Le centre de Bernstein II

G. Dospinescu

I Stabilisation, dualité et seconde adjonction

Rappelons que l'on veut démontrer :

Th (2^nde adjonction, Bernstein)

$\forall \pi \in \mathcal{M}(G)$, $\rho \in \mathcal{M}(M)$ $\quad \mathrm{Hom}_G(i_{P,G}(\rho), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_M(\rho, r_{\bar{P},G}(\pi))$

où $(P, \bar{P})$ est une paire de parab opposés, de facteur de Levi M.

J'ai expliqué dans le I^er exposé que cela découle du :

Th (dualité de Casselman généralisée)

$\forall \pi \in \mathcal{M}(M)$ $\quad \widetilde{r_{P,G}(\pi)} \xrightarrow{\sim} r_{\bar{P},G}(\tilde{\pi})$.

On va déduire ce thm du thm suivant, démontré ds le I^er exposé :

Th (stabilisation, Bernstein) Soit $K \underset{co}{\leq} G$ ayant une déc. d'Iwahori par rapport à $(P, \bar{P})$ et t strictement dominant par rapport à $(P, \bar{P}, K)$. $\exists\, c = c(G,K)$ tq $\forall \pi \in \mathcal{M}(G)$ $\quad \pi^K = \mathrm{Im}\, A^c \oplus \mathrm{Ker}\, A^c$, où $A = e_K * \delta_t * e_K \in \mathrm{End}\, \pi^K$.

Pendant la preuve de ce thm on a aussi vu les choses suivantes.

Soit $T : \pi \to \pi_N = \pi/\pi(N)$ la projection canonique. Alors

1) $\pi^K \cap \mathrm{Ker}\, T = \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Ker}\, A^n = \mathrm{Ker}\, A^c$ (la 2^ème égalité est formelle)

2) $T|_{\pi^K} : \pi^K \longrightarrow \pi_N^{K_M}$ est surjective, où $K_? = K \cap ?$.

Donc T induit un isom $\mathrm{Im}\, A^c \longrightarrow \pi_N^{K_M}$. Son inverse s'appelle le relèvement canonique. On va l'utiliser pour définir un accouplement parfait

$$\langle\ \rangle^K_{\mathrm{Cass}} \quad (\tilde{\pi}_{\bar{N}})^{K_M} \times \pi_N^{K_M} \longrightarrow \mathbb{C}$$

et on va montrer que $\langle\ \rangle^K_{\mathrm{Cass}}$ est compatible avec l'inclusion $K' \subset K$.

Donc il se prolonge en un acc. parfait entre $\tilde{\pi}_{\bar{N}}$ et π_N. On vérifiera enfin qu'il est M-équivariant, ce qui donne le thm de dualité.

Soient $\bar{v} \in \pi_N^{K_M}$, $\bar{\lambda} \in (\tilde{\pi}_{\bar{N}})^{K_M}$ et notons $\pi_*^K = \mathrm{Im}\, A^c$, $\pi_0^K = \mathrm{Ker}\, A^c$

Soient $(v, \lambda) \in \pi_*^K \times \tilde{\pi}_*^K$ les relevés canoniques de $\bar{v}$ et $\bar{\lambda}$ et posons

$$\langle \bar{\lambda}, \bar{v} \rangle_{\mathrm{Cass}} = \langle \lambda, v \rangle \quad (\text{dualité naturelle entre } \tilde{\pi} \text{ et } \pi)$$

Lemme 1 Si $\bar{C} \subseteq \bar{N}$ est un ouvert compact assez gros (dep de K) $\Rightarrow$ Im $A^c = \pi_*^K = e_K e_{\bar{C}} \pi$ $\forall$ $\pi \in \mathcal{M}(G)$.

Dem $A^n = e_K * \delta_{t^n} * e_K = e_K * e_{t^n K_{\bar{N}} t^{-n}} * \delta_{t^n} \Rightarrow A^c \pi = e_K * e_{t^c K_{\bar{N}} t^{-c}} \pi$ $\supset e_K e_{\bar{C}} \pi$ si $\bar{C} \supset t^c K_{\bar{N}} t^{-c}$. Mais $A^c \pi = A^n \pi \subset e_K e_{\bar{C}} \pi$ si n tq $\bar{C} \subset t^n K_{\bar{N}} t^{-n}$. ∎

Lemme 2 $\tilde{\pi}_*^K \perp \pi_0^K$ et $\tilde{\pi}_0^K \perp \pi_*^K$.

