(1)

la formule de Matsushima

(1) Cohomologie de la tour (Sh_{K_f})

(G, X) donnée de Shimura $\rightsquigarrow$ corps réflexe E, des $\mathbb{C}$-variétés ~~quasi-proj~~ lisses $Sh_{K_f}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)/K_f)$ pour $K_f \underset{co}{\leq} G(\mathbb{A}_f)$ assez petit et des E-variétés q-proj lisses Sh_{K_f} dont les $\mathbb{C}$-points sont $Sh_{K_f}(\mathbb{C})$.

$(Sh_{K_f})_{K_f} \circlearrowleft G(\mathbb{A}_f)$ par opérateurs de Hecke.

(ξ, V_ξ) rep dim finie de G, définie sur $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C} \Rightarrow$ des systèmes locaux $\mathcal{F}^{K_f}_{\xi,\mathbb{C}}$ sur $Sh_{K_f}(\mathbb{C})$ et des ~~sys~~ faisceaux l-adiques $\mathcal{F}^{K_f}_{\xi,l}$ lisses sur Sh_{K_f} (on voit ξ comme $\overline{\mathbb{Q}}_l$-rep via $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$). On peut cons

$$\begin{cases} H^*_B(Sh_\mathbb{C}, \mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}}) = \varinjlim_{K_f} H^*_B(Sh_{K_f}(\mathbb{C}), \mathcal{F}^{K_f}_{\xi,\mathbb{C}}) \\ H^*_{et}(Sh, \mathcal{F}_{\xi,l}) = \varinjlim_{K_f} H^*_{et}(Sh_{K_f} \times \overline{E}, \mathcal{F}^{K_f}_{\xi,l}) \end{cases}$$

En choisissant $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ on a un isom $H^*_B(Sh_\mathbb{C}, \mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}}) \simeq H^*_{et}(Sh, \mathcal{F}_{\xi,l})$
$\Rightarrow$ une action C^0 de $Gal(\overline{E}/E)$ sur $H^*_B(Sh_\mathbb{C}, \mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})$.

$H^*_B(Sh_\mathbb{C}, \mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})$ est une $G(\mathbb{A}_f)$-rep lisse adm car $H^*_B(Sh_{K_f}(\mathbb{C}), \mathcal{F}^{K_f}_{\xi,\mathbb{C}})$ dim $<\infty$ et il s'agit des K_f-invar de $H^*_B(Sh_\mathbb{C}, \mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}})$)

<u>But de l'exposé</u> : écrire $H^*_B(Sh_\mathbb{C}, \mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}}) \simeq \bigoplus_{\pi_f \otimes \pi_\infty} \pi_f \otimes R^*_{\mathbb{C},\xi}(\pi_\infty)$ comme $G(\mathbb{A}_f)$-rep et exprimer $R^*_{\mathbb{C},\xi}(\pi_\infty)$ en fonction de la cohom de Lie relative.

$\boxed{\text{on suppose toutes les var de } Sh \text{ propres}}$

(2) Cohomologie de de Rham de $\Gamma\backslash G/K$

- G gr Lie réel tq $|\pi_0(G)| < \infty$
- $K \leq G$ cp max, $X = G/K$ var Riemannienne difféom à un $\mathbb{R}^n$.
- $\Gamma \leq G$ discret tq $\Gamma \circlearrowright X$ librement $\Rightarrow \Gamma\backslash X$ variété lisse.

(Hyp) : $\Gamma\backslash G$ cp $\Leftarrow\Rightarrow$ $\Gamma\backslash X$ cp.

- ξ rep de G sur un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-ev dim $<\infty$ V_ξ. $\xi|_\Gamma$ définit un système local $\mathcal{F}_\xi$ sur $\Gamma\backslash X$ ("$\mathcal{F}_\xi = \Gamma\backslash(X \times V_\xi)$")
$\Gamma\backslash G$ (- - - - -)

Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}\, K$.

__Th 1__ 1) $\Omega^p(\Gamma\backslash G, \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Lambda^p\mathfrak{g}, C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\xi)$

2) $\Omega^p(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{l}), C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\xi)$

__Rk__ si ξ est juste une rep de Γ, il faut remplacer $C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\xi$ par $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G\xi)^{\mathrm{lisse}} = \{f\in C^\infty(G) \mid f(\gamma g) = \xi(\gamma)f(g)\} = \Gamma(\mathcal{F}_\xi)$ = sections C^∞ de $\mathcal{F}_\xi$

Bien sûr, si ξ rep de G, $\Gamma(\mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\xi$.

