et $H^1(F, G) \simeq \prod_{v|\infty} H^1(F_v, G)$. Si G/F juste réductif connexe on a $H^1(F, G) \twoheadrightarrow \prod_{v|\infty} H^1(F_v, G)$.

3) (Kneser-Harder) F corps nb, T F-tore tq $\exists$ place v où T est anisotrope

Alors $Ш^2(F, T) = 0$.

(4) Groupes unitaires, un résultat de Clozel

Référence : papier de Clozel à l'IHES sur les repr auto-duales.

Si F corps et E/F algèbre étale de dim 2 (donc $E \simeq F \times F$ ou E/F extension quadratique) et si D/E algèbre simple centrale de dim n^2 munie d'une involution de seconde espèce $*$, on a un groupe unitaire U sur F :

$$U(R) = \{ g \in D \otimes_F R \mid g g^* = 1 \} \quad \forall R \text{ } F\text{-alg comm.}$$

<u>Exercice</u> Si $D = M_n(E)$ munie de $* =$ adjoint pour une c-forme hermitienne $h : E^n \times E^n \to E$ (c-hermitienne veut dire $h(x,y) = c(h(y,x))$, $h(\alpha x, \beta y) = \alpha c(\beta) h(x,y)$ où $c \in \mathrm{Aut}_F(E)$ est l'unique autom. nontrivial), alors $U(F)$ est vraiment le groupe des autom. de E^n (E-linéaires) qui préservent h. De plus, si $E = F \times F$, alors $U \underset{F}{\simeq} GL_n$.

Supp E/F extension CM, U_0 le groupe unitaire quasi-déployé associé à E/F (on a $D = M_n(E)$ et $x^* = {}^t\overline{x}$, où $\overline{} =$ unique aut nontr de E/F, ce qui été aussi noté c). Soit $G = U_0^{ad}$, de telle sorte que $H^1(F, G)$ classifie les F-formes intérieures de G. Pour une place v de F et une forme intérieure locale de $(U_0)_v$, on veut calculer son invariant dans $A(G)$.

<u>Lemme 1</u> 1) Si n est impair, $A(G)$ et $A(G_v)$ sont triviaux $\forall v$

2) Si n est pair, on a $A(G) = \mu_2^D \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $A(G_v) = \begin{cases} \mu_2^D = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } v \text{ inerte} \\ \mu_n^D = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si } v \text{ déployée} \end{cases}$

<u>Dem</u> On a $\hat{G} = \widehat{PGL_n} = SL_n$ et $Z(\hat{G}) = \mu_n \hookrightarrow \hat{G}$.

L'action de Γ ($= \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ ou $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$) se factorise par $\mathrm{Gal}(E \otimes_F F_v / F_v)$ (resp $\mathrm{Gal}(E/F)$). Elle est triviale si v est déployée (car alors $U_v = GL_n$) sinon $c \in \mathrm{Gal}(E \otimes_F F_v / F_v)$ agit par $g \mapsto \Phi \cdot {}^t g^{-1} \cdot \Phi^{-1}$ où $\Phi = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ \cdot & & \end{pmatrix}$ (c'est l'unique autom. extérieur qui préserve l'épinglage standard).

Le résultat se déduit alors sans mal. ∎

$\boxed{\text{Dans la suite } n \text{ pair, sinon tout est trivial}}$

<u>Lemme 2</u> Soit D_v/F_v une algèbre à division de dim n^2. Le groupe attaché à D_v a pour invariant dans $A(G)$ le nombre $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Dem</u> L'invariant dans $A(G_v) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'invariant de Hasse-Brauer de D_v. Comme n est pair, son image dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nontriviale, c'est donc 1. ∎

Il reste à calculer les invariants des groupes réels $U(m+r, m-r)$ où $m = \frac{n}{2}$.