Dem $\lambda \in \tilde{\pi}_*^K$, $v \in \pi_0^K$, ~~$\bar{C}$ assez gros tq $e_{\bar{C}}$~~ $\lambda = A^c \lambda_1 \Rightarrow$

$$\langle \lambda, v \rangle = \langle e_K \delta_{t^c} e_K \lambda_1, v \rangle = \langle \lambda_1, \underbrace{e_K \delta_{t^{-c}} e_K v}_{=0 \text{ car si } t \text{ strict. dom par rapp à } (\bar{P}, P, K) \Rightarrow t^{-1} \text{ str. dom par rapp à } (P, \bar{P}, K)} \rangle = 0$$

Autrement par le lemme 1 (avec $\bar{N}$ au lieu de N) $\tilde{\pi}_*^K = e_K e_C \tilde{\pi}$ si $C \subset N$ assez gros or $\langle e_K e_C \lambda_1, v \rangle = \langle \lambda_1, e_C v \rangle = 0$ si C assez gros ($v \in \pi_0^K \Rightarrow \bar{v} = 0 \Rightarrow e_C v = 0$ si C gros)
L'autre est semblable. ∎

Lemme 3 Si $K' \subset K \Rightarrow \pi_*^K = e_K \pi_*^{K'}$

Dem claire par le lemme 1 et $e_K * e_{K'} = e_K$. ∎

Montrons maintenant.

. l'indep de $\langle\ \rangle_{can}^K$ par rapport à K : on peut supposer que $K' \subset K$ et $\bar{v}, \bar{\lambda} \in \pi_N^{K_M}, \tilde{\pi}_{\bar{N}}^{K_M}$, on veut $\langle \lambda, v \rangle = \langle \lambda', v' \rangle$, où λ, v relev can à π_*^K
λ', v' — — — à $\pi_*^{K'}$
lemme 3 $\Rightarrow \lambda = e_K \lambda'$. lemme 2 et $\overline{v - v'} = 0$ ($\Rightarrow v - v' \in \pi_0^{K'}$) $\Rightarrow \langle \lambda', v - v' \rangle = 0$

Donc $\langle \lambda, v \rangle = \langle e_K \lambda', v \rangle = \langle \lambda', v \rangle = \langle \lambda', v' \rangle$.

. acc parfait $(\tilde{\pi}_{\bar{N}})^{K_M} \times (\pi_N)^{K_M} \longrightarrow \mathbb{C}$: utiliser le fait que $(\tilde{\pi}_{\bar{N}})^{K_M} \xrightarrow{\sim} \tilde{\pi}_*^K$
$(\pi_N)^{K_M} \xrightarrow{\sim} \pi_*^K$
le fait que $\tilde{\pi}^K \times \pi^K \longrightarrow \mathbb{C}$ est parfait et le lemme 2.

. M-équivariant : comme $\langle m\lambda, mv \rangle = \langle \lambda, v \rangle$, il suffit (util indep par rapport à K) de mq si v relev can à π_*^K de $\bar{v} \in \pi_N^{K_M} \Rightarrow m \cdot v$ relev can à $\pi_*^{mKm^{-1}}$ de $\overline{mv}$. Il suffit de voir que $m \cdot \pi_*^K \subset \pi_*^{mKm^{-1}}$, immédiat par le lemme 1.

Le thm de dualité est enfin démontré !

II la catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$

Soit Ω une composante connexe de $\Omega(G)$ et (M,ρ) une donnée cuspidale tq $cl(M,\rho)\in\Omega$. Quitte à conjuguer, O.P.S M Levi standard. Soit P le parab standard de Levi M et soit $D=[\rho]=\{\rho\otimes\chi \mid \chi\in X(M)\}$. Si $W(D)$ est le stabilisateur de D dans $N_G(M)/M \Rightarrow \Omega \simeq D/W(D)$.