__Dm__ par déf $\Omega^p(\Gamma\backslash G, \mathcal{F}_\xi)$ = sections de $\Lambda^p T^*(\Gamma\backslash G)\otimes\mathcal{F}_\xi$

$= \Gamma(\mathcal{F}_\xi) \otimes_{\Omega^0(\Gamma\backslash G)} \Omega^p(\Gamma\backslash G)$. Mais $\Omega^p(G) \underset{T^*G \text{ trivial}}{\simeq} \mathrm{Hom}(\Lambda^p\mathfrak{g}, C^\infty(G))$

$\Rightarrow \Omega^p(\Gamma\backslash G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Lambda^p\mathfrak{g}, C^\infty(\Gamma\backslash G)) \xrightarrow{\sim} \Lambda^p\mathfrak{g}^*\otimes \underbrace{C^\infty(\Gamma\backslash G)}_{\Omega^0(\Gamma\backslash G)}$

$\Rightarrow \Omega^p(\Gamma\backslash G, \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{F}_\xi)\otimes\Lambda^p\mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}(\Lambda^p\mathfrak{g}, \Gamma(\mathcal{F}_\xi))$ Conclure par rk pour 1. Pour 2, écrire $\Gamma\backslash X = (\Gamma\backslash G)/K$ et utiliser 1). ∎

Th 1 motive la partie suivante

(3) Cohomologie de Lie relative & $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie

$G, K, \mathfrak{g}, \mathfrak{l}$ comme dans 2, on suppose G réductif $\Rightarrow$ $\mathfrak{l}$ réductif ds $\mathfrak{g}$

$\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ = catég des $U(\mathfrak{g})$-modules V qui sont $\to$ $U(\mathfrak{l})$-local-finis ie $\forall v\in V$ $\dim U(\mathfrak{l})v<\infty$; $U(\mathfrak{l})$-ss.

__exemple__ π un $(\mathfrak{g}, K)$-module $\Rightarrow \pi\in\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$

__Prop__ $\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ a assez de projectifs. En fait $\forall$ V $U(\mathfrak{l})$-loc finie et ss, $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{l})} V$ est projectif ds $\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$

__Dm__ $\mathrm{Hom}(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{l})} V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}}(V, W)$ exact car V $U(\mathfrak{l})$-ss.

Seul truc pas évident : $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{l})} V \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$, exercice (voir BW)

On peut donc calculer des $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}}(U, V)$ avec des résolutions projectives.

Une résolution proj classique de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est donnée par le cpl de Koszul relatif $X_n = U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{l})}\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{l}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}}(\mathbb{R}, V)$ = cohom du complexe $C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}}(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{l}), V)$ (avec les diff usuelles

$$d\omega(x_1,\dots,x_{q+1}) = \sum (-1)^i x_i\cdot\omega(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{q+1}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([x_i,x_j],\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{q+1})$$

On note $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V)$ = cohom de $C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}}(\mathbb{R}, V)$

__Rk__ notez que $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V)$ peut se définir en toute généralité comme cohom de $C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V)$ (sans utiliser G réductif, $\mathfrak{l}$ = Lie K, etc)..

③ On cons le sous-complexe $C^\cdot(\mathfrak g, K, V) = C^\cdot(\mathfrak g, \mathfrak l, V)^{K/K^0} =$
$= \mathrm{Hom}_{K^0}(\Lambda^\cdot(\mathfrak g/\mathfrak l), V)$ et on note $H^\cdot(\mathfrak g, K, V)$ sa cohom (la $(\mathfrak g, K)$-coh de V). On a $H^\cdot(\mathfrak g, K, V) = H^\cdot(\mathfrak g, \mathfrak l, V)^{K/K^0}$.

<u>Th 1</u> (Wigner) Supp $U, V \in \mathcal C_{\mathfrak g, \mathfrak l}$ ont des caractères infinitésimaux $\chi_U, \chi_V : Z(\mathfrak g) \to \mathbb C^\times$ distincts. Alors $\forall q \geq 0$ $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal C_{\mathfrak g, \mathfrak l}}(U, V) = 0$.

