Le centre de Bernstein - les préliminaires

Gabriel Dospinescu

Dans la suite F est p-adique, $\underline{G}/_F$ est réductif connexe et $G=\underline{G}(F)$. On fixe $P_0=M_0N_0$ un parabolique minimal de G, donc $M_0=Z_G(A_0)$ avec A_0 un tore max. déployé de G. Soit $W_G=N_G(A_0)/M_0$, donc (Bruhat) $G=\bigsqcup_{w\in W_G} P_0 w P_0$.

Soit M un levi standard de G et $P=MN$ un parab standard de facteur de levi M. Si $w\in W_G$ on pose $wM=gMg^{-1}$ si $w=\bar{g}$

① Le lemme géométrique

Si L, M sont des levi standard, soit

$$W(L,M)=\{w\in W_G \mid w\cdot L=M\}$$
$$W^{L,M}=\{w\in W_G \mid w(L\cap P_0)\subset P_0 \text{ et } w^{-1}(M\cap P_0)\subset P_0\}$$

Si $P=MN$, $Q=LU$ sont des parab standard, soit $W^{Q,P}$ un système de repr. dans G des élém de $W^{L,M}$.

Proposition 1) $W^{L,M}$ est un système de rep. de $W_M\backslash W_G/W_L$, qui est en bijection avec les orbites de Q dans $P\backslash G$.

2) $\forall w\in W^{L,M}$ $M\cap w\cdot Q$ est un parab standard de M et $M\cap wQ=\underbrace{(M\cap wL)}_{\text{levi}}\cdot\underbrace{(M\cap wU)}_{R_u}$ et $w^{-1}P\cap L$ est un par st. de L, avec $w^{-1}P\cap L=\underbrace{(w^{-1}M\cap L)}_{\text{levi}}\cdot\underbrace{(w^{-1}N\cap L)}_{R_u}$.

Th (lemme géométrique de Bernstein-Zelevinsky)

$P=MN$, $Q=LU$ par. standard de G et $\pi\in R(M)$ une M-rep lisse. Alors $r_{Q,G}(i_{P,G}(\pi))$ se filtre avec des quotients successifs $\simeq$, $i_{L\cap w^{-1}P,L}\circ w\circ r_{wQ\cap M,M}(\pi)$, avec $w\in W^{Q,P}$

② Un lemme robuste

lemme $P=MN$, $Q=LU$ comme avant et $\rho\in R(M)$ supercuspidale, $\pi=r_{Q,G}\circ i_{P,G}(\rho)$.

a) Si M n'est pas conjugué à L dans G $\Rightarrow$ π n'a pas de sous quot scusp

b) Si M, L sont G-conjugués $\Rightarrow \pi$ se filtre avec des quot successifs $\simeq$ ${}^w\rho$, avec $w \in W^{L,M} \cap W(L,M)$.

Dem conséquence directe du lemme géométrique et du fait général suivant : G réductif, P parab propre de G et $\rho \in R(M) \Rightarrow i_{P,G}(\rho)$ n'a pas de facteur JH scusp. En effet, si σ est un facteur JH scusp alors σ est une sous-rep de $i_{P,G}(\rho)$ (propriété standard des scusp) $\Rightarrow$ $0 = \mathrm{Hom}(\underbrace{r_{P,G}(\sigma)}_{0}, \rho) = \mathrm{Hom}(\sigma, i_{P,G}(\rho)) \neq 0$, contradiction ☒

③ Données cuspidales

Def Une donnée cuspidale = paire (M, ρ), avec M sous-gr de levi de G et ρ irred. scusp de M. 2 données $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2)$ sont associées si $\exists\, g \in G$ tq $M_2 = g M_1 g^{-1}$ et $\rho_2 \simeq {}^g\rho_1$.