⑧ Un tel groupe est une forme intérieure de $U(m,m)$ (qui est le gr réel unitaire quasi-déployé), il correspond donc à un cocycle $c_r \in H^1(\mathbb{R}, \underset{U(m,m)}{\overset{\shortparallel}{G_\infty}})$

Ce cocycle envoie $c \in Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \setminus \{1\}$ sur $\begin{pmatrix} I_m & & \\ & -I_r & \\ & & I_{m-r} \end{pmatrix}$ (exercice immédiat)

donc $c_r \in H^1(\mathbb{R}, T)$, où $T = (S^1)^n / \cancel{\text{Sitre}}$ est un tore fondam. de G_∞

On a $A(T) = (\hat{T}^{\Gamma_\mathbb{R}})^D =$ dual de $\{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \mid \varepsilon_i^2 = 1, \prod \varepsilon_i = 1\}$. En suivant les définitions, l'image de $c_\mathbb{R}$ dans $A(T)$ est le caractère $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \mapsto \varepsilon_{m+1} \cdots \varepsilon_{m+r}$ et ensuite l'image dans $A(G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est $r \bmod 2$ (faire $\varepsilon_{m+1} = \cdots = \varepsilon_{m+r} \in \{\pm 1\}$). Donc

<u>Lemme</u> L'invariant de $U(m+r, m-r)$ est $r \bmod 2 \in A(G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Th</u> (Clozel) Supp pour simplifier que $[F:\mathbb{Q}]$ est pair. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut alors trouver un groupe unitaire U/F associé à une algèbre à division$/E$ munie d'une invol 2^{nde} espèce tq

1) U est $U(n-1,1)$ en une place infinie, $U(n)$ aux autres places infinies
2) U est quasi-déployé en toute place finie de F, sauf une place déployée v, où U_v est attaché à une alg à division.

De plus, on peut choisir les places spéciales comme on veut.

<u>Dem</u> Ça découle immédiatement des calculs précédents + thm de Kottwitz de la partie ③.

(9) ⑤ Stabilisation de la partie géométrique de la formule des traces pour nos groupes "simples"

Soit E/F extension CM et D/E algèbre à division de dim n^2, avec une involution de 2nde espèce $*$. Le groupe des similitudes unitaires est $G/\mathbb{Q}$

$$G(R) = \{ g \in D \otimes_{\mathbb{Q}} R \mid gg^* \in R^\times \}.$$

Rk 1) $\mathrm{Ker}(G \to \mathbb{G}_m) = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}$ (groupe unitaire sur F ass. à $(E/F, D, *)$).

2) G/A_G, G_{der} anisotropes sur $\mathbb{Q}$ ⇒ Cela simplifie beaucoup la formule des traces et assure que tout $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ est semisimple et elliptique.

3) G_{der} est simpl connexe ⇒ $\forall \gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$, G_γ (centralisateur de γ) est connexe.

Th (formule des traces) Soit f lisse sur $G(\mathbb{A})$, à support compact mod $A_G(\mathbb{R})^\circ$ et tq $f(zx) = \xi(z) f(x)$ $\forall z \in A_G(\mathbb{R})^\circ$. Alors

$$\sum_{\{\gamma \in G(\mathbb{Q})\}/\mathrm{conj}} \tau(G_\gamma)\, O_\gamma(f) = \sum_{\substack{\pi \text{ aut. de } G(\mathbb{A}) \\ \text{car central de } \pi|_{A_G(\mathbb{R})^\circ} = \xi^{-1}}} m(\pi)\, \mathrm{tr}(f|\pi)$$

Rk 1) la somme de gauche est prise selon les $G(\mathbb{Q})$-classes de conjugaison ds $G(\mathbb{Q})$

2) $O_\gamma(f) = \int_{\text{classe de conj de } \gamma} f$ (il faut choisir des mesures de Haar sur G, G_γ, compatibles avec le terme de droite)

3) $\tau(G_\gamma)$ est le nombre de Tamagawa de G_γ. Le plus simple serait de dire que c'est le volume de G_γ pour une mesure canonique. cf exposé Bourbaki de Clozel pour les détails. On donnera dans la suite une description cohomologique, qui repose sur un grand théorème de Kottwitz (dont l'exposé de Clozel fait l'objet).

But : écrire $\sum_\gamma \tau(G_\gamma)\, O_\gamma(f)$ en termes de classes de conjugaison stables.

Def 1) $\gamma_1, \gamma_2 \in G(\mathbb{Q})$ sont dits stablement conj. ($\gamma_1 \underset{st}{\sim} \gamma_2$) si ils sont conjugués dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$.

2) $\gamma_1, \gamma_2 \in G(\mathbb{A})$ — — — — — — — s'ils sont conj ds $G(\overline{\mathbb{A}})$.

⇔ $(\gamma_1)_v \underset{st}{\sim} (\gamma_2)_v$ $\forall v$.

(10) Noter que si $\gamma_1 \underset{st}{\sim} \gamma_2$ ($\gamma_i \in G(\mathbb{Q})$), alors G_{γ_1} et G_{γ_2} sont des formes intérieures une de l'autre.