<u>Dem</u> $\exists z \in Z(\mathfrak g)$ tq $\chi_U(z) = 1$, $\chi_V(z) = 0$. Alors z agit par id sur $\mathrm{Ext}^q(U, V)$ via fonctorialité $\underset{x \mapsto zx}{U \to U}$ et par 0 via foncto ~~Ext^q(~~ $\underset{x \mapsto zx}{V \to V}$
Il suffit donc de mq $\forall z \in Z(\mathfrak g)$, z agit de la même manière sur $\mathrm{Ext}^q(U, V)$ via les 2 fonctorialités. Cela est clair pour $q = 0$ car $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak g}(U, V)$ on a $f(zx) = z f(x)$ et le cas général se déduit par dévissage + récurrence sur q, en utilisant que $\mathcal C_{\mathfrak g, \mathfrak l}$ a assez d'injectifs ∎

<u>Cor 1</u> Si $\dim U < \infty$ et $\chi_{U^*} \neq \chi_V \Rightarrow H^q(\mathfrak g, \mathfrak l, U \otimes V) = 0$ $\forall q$
<u>Dem</u> $H^q(\mathfrak g, \mathfrak l, U \otimes V) = H^q(\mathfrak g, \mathfrak l, \mathrm{Hom}(U^*, V)) = \mathrm{Ext}^q(U^*, V)$
Utiliser le th 1 pour conclure. ∎

<u>Cor 2</u> $\dim U < \infty$. Alors $\exists$ nb fini de rep unitaires irred π de G tq $H^q(\mathfrak g, \mathfrak l, \pi \otimes U) \neq 0$ pour au moins un q.
<u>Dem</u> utiliser cor 1 + thm de Harish-Chandra: $\exists$ nb fini de rep irr unitaires de car inf donné.

Sous des hyp plus fortes on peut faire beaucoup mieux. Supp donc G réductif, θ inv Cartan ass à $K \Rightarrow \mathfrak g = \mathfrak l \oplus \mathfrak p$ où $\mathfrak p = \mathfrak g^{\theta = -1}$
Supp (ξ, V_ξ) rep dim $< \infty$ continue de G et soit $\langle\, \rangle_\xi$ un prod scalaire ~~tq~~ $\mathfrak l$-invar et tq $\xi(X)$ auto-adj $\forall X \in \mathfrak p$. Soit B forme bil sym nondeg sur $\mathfrak g$, θ et G inv tq $B|_{\mathfrak l}$ déf neg et $B|_{\mathfrak p}$ déf pos (si G ss prendre la forme de Killing) le choix des bases orthon ⇝ élément de Casimir $C \in Z(\mathfrak g)$

Supp (π, V) un $(\mathfrak g, \mathfrak l)$-module <u>unitaire</u> (on a donc un $\langle\, \rangle$ sur V tq $\langle Xu, v\rangle + \langle u, Xv\rangle = 0$ $\forall X \in \mathfrak g$) $\Rightarrow$ un $(\mathfrak g, \mathfrak l)$-module $(\underset{\xi \otimes \pi}{V_\xi \otimes V})$ et un $\langle\, \rangle$ sur $V_\xi \otimes V$.
Si $\eta_1, \eta_2 \in C^p(\mathfrak g, \mathfrak l, V_\xi \otimes V)$ on peut écrire $\eta_1 = \sum_I f_I \omega^I$
$\eta_2 = \sum_I g_I \omega^I$

$(\omega^I)_{|I|=p}$ base de $\Lambda^p \mathfrak{p}^*$. Cela donne un prod scalaire

$$\langle\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\rangle = \sum_I \langle f_I, g_I \rangle$$

On vérifie que l'adjoint $\partial : C^{p+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V \otimes V_\xi) \to C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V \otimes V_\xi)$ de $d : C^p \to C^{p+1}$ pour $\langle\ \rangle$ a une forme explicite assez horrible.

Soit $\Delta = \partial d + d \partial$ le laplacien. Il induit $\Delta \in \mathrm{End}\, C^p \ \forall p$.