Rappelons que $\mathcal{M}(G)_\Omega=\{\pi\in\mathcal{M}(G) \mid$ tout sous-q irr de π est un sous-q irr d'un $i_{P,G}(\rho')$ avec $\rho'\in D\}$ et que $\mathcal{M}(G)=\prod_\Omega \mathcal{M}(G)_\Omega$ (thm de décomposition)

Soit $B=\mathbb{C}[\Lambda]$, où $\Lambda=M/M^0$. On a $B=\mathcal{O}(X(M))$ et on a un caractère nr universel $\chi_{nr}: G\longrightarrow B^\times$. Soit $\Pi_D=B\otimes_{\mathbb{C}}\rho$, un G-module pour $g\cdot(j\otimes v)$ $=\chi_{nr}(g)j\otimes\rho(g)v$. On a vu (exposé de Raphael) que Π_D est un progen de $\mathcal{M}(M)_D=\{\pi\in\mathcal{M}(M) \mid$ tout sous-q irr de $\pi\in D\}$, donc que

$$\mathcal{M}(M)_D \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_M(\Pi_D)\text{-mod à droite}$$

<u>Th</u> (Bernstein) $\Pi_\Omega=i_{P,G}(\Pi_D)$ est un progen de $\mathcal{M}(G)_\Omega$, donc (par un thm de Gabriel)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(G)_\Omega & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{End}_G(\Pi_\Omega)\text{-mod à droite} \\ \pi & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Pi_\Omega,\pi) \\ M\otimes_{\mathrm{End}(\Pi_\Omega)}\Pi_\Omega & \longleftarrow & M \end{array}$$

La dem est très longue.

1) Π_Ω projectif : $\mathrm{Hom}(\Pi_\Omega,-)\overset{2^{nd}\,adj}{=}\mathrm{Hom}(\Pi_D, r_{\bar{P},G}(-))$ exact car Π_D projectif et $r_{\bar{P},G}$ exact.

2) Π_Ω type fini. On va mq Π_Ω noeth, ie toute suite $\nearrow$ $V_1\subset V_2\subset\cdots\subset\Pi_\Omega$ de sous-G-rep est stationnaire.

<u>lemme</u> Π_D est noeth.

<u>Dem</u> Ds l'exposé de Raphael on a vu que $\mathrm{End}_M(\Pi_D)$ est de type fini sur B noeth, donc noeth. Donc $\mathcal{M}(M)_D$ est une categ noeth $\Rightarrow$ conclusion. ∎

Ce lemme + lemme robuste $\Rightarrow \forall\, Q$ par st $r_{Q,G}(\Pi_D)_{\underset{\downarrow\ \text{cuspidal}}{c}}$ est noeth car nul ou extension succ des $^{w}\Pi_D$.

Comme $\exists$ nb fini de par st et comme $\pi\longrightarrow r_{Q,G}(\pi)_c$ est exact (car $\pi\longrightarrow\pi_c$ et $r_{Q,G}$ le sont) $\Rightarrow \exists\, n_0$ tq $\forall\, n>n_0\ \forall\, Q$ par st $r_{Q,G}(V_{n+1}/V_n)_c=0$

L'argument usuel ⇒ $V_{n+1} = V_n \ \forall n > n_0$.

3) $\mathrm{Hom}_G(\Pi_\Omega, \pi) \neq 0 \ \forall \pi \in \mathcal{M}(G)_\Omega$. Comme Π_Ω projectif ⇒ CPS π irred. Soit $Q = LU$ un par standard tq $r_{\bar{Q},G}(\pi)$ soit cusp $\neq 0$. L'identité de $r_{\bar{Q},G}(\pi)$ induit (2nde adj) une surjection $i_{Q,G}\, r_{\bar{Q},G}(\pi) \twoheadrightarrow \pi$ ⇒ $\exists$ ρ_Q sous-q irred de $r_{\bar{Q},G}(\pi)$ tq $i_{Q,G}(\rho_Q) \twoheadrightarrow \pi$. Comme $\pi \in \mathcal{M}(G)_\Omega$ ⇒ $\exists\, g \in G$ tq $\begin{cases} L = gMg^{-1} \\ \rho_Q \simeq {}^g\rho \otimes \chi \text{ pour un } \chi \in X(L) \end{cases}$. Soit $D_Q = [\rho_Q]$ et w = classe de g $\in W_G$

Alors $wM = L$, $wD = D_Q$. Comme $\underset{\text{irred}}{\rho_Q} \in \mathcal{M}(M)_{D_Q}$ ⇒ $\exists\ \Pi_{D_Q} \twoheadrightarrow \rho_Q$ ⇒ $i_{Q,G}(\Pi_{D_Q}) \twoheadrightarrow \pi$. On finit si on peut dem le profond

Thm d'unicité (Bernstein) $\Pi_\Omega \simeq i_{Q,G}(\Pi_{D_Q})$

Dem En factorisant w en produit de transf élémentaires et en utilisant la transitivité de l'induction, CPS M maximal (ie P max propre) et alors $\{g \in G \mid gMg^{-1}$ [illegible]$\}/M$ a 2 élem. CPS w est l'élem nontriv de ce groupe et que $D_Q \neq D$ (sinon tout est clair).