Prop Soient $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2)$ des données cuspidales et P_1, P_2 des parab ayant M_1, M_2 comme facteurs de levi. Alors

$$(M_1, \rho_1) \text{ associée à } (M_2, \rho_2) \Leftrightarrow JH(i_{P_1,G}(\rho_1)) \cap JH(i_{P_2,G}(\rho_2)) \neq \emptyset$$

Dem $\Rightarrow$ Il suffit de voir que $\mathrm{Hom}(i_{P_1,G}(\rho_1), i_{P_2,G}(\rho_2)) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(r_{P_2,G}(i_{P_1,G}(\rho_1)), \rho_2) \neq 0$. Mais le lemme robuste $\Rightarrow \rho_2$ $\in JH(r_{P_2,G}(i_{P_1,G}(\rho_1)))$, donc c'est un quot aussi car ρ_2 scusp

$\Leftarrow$ Soit $\pi \in JH(i_{P_1,G}(\rho_1))$ et $Q = LU$ parab min tq $r_{Q,G}(\pi)$ soit ~~scusp~~ $\neq 0$ $\Rightarrow r_{Q,G}(\pi)$ est scusp et sous-quot de $r_{Q,G} \circ i_{P_1,G}(\rho_1)$

Il suffit de voir que si $r_{Q,G} \circ i_{P_1,G}(\rho_1)$, $r_{Q,G} \circ i_{P_2,G}(\rho_2)$ ont un sous-quot scusp commun $\Rightarrow (M_1, \rho_1)$ ass à (M_2, ρ_2). Cela découle du lemme robuste !

Th admis (Casselman, Bernstein-Zelevinsky)

M levi de G, P_1, P_2 parab ayant M pour facteur de levi, $\rho \in$ scusp(M). Alors $i_{P_1,G}(\rho)$ et $i_{P_2,G}(\rho)$ ont les mêmes facteurs de JH.

RK on l'admet, la preuve est pénible. Ce th + prop $\Rightarrow (M_1, \rho_1)$ ass à (M_2, ρ_2) ssi $i_{P_1,G}(\rho_1)$ et $i_{P_2,G}(\rho_2)$ ont les mêmes facteurs JH.

Thm (Bernstein)

$\pi \in \mathrm{Irr}(G) \Rightarrow \exists !$ donnée cusp (M, ρ) à association près tq $\pi \hookrightarrow i_{P,G}(\rho)$ pour un/tout P parab de facteur de Levi M.

Dm 1) existence : soit P un parab min tq $r_{P,G}(\pi) \neq 0 \Rightarrow r_{P,G}(\pi)$ scusp. Soit M = facteur de Levi de P.

lemme $r_{P,G}$ préserve la notion "de type fini".

Dm supp π de type fini, eng (sous G) par $v_1, \ldots, v_n$. Soit K tq $v_i \in \pi^K$ $\forall i$. Si $g_1, \ldots, g_s$ syst. de rep pour $P \backslash G / K \Rightarrow$ comme P-rep π est eng par les $g_i \cdot v_j$ et donc leurs images ds π_N engendrent π_N comme M-module ☒

Donc $r_{P,G}(\pi)$ scusp de type fini $\Rightarrow$ ça a un quot simple ρ, qui est scusp irr. Comme $r_{P,G}(\pi) \twoheadrightarrow \rho \Rightarrow \pi \hookrightarrow i_{P,G}(\rho)$.

2) unicité à assoc près : vient de la prop vue dans ③.

Enfin, le fait que "tout ne dépend pas de P, mais seulement de M" vient du th de Casselman + BZ. ☒

④ Support cuspidal et variété de Bernstein

Soit $\Omega(G) = \{$données cusp$\}/$assoc et $Sc : \mathrm{Irr}(G) \to \Omega(G)$ la flèche donnée par le th de Bernstein : on a $Sc(\pi) = cl(M, \rho)$ ssi $\pi \hookrightarrow i_{P,G}(\rho)$ ssi $r_{P,G}(\pi) \twoheadrightarrow \rho$ ssi $\rho \in JH(r_{P,G}(\pi))$ pour un/tout P parab de facteur de Levi M.