<u>Th</u> (Kuga) $(\Delta \eta)_I = (\xi(C) - \pi(C))\eta_I \quad \forall I, \forall \eta \in C^p$

Donc si $\xi(C), \pi(C)$ agissent par des scalaires $\lambda_\xi, \lambda_\pi \Rightarrow$ Δ agit par $\lambda_\xi - \lambda_\pi$ sur C^p. Noter que si η satisfait $d\eta = 0 \Rightarrow$

$\Delta \eta = d\partial \eta \Rightarrow$ si $\lambda_\xi \neq \lambda_\pi$ alors η cobord

$\Rightarrow$ <u>Cor 1</u> Si $\lambda_\xi \neq \lambda_\pi \Rightarrow H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V \otimes V_\xi) = 0 \ \forall p \geq 0$

<u>Cor 2</u> Si $\lambda_\xi = \lambda_\pi \Rightarrow H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V \otimes V_\xi) = C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{l}, V \otimes V_\xi) \ \forall p$

<u>Dem</u> ds ce cas $\Delta \eta = 0 \ \forall \eta \Rightarrow \langle\langle \Delta\eta, \eta \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \langle d\eta, d\eta \rangle + \underbrace{\langle \partial\eta, \partial\eta \rangle}_{=0}$

$\Rightarrow d\eta = 0 \ \forall \eta$ ∎

④ Cohom de $\Gamma \backslash X$

Parties 2+3 $\Rightarrow$ $H^*_B(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow[\text{Th de Rham}]{\sim} H^*_{dR}(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\xi)$

$\xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{g}, K, C^\infty(\Gamma \backslash G) \otimes \xi)$

Cons $L^2(\Gamma \backslash G) = \widehat{\bigoplus_\pi} m(\pi, \Gamma)\pi$ (Gelfand-Piatetski-Shapiro-Graev cf exposé d'Alexis)

Noter que $C^\infty(\Gamma \backslash G) \hookrightarrow L^2(\Gamma \backslash G)^{\text{lisse}}$

La réciproque est en fait vraie, mais pas évidente (idée : un $f \in L^2(\Gamma \backslash G)^{\text{lisse}}$ est dans assez d'espaces de Sobolev pour qu'elle soit lisse par le lemme de Sobolev). $\Rightarrow$

$$H^*_B(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} H^*\left(\mathfrak{g}, K, \left(\widehat{\bigoplus_\pi m(\pi, \Gamma)(\pi \otimes \xi)}\right)^{\text{lisse}}\right)$$

<u>Th</u> (Matsushima) $H^*_B(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\pi m(\pi, \Gamma) H^*(\mathfrak{g}, K, \pi \otimes \xi)$

Le point à montrer est qu'on peut décompléter.

Noter que $\{\pi \mid m(\pi, \Gamma) \neq 0\}$ est dénombrable. On est donc dans la situation suivante : $(\pi_j)_{j \geq 1}$ avec $\pi_j \in \widehat{G}$, on sait que

⑤ si on pose ~~Ǝ~~ $\pi = \widehat{\bigoplus_{j\geq 1}} \pi_j$ alors $H^*(\mathfrak{g}, K, \pi^{lisse})$ est de $\dim < \infty$ (c'est $H^*_B(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}_\xi)$!!!). On veut $H^*(\mathfrak{g}, K, \pi^{lisse}) = H^*(\mathfrak{g}, K, \bigoplus_j \pi_j^{lisse})$

$$\forall n \geq 1 \quad H^*(\mathfrak{g}, K, \pi^{lisse}) = H^*(\mathfrak{g}, K, \bigoplus_{j=1}^{n} \pi_j^{lisse} \oplus (\widehat{\bigoplus_{j>n}} \pi_j)^{lisse})$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{n} H^*(\mathfrak{g}, K, \pi_j^{lisse}) \oplus H^*(\mathfrak{g}, K, (\widehat{\bigoplus_{j>n}} \pi_j)^{lisse})$$

Or $\dim H^*(\mathfrak{g}, K, \pi^{lisse}) < \infty \Rightarrow \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $H^*(\mathfrak{g}, K, \pi_n^{lisse}) = 0$

On va mq $H^*(\mathfrak{g}, K, (\widehat{\bigoplus_{j>n_0}} \pi_j)^{lisse}) = 0$. ~~Soit~~ Soit $\tilde{\pi} = \widehat{\bigoplus_{j>n_0}} \pi_j$