Prop Sous ces hyp $\pi \xrightarrow{\sim} i_{P,G}(r_{P,G}(\pi)_D) \ \forall \pi \in \mathcal{M}(G)_\Omega$

Dem 1) je dis que $r_{P,G}(\pi)_D \neq 0 \ \forall \pi \neq 0$ ds $\mathcal{M}(G)_\Omega$. Par exactitude CPS π irred. Comme $\pi \in \mathcal{M}(G)_\Omega$ ⇒ $\exists\, \rho' \in D$ tq π sous-q de $i_{\bar{P},G}(\rho')$. On utilise ce thm profond suivant (admis), dû à Casselman : sous nos hyp $i_{P,G}(\rho')$ est irred $\forall \rho' \in D$. Donc $\pi \simeq i_{P,G}(\rho')$ ⇒ $r_{P,G}(\pi)_D \xrightarrow{\sim} \rho'$ (lemme robuste + M maximal + $D_Q \neq D$) ⇒ OK.

2) lemme robuste + M max + $D_Q \neq D$ ⇒ $r_{P,G}(i_{P,G}(\pi))_D \xrightarrow{\sim} \pi \ \forall \pi \in \mathcal{M}(M)_D$. La flèche $r_{P,G}(\pi) \to r_{P,G}(\pi)_D$ induit $\pi \xrightarrow{\alpha} i_{P,G}(r_{P,G}(\pi)_D)$ et on veut α isom. Par 1) il suffit de mq $r_{P,G}(\alpha)_D$ isom. Mais

$$\begin{tikzcd} r_{P,G}(\pi)_D \arrow[r, "r_{P,G}(\alpha)_D"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & r_{P,G}(i_{P,G}(r_{P,G}(\pi)_D))_D \arrow[r, "\sim"] & r_{P,G}(\pi)_D \end{tikzcd}$$

⇒ OK. ∎

Pour finir la preuve du thm d'unicité, il reste à voir que $r_{P,G}(i_{Q,G}(\Pi_{D_Q}))_D \xrightarrow{\sim} \Pi_D$. Utiliser de nouveau le lemme robuste + M max + $D_Q \neq D$ + $D_Q = wD$ (⇒ $\Pi_{D_Q} = {}^w\Pi_D$). ∎

III Le centre de Bernstein, enfin !

Soit $R_D = \mathrm{End}_M(\Pi_D)$ et $R_\Omega = \mathrm{End}_G \Pi_\Omega$. Le foncteur fidèle $i_{P,G}$ induit un mor inj d'algèbres $R_D \hookrightarrow R_\Omega$, faisant de R_Ω un R_D-bimodule. Le centre de $\mathcal{M}(G)_\Omega$ s'identifie au centre de R_Ω. Dans l'exposé de Raphaël on a vu que $Z(\mathcal{M}(M)_D) \simeq Z(R_D) \simeq \mathcal{O}(D)$. Rappelons que $W(D) =$ stabilisateur de D dans $N_G(M)/M$.

Thm (Bernstein) $Z(R_\Omega) \xrightarrow{\sim} Z(R_D)^{W(D)}$, donc $Z(R_\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\Omega)$

En particulier, le centre de $\mathcal{M}(G)$ s'identifie à $\mathcal{O}(\Omega(G))$.

La preuve se fera en plusieurs étapes.

1) Soit $z \in Z(R_\Omega)$. Il induit un endom z_Ω de $\Pi_\Omega = i_{P,G}(\Pi_D)$. Rappelons que $\Pi_D = B \otimes \rho$, où $[\rho] = D$ et $B = \mathcal{O}(X(M)) = \mathbb{C}[M/M^0]$

Comme z est dans le centre, on a $z_\Omega \in \mathrm{End}_{B[G]}(\Pi_\Omega)$.