Def $(M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2)$ ont le même support d'inertie si $\exists\, g \in G$ et $\chi \in \mathcal{X}(M_2)$ tq $g M_1 g^{-1} = M_2$ et $\rho_2 \simeq {}^g\rho_1 \otimes \chi$.

Soit $\mathcal{B}(G) = \{$données cusp$\}/$supp d'inertie et $\Omega(G) \xrightarrow{pr} \mathcal{B}(G)$ la flèche évidente. Si s = classe$(M, \rho) \in \mathcal{B}(G) \Rightarrow$

$$pr^{-1}(s) = \{(M, \rho') \mid \rho' \in [\rho]\}/\text{ass} \xrightarrow{\sim} [\rho]/W([\rho])$$

où $[\rho]$ = classe d'inertie de ρ et $W([\rho])$ stab. de $[\rho]$ dans $W(M)$.

Donc $pr^{-1}(s)$ est le quotient d'un tore complexe par un gr fini $\Rightarrow$ une $\mathbb{C}$-var alg connexe.

Prop $\Omega(G)$ a une structure de $\mathbb{C}$-variété alg dont les composantes connexes sont les fibres de pr.

Dm Klar!

(5) La décomposition de Bernstein

Si Ω est une comp connexe de $\Omega(G)$, on note $\mathrm{Irr}_\Omega = Sc^{-1}(\Omega)$ et $R(G)_\Omega$ = sous-cat. pleine des $\pi \in R(G)$ tq $JH(\pi) \subset \mathrm{Irr}_\Omega$.

Si $\pi \in R(G)$, on note $\pi(\Omega)$ = sous-rep max de π qui est dans $R(G)_\Omega$

Thm de décomposition de Bernstein

$$\forall \pi \in R(G) \text{ on a } \pi = \bigoplus_{\Omega} \pi(\Omega) \text{ et donc } R(G) = \prod_{\Omega} R(G)_\Omega .$$

Dem Il suffit de vérifier l'assertion portant sur π. Un argument formel montre que si π est scindée (ie satisfait l'énoncé), alors toute sous-rep de π l'est aussi.

Etape 1 $\forall \pi \in R(G)$ on a une injection $\pi \hookrightarrow \bigoplus_{P \text{ par standard de } G} i_{P,G}(r_{P,G}(\pi)_c)$ où ρ_c = partie cuspidale de $\rho \in R(G)$

Dm La flèche vient de $r_{P,G}(\pi) \longrightarrow r_{P,G}(\pi)_c$ $\forall$ P par standard (noter qu'$\exists$ nb fini de tels P). Si ρ est son noyau, un argument formel mq $i_{P,G}(r_{P,G}(\rho)_c) = 0$ $\forall$ P par standard, donc $r_{P,G}(\rho)_c = 0$ $\forall$ P. Mais l'argument usuel montre que si $\rho \neq 0 \Rightarrow \exists P$ tq $r_{P,G}(\rho) \neq 0$ et cuspidale $\Rightarrow r_{P,G}(\rho)_c = r_{P,G}(\rho) \neq 0$, contradiction. Donc $\rho = 0$ ∎

Il suffit donc de voir que $i_{P,G}(\rho)$ est scindée $\forall$ $P = MN$ et ρ cusp de M

Etape 2 Il suffit de voir que $i_{P,G}(\Psi)$ est scindée $\forall \Psi \in R(M)_D$ où D est la classe d'inertie d'une cusp irred de M. En effet écrivons notre $\rho = \bigoplus_D \rho_D$ avec $\rho_D \in R(M)_D$. Il est facile de voir que $i_{P,G}(\rho) = \bigoplus_D i_{P,G}(\rho_D)$ $\Rightarrow$ il suffit de voir que $i_{P,G}(\rho_D)$ scindée $\forall$ D.