<u>Grand thm (Kottwitz, Arnolds)</u> G_1, G_2 formes intérieures une de l'autre $\Rightarrow \tau(G_1) = \tau(G_2)$.

Donc $\tau(G_\gamma)$ ne dépend que de la classe de conj stable de γ.

~~Fixons $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ (...)~~ et.

En décomposant chaque classe de conj stables en classes de $G(\mathbb{Q})$-conj on obtient

$$\sum_{\{\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})\}/\text{conj}} \tau(G_{\gamma_0}) O_{\gamma_0}(f) = \sum_{\{\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})\}/\text{conj stable}} \tau(G_{\gamma_0}) \sum_{\left\{\substack{\gamma \in G(\mathbb{Q}) \\ \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0}\right\}/\text{conj}} O_\gamma(f)$$

Fixons $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ et notons que $O_\gamma(f)$ ne dépend que de la $G(\mathbb{A})$-classe de conj de γ. Du coup

$$\sum_{\{\gamma \in G(\mathbb{Q}),\, \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0\}/\text{conj}} O_\gamma(f) = \sum_{\{\gamma \in G(\mathbb{Q}),\, \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0\}/G(\mathbb{A})\text{-conj}} O_\gamma(f) \sum_{\left\{\substack{\gamma' \in G(\mathbb{Q}),\, \gamma' \underset{st}{\sim} \gamma_0 \\ \gamma' \text{ conj à } \gamma \text{ sous } G(\mathbb{A})}\right\}/\text{conj par } G(\mathbb{Q})} 1$$

<u>Lemme</u>
$$\left\{\substack{\gamma' \in G(\mathbb{Q}) \text{ tq } \gamma' \underset{st}{\sim} \gamma_0 \\ \text{et } \gamma' \text{ conj à } \gamma \text{ sous } G(\mathbb{A})}\right\}\Big/ G(\mathbb{Q})\text{-conj} \quad \underset{\text{bij}}{\longleftrightarrow} \quad \operatorname{Ker}(Ш(G_{\gamma_0}) \to Ш(G))$$

<u>Dm</u> Supp $\gamma' = g\gamma_0 g^{-1}$ $g \in G(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors $\forall \sigma \in \operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ on a $\gamma' = \sigma(\gamma') = \sigma(g)\gamma_0\sigma(g)^{-1} = g\gamma_0 g^{-1} \Rightarrow g^{-1}\sigma(g) = c_\sigma$ 1-cocycle à valeurs ds $G_{\gamma_0}(\bar{\mathbb{Q}}) \Rightarrow [c] \in H^1(\mathbb{Q}, G_{\gamma_0})$. Clairement $[c]$ est trivial dans $H^1(\mathbb{Q}, G)$.

Si $\gamma' \underset{G(\mathbb{A})}{\sim} \gamma$, alors clairement $[c]$ est loc. trivial $\Rightarrow [c] \in \operatorname{Ker}(Ш(G_{\gamma_0}) \to Ш(G))$.

Réciproquement, si c 1-cocycle qui représente un élément de I, on peut supposer $c_\sigma = g^{-1}\sigma(g)$ (c trivial ds $H^1(F,G)$) et on vérifie que $\gamma' := g\gamma_0 g^{-1}$ marche. ~~Le~~ reste est immédiat. ∎

On a donc

$$\sum_{\{\gamma \in G(\mathbb{Q}),\, \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0\}/\text{conj}} O_\gamma(f) = \left|\operatorname{Ker}(Ш(G_{\gamma_0}) \to Ш(G))\right| \cdot \sum_{\{\gamma \in G(\mathbb{Q}),\, \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0\}/G(\mathbb{A})\text{-conj}} O_\gamma(f)$$

<u>Th crucial</u> (Kottwitz) Si $\gamma \in G(\mathbb{A})$ est stablement conjugué à γ_0, alors γ est $G(\mathbb{A})$-conjugué à un élément de $G(\mathbb{Q})$.

Voir l'exposé d'Olivier pour la preuve. Cet énoncé est très particulier à notre groupe G.