Lemme $\mathrm{End}_{B[G]}(\Pi_\Omega) = B$

Dem Fixons K cp ouv et soit $z \in \mathrm{End}_{B[G]}(\Pi_\Omega)$, $z_K : \Pi_\Omega^K \to \Pi_\Omega^K$ l'end induit. Notons que $\Pi_\Omega^K = i_{P,G}(\Pi_D)^K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{g \in P\backslash G/K} \Pi_D^{K_M^g}$ $\quad K_M^g =$ image de $P \cap gKg^{-1}$ sur $M \simeq P/N$ est un B-module libre de type fini (car les $\Pi_D^{K_M^g} \simeq B \otimes \rho^{K_M^g}$ le sont)

Donc z_K est donné par une $A_K \in M_?(B)$. Si $x \in X(M)$, $sp_x(z_K)$ est un endom de $sp_x(\Pi_\Omega^K) = sp_x(\Pi_\Omega)^K = i_{P,G}(\rho \otimes x)^K$, de matrice $sp_x(A_K)$. Mais $\exists\, U \subset B$ car dense tq $\forall\, m_x \in U$, $i_{P,G}(\rho \otimes x)$ irréd $\Rightarrow$ $sp_x(z_K)$ scalaire $\Rightarrow sp_x(A_K)$ scalaire. On en déduit que A_K est scalaire $\Rightarrow z$ agit sur Π_Ω^K par un scalaire et cela $\forall K$ $\Rightarrow$ conclusion. ⊠

Donc notre $z \in Z(R_\Omega)$ définit une fct alg sur $X(M)$. ~~Il défi~~

Il agit sur $i_{P,G}(\rho \otimes x)$ par $z(x)$ $\forall\, x \in X(M)$. Comme $\rho \otimes x \simeq \rho \Rightarrow i_{P,G}(\rho \otimes x) \simeq i_{P,G}(\rho)$, on a $z(x) = z(1)$ $\forall\, \rho \otimes x \simeq \rho$ $\Rightarrow$ z définit une fct régulière sur D, donc $z \in Z(R_D)$. Pareil, si $w \in W(D)$, alors $z(\rho) = z({}^w\rho)$ $\forall\, \rho \in D$ car $i_{P,G}(\rho)$ et $i_{P,G}({}^w\rho) = i_{wP,G}(\rho)$ ont les mêmes sous-q irréd. Donc

$z \in Z(R_D)^{W(D)}$, ie z définit une fct régulière sur Ω : $\forall\, d(M,\rho) \in \Omega$ $z(d(M,\rho))$ = scalaire par lequel z agit sur $i_{P,G}(\rho)$. Il s'agit de dem l'inclusion inverse.

2) $R_\Omega = \operatorname{End}_G i_{P,G}(\Pi_D) \overset{2^{nd}\text{ adj}}{=} \operatorname{Hom}_M(\Pi_D, r_{\bar{P},G}\, i_{P,G}(\Pi_D)) =$

$= \operatorname{Hom}_M(\Pi_D, (r_{\bar{P},G}\, i_{P,G}(\Pi_D))_D)$. Lemme robuste $\Rightarrow (r_{\bar{P},G}\, i_{P,G}(\Pi_D))_D$ se filtre avec des quotients $\simeq$ ~~[illegible]~~ ${}^{w}\Pi_D$ $(w \in W(D))$ $\underset{\text{projectifs}}{\Longrightarrow}$

R_Ω se filtre avec des quot $\simeq \operatorname{Hom}_M(\Pi_D, {}^{w}\Pi_D) = \mathcal{M}_w$. De plus $\mathcal{M}_w$ est un R_D-bimodule : $z\cdot\phi = (wz)\circ\phi$

$\phi\cdot z = \phi\circ z$

$$\begin{tikzcd} \Pi_D \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "z\cdot\phi"'] & w\Pi_D \arrow[r, "wz"] & w\Pi_D \end{tikzcd}$$

et $\{z \in R_D \mid z\cdot\phi = \phi\cdot z \ \forall\, \phi \in \mathcal{M}_w\} = Z(R_D)^{w=1}$.

Donc $Z(R_D)^{W(D)} = \mathcal{O}(\Omega) = \{z \in R_D \mid z\,\phi = \phi\cdot z \ \forall\, \phi \in \mathcal{M}_w, \forall w\}$.