Etape 3 Soit $\pi \in R(M)_D$ et Ω ~~comp connexe $\supset$ classe (M,ρ), avec $\rho \in D$.~~

Soit $\sigma \in JH($~~$i_{P,G}(\pi))$ et Q parab tq $r_{Q,G}(\sigma)$ cusp $\neq$~~

Étape 3 Si $\pi \in R(M)_D$ et Ω est la composante connexe contenant la classe de (M, ρ) (avec $\rho \in D$), on va montrer que $i_{P,G}(\pi) \in R(G)_\Omega$.

Soit $\sigma \in JH(i_{P,G}(\pi))$, on veut $Sc(\sigma) \in \Omega$. Mais $r_{P,G}(\sigma)$ est un sous-quot de $r_{P,G}(i_{P,G}(\pi))$, qui se filtre avec des quotients $\simeq$ ${}^w\pi$ $(w \in W(M))$ $\Rightarrow$ les facteurs JH de $r_{P,G}(\sigma)$ sont parmi ceux de ${}^w\pi$ et sont donc dans des classes d'inertie conjuguées à D.

En tout, ~~les facteurs JH de $r_{P,G}(\sigma)$~~ $Sc(\sigma) \in \Omega$ $\blacksquare$

RK La preuve mq

$$\mathcal{R}(G)_\Omega = \{ \pi \in R(G) \mid \pi \hookrightarrow \bigoplus_{\rho \in R(M)_D} i_{P,G}(\rho) \}$$

$$= \{ \pi \in \mathcal{R}(G) \mid r_{P,G}(\pi) \in \sum_{D' \text{conj à } D} \mathcal{R}(M)_{D'} \}$$

où Ω = comp connexe $\ni$ classe de (M, ρ), $D = [\rho]$.

Le théorème de stabilisation, applications

Déf 1) Soit $(P, \bar{P})$ une paire de parab standard et $K \underset{co}{\leq} G$. On dit que K a une décomp d'Iwahori selon $(P, \bar{P})$ si $K = K_{\bar{N}} K_M K_N$ où $P = MN$, $\bar{P} = M\bar{N}$, $K_? = K \cap ?$

2) Un élément $t \in M$ est strictement dominant pour $(P, \bar{P}, K)$ (comme dans 1) si $t^{-1} K_{\bar{N}} t \subset K_{\bar{N}}$, $t K_M t^{-1} = K_M$, $t K_N t^{-1} \subset K_N$ et $P = \{x \in G \mid (t^i x t^{-i})_i \text{ bornée}\}$, $\bar{P} = \{x \in G \mid (t^{-i} x t^{i})_i \text{ bornée}\}$

Th (Bruhat) $\forall (P, \bar{P})$ paire de parab standard $\exists$ des $K \to 1$ ayant une déc d'Iwahori, ainsi que des élem str. dominants t ~~dans~~ pour $(P, \bar{P}, K)$. Alors $\begin{cases} t^i K_N t^{-i} \text{ suite } \downarrow \text{ et } \to \{1\} \\ t^{-i} K_{\bar{N}} t^i \quad \text{------} \to \{1\}. \end{cases}$

Dans la suite on fixe $t, P, \bar{P}, K$ comme dans le Th et on note $A = h(t) = e_K * \delta_t * e_K$, que l'on voit comme endom de π^K, où $\pi \in R(G)$ est fixée.

Rk supp t' strict. dominant pour $(P, \bar{P}, K) \Rightarrow h(t) h(t') = h(tt')$

$$(KtK)(Kt'K) = KtKt'K = KtK_N K_M K_{\bar{N}} t' K = K(tK_N t^{-1})(tK_M t^{-1}) tt' (t'^{-1} K_{\bar{N}} t') K \subset K K_N K_M tt' K_{\bar{N}} K \subset Ktt'K$$ et clairement $KtKt'K \supset Ktt'K$.