 Ce thm crucial $\Rightarrow$

$$\sum_{\{\gamma\in G(\mathbb{Q}),\ \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0\}/G(\mathbb{A})\text{-conj}} O_\gamma(f) = \sum_{\left\{\substack{\gamma\in G(\mathbb{A})\\ \gamma \underset{st}{\sim}\gamma_0}\right\}/G(\mathbb{A})\text{-conj}} O_\gamma(f) = SO_{\gamma_0}(f)$$

<u>Conclusion</u> $$\sum_{\{\gamma_0\in G(\mathbb{Q})\}/\text{conj}} \tau(G_\gamma)\, O_\gamma(f) = \sum_{\{\gamma_0\in G(\mathbb{Q})\}/\underline{\underline{st}}\text{ conj}} \tau(G_{\gamma_0})\, |\operatorname{Ker}(Ш(G_{\gamma_0})\to Ш(G))|\, SO_{\gamma_0}(f)$$

6 Calcul de $\tau(G_{\gamma_0})\cdot|\operatorname{Ker}(Ш(G_{\gamma_0})\to Ш(G))|$

Si D est un groupe diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar F/F)$ on pose $Ш(D) = \operatorname{Ker}(H^1(F,D)\longrightarrow \bigoplus_v H^1(F_v,D))$ ($H^1(F,D)$ étant défini par exemple comme la cohom de $X^*(D)\ldots$)

<u>Th</u> (Kottwitz, Saussure) F corps nb, G_{der} simpl connexe, $D = G/G_{der}$ $\Rightarrow$

$$Ш(G) = Ш(D).$$

<u>Dem</u> 1) injectivité : par un argument de torsion il suffit de voir que $\operatorname{Ker}(Ш(G)\to Ш(D)) = 0$. Soit $x\in\operatorname{Ker}$. Contemplons

$$\begin{array}{ccccccc}
D(F) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(F,G_{der}) & \to & H^1(F,G) & \to & H^1(F,D)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
D(F_v) & \longrightarrow & H^1(F_v,G_{der}) & \to & H^1(F_v,G) & \to & H^1(F_v,D)
\end{array}$$

$x\in\operatorname{Ker}\Rightarrow x\in\operatorname{Ker}(H^1(F,G)\to H^1(F,D))\Rightarrow x$ vient d'un $y\in H^1(F,G_{der})$

x_v triv $\Rightarrow y_v\in\operatorname{Ker}(H^1(F_v,G_{der})\to H^1(F_v,G))\Rightarrow y_v$ vient de $D(F_v)$.

Thm approx réelle pour $D \Rightarrow \exists\, z\in D(F)$ tq z_v s'envoie sur y_v $\forall\, v|\infty$.

On conclut par le principe de Hasse.

2) surjectivité : $x\in Ш(D)$, T F-tore max qui est fondam en une place finie de F. ($\Rightarrow Ш^2(F,T_{der}) = 0$, voir partie 8 à la fin)

L'image de x dans $H^1(F,T)\to H^1(F,D)\to H^2(F,T_{der})$ est donc triviale (car elle $\in Ш^2(F,T_{der})$), donc x vient d'un $y\in H^1(F,T)$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(F,T_{der}) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(F,T) & \to & H^1(F,D) & \to & H^2(F,T_{der})\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
H^1(F_v,T_{der}) & \xrightarrow{\alpha_v} & H^1(F_v,T) & \to & H^1(F_v,D) & \to & H^2(F_v,T_{der})
\end{array}$$

On a $y_v\in\operatorname{Im}\alpha_v$ et en utilisant Kneser-Harder ($H^1(F,T_{der})\twoheadrightarrow \bigoplus_{v|\infty} H^1(F_v,T_{der})$) on peut se débrouiller pour trivialiser y_v $\forall\, v|\infty$

Soit z = im de y dans $H^1(F,G)$ via $H^1(F,T)\to H^1(F,G)$.

(12) Il suffit de voir que $z \in Ш(G)$. Par construction $z_v = 0 \ \forall v | \infty$.
Aux places finies, l'im de z_v ds $H^1(F_v, D)$ est triviale (car celle de x l'est). Or G_{der} ss simpl conn $\underset{\text{Kneser}}{\Rightarrow}$ $H^1(F_v, G_{der}) = 0 \Rightarrow$
$\mathrm{Ker}(H^1(F_v, G) \to H^1(F_v, D)) = 0 \Rightarrow$ conclusion. □

__Cor__ $\exists$ bijection normal-fonctorielle $Ш(G) \simeq Ш(Z(\hat{G}))^D$

__Dem__ 1) Si G_{der} simpl connexe on a vu que $Ш(G) = Ш(D)$. Mais si T tore, on déduit de Tate-Nakayama que $Ш(T)$ et $Ш(\hat{T})$ sont en dualité parfaite $\Rightarrow$ conclusion.