On munit $C^*(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse}) \subset \Lambda^* \mathfrak{p}^* \otimes \tilde{\pi}^{lisse}$ de la top induite par $\Lambda^* \mathfrak{p}^* \otimes \tilde{\pi}^{lisse} = \bigoplus_{\text{finie}} \tilde{\pi}^{lisse}$. C'est un sous-esp fermé. Si $pr_n : \tilde{\pi}^{lisse} \to \bigoplus_{n\geq j>n_0} \pi_j^{lisse}$ est la proj évidente, elle induit

$C^*(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse}) \longrightarrow \bigoplus_{n\geq j>n_0} C^*(\mathfrak{g}, K, \pi_j^{lisse})$. Tout cocycle ds $C^*(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse})$ se trivialise ds $\bigoplus_{n_0<j\leq n_0} C^*(\mathfrak{g}, K, \pi_j^{lisse}) \Rightarrow$ un tel cocycle $\in$ adhérence de $d C^{*-1}(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse})$. Il suffit de mq $d C^{*-1}(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse})$ fermé ds $\operatorname{Ker} d \cap C^*(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse})$. Mais il est de codim finie, car $H^*(\mathfrak{g}, K, \tilde{\pi}^{lisse})$ de $\dim < \infty$. Tout est de Fréchet $\Rightarrow$ il est fermé $\Rightarrow$ conclusion. ∎

④ Retour aux variétés de Shimura

Soit (G, X) une donnée de Shimura et $h : \operatorname{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{R}}$ dans X

<u>Hyp</u> : le centralisateur K_∞ de h dans $G(\mathbb{R})$ est un cp max modulo le centre.

C'est le cas pour les variétés que l'on considère. En fait c'est une hyp assez faible.

Même si K_∞ n'est plus un cp max de $G(\mathbb{R})$, ce qu'on a fait avant marche pour des raisons assez évidentes. Notez que $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$

et $Sh_{K_f}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G(\mathbb{A}_f)/K_f) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K_f$

Si $G(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{n} G(\mathbb{Q}) g_i K_f$ et si $\Gamma_i = g_i^{-1} K_f g_i \cap G(\mathbb{Q}) \Rightarrow$

$$\coprod (\Gamma_i \backslash X) \xrightarrow{\sim} Sh_{K_f}(\mathbb{C})$$

$$\Gamma_i x \longmapsto G(\mathbb{Q})(x, g_i) K_f$$

⑥ Donc, si ξ rep $\overset{\text{irr}}{\vee}$ de G de dim $< \infty$, alors ξ induit des syst locaux $\mathcal{F}^{K_f}_{\xi, \mathbb{C}} = \mathcal{F}_\xi$ sur $Sh_{K_f}(\mathbb{C})$, qui sont compatibles avec $Sh_{K'_f} \to Sh_{K_f}$

(Hyp) Sh_{K_f} est propre, donc les $\Gamma_i \backslash G(\mathbb{R})$ sont cp et $\Gamma_i \backslash X$ aussi

c'est le cas pour nous

$$H^*_B(Sh_{K_f}(\mathbb{C}), \mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\sim} \bigoplus H^*_B(\Gamma_i \backslash X, \mathcal{F}_{\xi,i})$$

$$\underset{\text{partie 3)}}{\xrightarrow{\sim}} \bigoplus \Big(\bigoplus_{\pi \in \widehat{G(\mathbb{R})}} m(\pi, \Gamma_i)\, H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi \otimes \xi) \Big)$$

On peut aussi dire que $\bigoplus H^*_B(\Gamma_i \backslash X, \mathcal{F}_{\xi,i}) = \bigoplus H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, C^\infty(\Gamma_i \backslash G(\mathbb{R})) \otimes \xi)$

$= H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, C^\infty(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_f) \otimes \xi)$ et je vais plutôt utiliser ceci.