Lemme : $\forall n \geq 0$ $\quad A^n = e_K * t^n * e_K = t^n e_{t^{-n} K_N t^n} e_K = e_K e_{t^n K_{\bar{N}} t^{-n}} t^n$

Dém $1^{ère}$ égalité par rq. Pour $2^{ème}$

$$e_K t^n e_K = e_{K_N} e_{K_M} e_{K_{\bar{N}}} t^n e_K = e_{K_N} e_{K_M} t^n \underbrace{e_{t^{-n} K_{\bar{N}} t^n} e_K}_{e_K \text{ car } t^{-n} K_{\bar{N}} t^n \subset K}$$
$$\underset{tK_M t^{-1} = K_M}{=} e_{K_N} t^n e_{K_M} e_K = e_{K_N} t^n e_K = t^n e_{t^{-n} K_N t^n} e_K.$$

Pareil pour la $3^{ème}$ $\square$

Soit $\top : \pi^K \to \pi_N^{K_M}$ la flèche naturelle (via $\pi \twoheadrightarrow \pi_N$, où $\pi_N = \pi / \mathrm{vect}(n \cdot v - v)$). Soit $X = \mathrm{Im}\, \top$

Lemme 2 : t laisse stable X et $\forall\, \bar v \in \pi_N^{KM}$ $\exists\, n\geq 0$ tq $t^n \bar v \in X$.

Dem 2ème = du lemme 1 $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{Av} = t\cdot \bar v}$ $\forall\, v \in \pi^K$ $\Rightarrow$ X stable par t. Pour l'autre soit $v \in \pi^{KM}$ tq $\bar v = \bar v$ (!) $\exists\, n$ tq $t^{-n} K_{\bar N} t^n v = v$ $\Rightarrow$ $K_{\bar N} t^n v = t^n v$ $\underset{\text{lemme 1}}{\Rightarrow}$ $\overline{e_K t^n v} = t^n \bar v \in X$ ∎

Lemme 3 : $\operatorname{Ker} \bar{\ } = \pi^K \cap \pi(N) = \bigcup_{n\geq 0} \operatorname{Ker} A^n$

Dem lemme 1 $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} A^n = \operatorname{Ker}(e_{t^{-n}K_N t^n} \,|\, \pi^K)$. Il suffit d'utiliser le fait que $\bigcup_{n\geq 0} t^{-n} K_N t^n = N$ ∎

Th de stabilisation de Bernstein : Soient $t, P, \bar P, K$ comme au début.

$\exists\, c = c(G,K)$ tq $\forall\, \pi \in R(G)$ et $\forall\, n \geq c$ $\pi^K = \operatorname{Ker} A^n \oplus \operatorname{Im} A^n$.

Dem (sketch) le point le plus délicat est de le montrer pour $\pi = i_{P,G}(\Pi_D)$, où Π_D est le progénérateur usuel de $R(G)_D$. D classe d'inertie de $\rho \in \operatorname{Irr}_c(L)$ ($Q = LU$ parab). Soit $B = \mathcal{O}(\mathcal{X}(L)) \simeq \mathbb{C}[L/L^0]$ $\Rightarrow$ $\Pi_D = B \otimes \rho$. Le lemme géom + le fait que l'induction parab préserve la B-admissibilité $\Rightarrow$ $r_{\bar P, G}(\pi)$ B-rep admissible $\Rightarrow$ π_N^{KM} B-module type fini.

$$\begin{array}{ccc} \pi^K & \xrightarrow{\ \bar{\ }\ } & \pi_N^{KM} \\ A \downarrow & & \downarrow t \\ \pi^K & \xrightarrow{\ \bar{\ }\ } & \pi_N^{KM} \end{array}$$

Crucial : 1) $t \in \operatorname{Aut} \pi_N^{KM}$ (Klar!)
2) $\bigcup_{n\geq 0} t^{-n}(X) = \pi_N^{KM}$ où $X = \operatorname{Im} \bar{\ }$

Lemme $\operatorname{End}_B(\pi_N^{KM})$ tf et $\ni t^j$ $\forall\, j \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $t^{-1} \in B[t] \subset \operatorname{End} \pi_N^{KM}$

Mais X est t-stable $\Rightarrow$ X est t^{-1}-stable $\underset{\cup t^{-n}(X) = \pi_N^{KM}}{\Rightarrow}$ $\underline{X = \pi_N^{KM}}$

Comme π^K, π_N^{KM} sont tf$/B$ $\underset{\text{lemme 3}}{\Rightarrow}$ $\exists\, n$ tq A^n tue $\operatorname{Ker} \bar{\ }$.