Noter que $\operatorname{Hom}_{R_D\text{-bimod}}(\mathcal{M}_w, \mathcal{M}_{w'}) = 0$ si $w \neq w'$. Le résultat découle du :

<u>Lemme</u> M A-bimodule unitaire avec une filtr par des A-bimod

$0 = M_n \subset \cdots \subset M_0 = M$ tq $\forall\, i \neq j$ $\operatorname{Hom}(M_i/M_{i+1}, M_j/M_{j+1}) = 0$

Si $z \in A$ commute aux $M_i/M_{i+1} \Rightarrow z$ commute à M.

<u>Dem</u> dévissage $\Rightarrow$ on est dans la situation $0 \to N_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{pr} N_2 \to 0$

avec $\operatorname{Hom}(N_2, N_1) = 0$, z commute à N_1 et N_2. On veut : z commute à M

Car $\forall\, m \in M$ $zm - mz \in N_1$ et donc $\begin{array}{ccc} N_2 & \longrightarrow & N_1 \\ \bar{m} & \longrightarrow & zm - mz \end{array}$ est dans $\underset{=0}{\operatorname{Hom}(N_2, N_1)}$

$\Rightarrow$ OK. ∎

IV Centre de Bernstein et distributions

Par distribution on entend forme linéaire sur $C_c^\infty(G)$. Rappelons que

$\mathcal{H}(G) = \{ \text{distr } T \text{ à supp cp et local cst} \} \xrightarrow[\text{choix de } dg]{\sim} C_c^\infty(G)$.

Si $f \in C_c^\infty(G)$ et T est une distribution, on pose

$$(T * f)(x) = T(t \to f(t^{-1}x)) = \int f(t^{-1}x)\, dT(t) \qquad \text{Alors } T*f,\ f*T$$

$$\{ (f * T)(x) = T(t \to f(x t^{-1})) = \int f(x t^{-1})\, dT(t)$$

sont local cst sur G, pas forcément à support compact (c'est quand même vrai si $T \in \mathcal{H}(G)$). Soit

$$\mathcal{H}(G)^\wedge = \{ \text{distr } T \mid T * f \in C_c^\infty(G)\ \forall f \in C_c^\infty(G) \}$$

Il suffit de vérifier que $T * e_K \in C_c^\infty(G)$ pour une base de vois de $\{1\}$ formée de sous-gr ouv cp (car si $f \in C_c^\infty(G)$, $\exists$ K tq $f = f * e_K = e_K * f$ et $T * f = (T * e_K) * f$).

Si $\pi \in \mathcal{M}(G)$ et $T \in \mathcal{H}(G)^\wedge$, T agit sur π : si $v \in \pi^K$, on pose $T.v = (T * e_K)v$. Cela ne dépend pas du choix de K (écrire $e_K = \frac{1}{mes(K)} \sum_{\bar{g} \in L \backslash K} 1_L * \delta_g$ si $L \leq K$).

Rk On fait de $\mathcal{H}(G)^\wedge$ une algèbre en posant $(T_1 * T_2)(f) = T_1(x \to T_2(y \to f(xy)))$ ie $(T_1 * T_2)(f) = \iint f(xy)\, dT_1(x)\, dT_2(y)$

$\mathcal{H}(G)^\wedge$ a pour unité δ_1 ($1 = 1_G$) et $\mathcal{H}(G)$ est un idéal à gauche de $\mathcal{H}(G)^\wedge$.

D'ailleurs, on vérifie facilement que $\mathcal{H}(G)^\wedge = \varprojlim_K \mathcal{H}(G) e_K$, les flèches $\mathcal{H}(G) e_{K'} \longrightarrow \mathcal{H}(G) e_K$ étant $x \to x e_K$ pour $K' \subset K$.

Se donner un $\pi \in \mathcal{M}(G) \Leftrightarrow$ se donner un $\mathcal{H}(G)^\wedge$-module non deg

Thm le centre de $\mathcal{M}(G)$ s'identifie au centre de $\mathcal{H}(G)^\wedge$, qui s'identifie à l'algèbre des distributions G-invariantes T tq $T * e_K \in C_c^\infty(G)$ $\forall$ K ouv cp de G

la preuve est formelle, cf livre de Renard.