<u>Rappel</u> : $\cancel{L^2}\, G(\mathbb{Q}) Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})$ est de volume fini et par GPS

$$L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})) := L^2(G(\mathbb{Q}) Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})) = \widehat{\bigoplus_\pi} m(\pi)\, \pi \qquad \begin{array}{l} m(\pi) < \infty \\ \pi \text{ rep irr de } G(\mathbb{A}) \end{array}$$

Lemme Sobolev $\Rightarrow$ $C^\infty(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_f) =$ vecteurs K_f-invar lisses dans $L^2(G(\mathbb{Q}) Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}))$. Avec nos hyp $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$ cp mod centre donc pas de partie continue

$$L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})) = \widehat{\bigoplus_{\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty}} m(\pi_f \otimes \pi_\infty)\, \pi_f \otimes \pi_\infty$$

Même arg que ds Matsushima $\Rightarrow$

<u>Th</u>
$$H^*_B(Sh_{K_f}(\mathbb{C}), \mathcal{F}_\xi) \simeq \bigoplus_{\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty} m(\pi)\, \pi_f^{K_f} \otimes H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty)$$

De plus, cet isom est compat avec act de $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f) /\!/ K_f)$ donc

comme $G(\mathbb{A}_f)$-rep
$$H^*_B(Sh_{\mathbb{C}}, \mathcal{F}_\xi) = \varinjlim_{K_f} H^*_B(Sh_{K_f}(\mathbb{C}), \mathcal{F}_\xi) \simeq \bigoplus_\pi m(\pi)\, \pi_f \otimes H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty)$$

$$= \bigoplus_{\pi_f \text{ irr de } G(\mathbb{A}_f)} \pi_f \otimes R^*_{\mathbb{C},\xi}(\pi_f)$$

$$\dim R^*_{\mathbb{C},\xi}(\pi_f) = \sum_{\substack{\pi_\infty \\ \text{irr de } G(\mathbb{R})}} m(\pi_f \otimes \pi_\infty) \dim H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty)$$

<u>Cor</u> Fixons $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$, $\mathcal{L}_\xi$ analogue l-adique de $\mathcal{F}_{\xi,\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ comme $G(\mathbb{A}_f)$-rep

$$H^*_{et}(\cancel{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\substack{\pi_f \text{ irr de } G(\mathbb{A}_f) \\ \text{sur } \overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \pi_f \otimes R^*_\xi(\pi_f) \text{ avec } R^*_\xi(\pi_f) \in \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$$

et
$$\dim R^*_\xi(\pi_f) = \sum_{\substack{\pi_\infty \text{ irr de} \\ G(\mathbb{R})}} \underbrace{m(\pi_\infty \otimes \pi_f)}_{\text{multipl ds l'espace des formes aut sur } G(\mathbb{A})} \dim H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes \xi_{\mathbb{C}})$$

⑤ Final destination Soit (G, X) comme dans Harris-Taylor ou Scholze, de corps réflexe F, un corps CM. Le nb premier p est tq

$$G(\mathbb{Q}_p) = GL_n(K) \times H \times \mathbb{Q}_p^\times$$ où K est notre ext finie de $\mathbb{Q}_p$, H certain groupe...

Soit $l \neq p$, $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ et ξ $\overline{\mathbb{Q}}_l$-rep alg de G

$\Rightarrow$ $H^*(Sh, \mathcal{F}_\xi) = \varinjlim_{K_f} H^*_{et}(Sh_{K_f} \times \overline{F}, \mathcal{F}_\xi)$

$$[H_\xi] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [H^i(Sh, \mathcal{F}_\xi)] \in \mathrm{Groth}/\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \times G(\mathbb{A}_f)$$

Si π_f irred adm de $G(\mathbb{A}_f)$, soit $W^*_\xi(\pi_f) = \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, H^*(Sh, \mathcal{F}_\xi))$
rep l-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$

et $a(\pi_f) = \dim [W_\xi(\pi_f)]$. C'est un entier (pas évident!)

But du reste du GDT

Th (Scholze) π_f irr adm tq $W^*_\xi(\pi_f) \neq 0$, $\pi_p = \pi \otimes \sigma \otimes \pi_0$ où π rep de $GL_n(K)$, $\pi_0 \overset{}{\underset{CFT}{\longleftrightarrow}}$ car χ_{π_0} de W_F. Si $\tau \in W_F^+$, $\{ h \in C_c^\infty(GL_n(\mathcal{O}_F))$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tr}(f^\vee_{\tau,h} \mid \pi) = \frac{1}{a(\pi_f)} \mathrm{tr}(\tau \mid [W_\xi(\pi_f)] \otimes \chi_{\pi_0}) \, \mathrm{tr}(h^\vee \mid \pi)$$