Lemme 4 Supp
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ \rho\ } & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ V & \xrightarrow{\ \rho\ } & W \end{array}$$
avec $\beta \in \operatorname{Aut} W$ et α tue $\operatorname{Ker} \rho$. Alors $V = \operatorname{Im} \alpha \oplus \operatorname{Ker} \alpha$

Dem Si $v \in V$ $\Rightarrow$ $\exists\, v_1^{\in V}$ tq $\rho(v) = \beta(\rho(v_1)) = \rho(\alpha(v_1))$ $\Rightarrow$ $\alpha(v - \alpha(v_1)) = 0$ $\Rightarrow$ $v \in \operatorname{Ker}\alpha + \operatorname{Im}\alpha$. Si $\alpha(\alpha(v)) = 0$ $\Rightarrow$ $\rho(\alpha^2(v)) = 0$ $\Rightarrow$ $\beta^2(\rho(v)) = 0$ $\Rightarrow$ $\rho(v) = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha(v) = 0$. ∎

Conclusion : $\pi^K = \mathrm{Im}\, A^n \oplus \ker A^n$ et pareil avec $n \to$ n'importe quel autre $\geq n$.

Problème : n dépend de π. Pour finir, il suffit de voir que $\ker A^n \subset \ker A^c$, avec $c = c(G,K)$ (car alors on a trivialement $\pi^K = \mathrm{Im}\, A^c \oplus \ker A^c$, et aussi $\pi^K = \mathrm{Im}\, A^m \oplus \ker A^m$ $\forall m \geq c$).

Soit c donné par le thm d'admiss forte, donc $\dim \rho^K \leq c$ $\forall \rho \in \mathrm{Irr}(G)$. Soit $v \in \pi^K$ tq $A^n v = 0$. On veut : $A^c v = 0$.

Soit $\psi \in X(L)$ tq $i_{\bar{P},G}(\rho \otimes \psi) = \pi_\psi \in \mathrm{Irr}(G)$. On a vu (exposé Tony) que ceci se passe $\forall \psi \in$ ouvert Zariski de $X(L)$. On a ($m_\psi = \ker \psi$)

$$\pi_D \underset{B}{\otimes} B/m_\psi \simeq \rho \otimes \psi \Rightarrow \text{un morph } G\text{-éq } \alpha_\psi : \pi \to \pi_\psi$$

tq
$$\begin{tikzcd} \pi^K \arrow[r, "\alpha_\psi"] \arrow[d, "A"'] & \pi_\psi^K \arrow[d, "A"] \\ \pi^K \arrow[r, "\alpha_\psi"'] & \pi_\psi^K \end{tikzcd}$$

Donc ~~$A^c \alpha_\psi(v) = \alpha_\psi$~~ $A^n v = 0 \Rightarrow A^n \alpha_\psi(v) = 0$
$\underset{\dim \pi_\psi^K \leq c}{\Rightarrow} A^c \alpha_\psi(v) = 0 \Rightarrow \alpha_\psi(A^c v) = 0$.

Conclusion : $\forall \psi \in$ ouvert de Zariski de $X(L)$ on a $\alpha_\psi(A^c v) = 0$. Donc $A^c v = 0$. OUF!!!

Applications aux foncteurs de Jacquet

Th (lemme de Jacquet généralisé) $\pi, P, \bar{P}, K$ comme au début $\Rightarrow$ la flèche naturelle $\pi^K \to \pi_N^{K_M}$ est surjective.

Dém cela a été vu au cours de la preuve (avant le lemme 4)

Prop 1 La flèche $\pi^K \to \pi_N^{K_M}$ induit un isom $\pi_N^{K_M} \simeq \mathrm{Im}\, A^c$.