2) Il reste à vérifier que si ~~H~~ $1 \to Z \to H \to G \to 1$ est une Z-extension alors $Ш(Z(\hat{G})) = Ш(Z(\hat{H}))$, $Ш(G) = Ш(H)$. Cela vient des suites longues associées à $1 \to Z(\hat{G}) \to Z(\hat{H}) \to \hat{Z} \to 1$ ($\Rightarrow \pi_0(\hat{Z}^\Gamma) \to H^1(F, Z(\hat{G})) \to \dots$)

$1 \to Z \to H \to G \to 1$

en utilisant $\begin{cases} \pi_0(\hat{Z}^\Gamma) = 0 \text{ (+ version locale) et } Ш(\hat{Z}) = 0 \\ H^1(F, Z) = 0 \qquad\qquad Ш^2(Z) = 0 \end{cases}$

(toutes viennent du fait que Z est un tore induit). □

__Th__ (Kottwitz, admis) On a $\tau(G) = \dfrac{|A(G)^D|}{|Ш(G)|}$.
Sansuc

__RK__ cela $\Rightarrow \tau(G) = 1$ si G est ss, simpl connexe, une fameuse conjecture de Weil démontrée par Kottwitz. Mais on utilise cela ds la preuve du th. Cf papiers de Kottwitz ds Annals et Duke.

Revenons maintenant au calcul de

$$\tau(G_{\gamma_0}) |\mathrm{Ker}(Ш(G_{\gamma_0}) \to Ш(G))|$$

L'inclusion $Z(\hat{G}) \subset Z(\hat{I}_0)$ induit une suite exacte ($I_0 = G_{\gamma_0}$ pour simplifier)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Z(\hat{G})^\Gamma \arrow[r] & Z(\hat{I}_0)^\Gamma \arrow[r] & (Z(\hat{I}_0)/Z(\hat{G}))^\Gamma \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1(F, Z(\hat{G})) \\ & & & & \pi_0(\text{ça}) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

le fait que ça se factorise comme ça vient de la trivialité de la cohomologie de Γ dans Lie $Z(\hat{I}_0)/Z(\hat{G})$.

13 **Def** $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ = les $x \in \pi_0((Z(\hat{I}_0)/Z(\hat{G}))^\Gamma)$ tq $\alpha(x) \in Ш(Z(\hat{G}))$.

<u>Prop</u> (miracle!) (Kottwitz, Inventiones, première prop)

$\forall\, \gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ on a $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) = \{0\}$.

Ceci sera vu dans l'exposé d'Olivier et c'est le point qui fait que le th crucial de conjugaison stable est vrai.

La prop + suite exacte précédente $\Rightarrow Ш(Z(\hat{G})) \hookrightarrow Ш(Z(\hat{I}_0))$ $(**)$

Comme $Ш(I_0)$ est le dual de $Ш(Z(\hat{I}_0))$ et $Ш(G)$ est le dual de $Ш(Z(\hat{G}))$

$$\Rightarrow |\mathrm{Ker}(Ш(G_{\gamma_0}) \to Ш(G))| = |\mathrm{Coker}(Ш(Z(\hat{G})) \longrightarrow Ш(Z(\hat{I}_0)))| =$$

$$\underset{(**)}{=} \frac{|Ш(Z(\hat{I}_0))|}{|Ш(Z(\hat{G}))|} \underset{\text{thm admis}}{=} \frac{|A(G)^D|}{|A(I_0)^D|} \cdot \frac{\tau(G)}{\tau(G_{\gamma_0})}$$

Or $A(I_0)^D = \pi_0(Z(\hat{I}_0)^\Gamma)$, $A(G)^D = \pi_0(Z(\hat{G})^\Gamma)$. La trivialité de $\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) \Rightarrow A(G)^D \xrightarrow{\sim} A(G)^D$. Finalement :

<u>Prop</u> $\forall\, \gamma_0$ on a $\tau(G_{\gamma_0})\,|\mathrm{Ker}(Ш(G_{\gamma_0}) \to Ш(G))| = \tau(G)$.

<u>Conclusion</u> La partie géométrique de la formule des traces est

$$\tau(G) \cdot \sum_{\{\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})\}/\text{conj stable}} SO_{\gamma_0}(f),$$ où $SO_{\gamma_0}(f)$ est l'intégrale orbitale adélique stable de f.