Dém clair, car on a vu que $\ker(\pi^K \to \pi_N^{K_M}) = \bigcup_{n \geq 0} \ker A^n = \ker A^c$ et que $\pi^K \to \pi_N^{K_M}$ est surjective. ∎

Prop 2 Si $\bar{C} \underset{cc}{\subseteq} \bar{N}$ et $\bar{C} \supset t^c K_{\bar{N}} t^{-c} \Rightarrow \mathrm{Im}\, A^c = e_K * e_{\bar{C}}\, \pi$

Dém $\mathrm{Im}\, A^c = A^c \pi^K = e_K * \delta_{t^c} * e_K \pi = A^c \pi \underset{\text{lemme 1}}{=} e_K * e_{t^c K_{\bar{N}} t^{-c}}\, \pi$
$\supset e_K * e_{\bar{C}}\, \pi$. Mais $\forall n \gg c$ on a $\bar{C} \subset t^n K_{\bar{N}} t^{-n} \Rightarrow$
$\mathrm{Im}\, A^c = \mathrm{Im}\, A^n = e_K * e_{t^n K_{\bar{N}} t^{-n}}\, \pi \subset e_K * e_{\bar{C}}\, \pi$ ∎

Prop 3 $\ker A^c$, $\operatorname{Im} A^c$ ne dépendent pas du choix de t strictement dominant pour $(P, \bar P, K)$

Dém $\operatorname{Im} h(t_1 t_2)^c \subset \operatorname{Im} h(t_1)^c$, etc, compter dimensions pour voir que c'est une égalité. D'ailleurs ça découle aussi de la prop 2 ☐

Def $\pi_x^K := \operatorname{Im} A^c$. On a donc un isom $\pi_N^{K_M} \xrightarrow{\sim} \pi_x^K$ et $\pi_x^K = e_K * e_C\, \pi$ $\forall\ \bar C \underset{cc}{\subseteq} \bar N$ assez gros $(\bar C \supset t^c K_{\bar N} t^{-c})$

Intermède sur les complétions

A anneau tq $A = \bigcup_{e \text{ idempotent de } A} eAe$. On écrit $e \leq f$ si $e = ef = fe$ ce qui $\Leftrightarrow$ $eAe \subset fAf$. Un A-module M est dit nondeg si $M = \varinjlim_e eM$

On pose alors $\bar M = \varprojlim_e eM$ où $fM \longrightarrow eM$, $x \longmapsto ex$ si $e \leq f$

$\bar A = \varprojlim_e Ae$ où $Af \longrightarrow Ae$ est $x \longmapsto xe$.

Si M est un A-module, on pose $M_A = \varinjlim_e eM$, un A-module nondeg

Prop Enfin si M est nondeg, on pose $\tilde M = (M^*)_A$ où $M^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb C}(M, \mathbb C)$ un A-module nondeg à droite.

Prop 1) $\tilde M . e \cong (e.M)^*$ 2) $\bar{\tilde M} \xrightarrow{\sim} M^*$ 3) $M \to M_A$, $M \to \tilde M$ sont exacts

Application Th (Bernstein) $\pi \in R(G) \Rightarrow \exists\ (\bar\pi)^N \xrightarrow[\phi]{\sim} \overline{\pi_{\bar N}}$ tq $\phi(e_K v) = e_{K_M} \phi(v)$ si $v \in (\bar\pi)^N$ et K a une déc. d'Iwahori selon P.

Dém $\overline{\pi_{\bar N}} = \varprojlim e_K \pi_{\bar N} = \varprojlim_{K \text{ Iwah}} \pi_{\bar N}^{K_M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_K \pi_x^K$. Le th découle facilement de la prop 2 + déf de π_x^K. ☐

Cor $\exists$ isom can $r_{\bar P, G}(\tilde\pi) \xrightarrow{\sim} \widetilde{r_{P,G}(\pi)}$

Dém ...