Introduction rapide aux formes modulaires

Les deux premiers cours seront consacrés aux propriétés élémentaires des formes modulaires. Il s'agit uniquement d'un survol, très loin d'être une présentation sérieuse de ce sujet. Des références excellentes sont le livre de Serre, les notes de Gaëtan Chenevier (cf. sa page web), le livre de Diamond-Shurman ou l'excellent article de Diamond-Im. Pour plus d'exemples et des applications plus "exotiques" des formes modulaires, cf. l'article de Zagier dans 1,2,3 of modular forms.

1 Formes modulaires: propriétés "élémentaires"

Les formes modulaires sont certaines fonctions holomorphes "très symétriques" sur le **demi-plan de Poincaré**

$$\mathscr{H} = \{z \in \mathbf{C} |\ \mathrm{Im}(z) > 0\},$$

les symétries étant fournies par l'action du groupe

$$\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})^+ = \{g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R}) |\det g > 0\}$$

sur $\mathscr{H}$, via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On vérifie en effet que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \det g \cdot \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0.$$

Pour tout entier k on peut définir une action (à droite) "de poids k" du groupe $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ sur **l'espace $O(\mathscr{H})$ des fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}$** en posant

$$f|_k\gamma(z) = \frac{1}{(cz+d)^k} f(\gamma.z),\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une action de groupe.

Les deux groupes ci-dessus vont jouer un rôle crucial dans la suite

$$G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}), \quad \Gamma(1) = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}).$$

Definition 1.1. Un **sous-groupe arithmétique de** $\Gamma(1)$ sera (pour nous) un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma(1)$.

Des exemples importants sont le sous-groupe de congruence principal $\Gamma(N)$ de niveau l'entier $N \geq 1$, formé des matrices $g \in \Gamma(1)$ telles que $g \equiv 1 \pmod{N}$, et surtout (pour la théorie des formes modulaires) les groupes $\Gamma_0(N)$ (resp. $\Gamma_1(N)$) formé des matrices $g \in \Gamma(1)$ dont la réduction modulo N est triangulaire supérieure (resp. triangulaire supérieure unipotente).

Exercice 1.2. Vérifier que $\Gamma(N)$ est distingué d'indice fini dans $\Gamma(1)$, que $\Gamma_1(N)$ est distingué dans $\Gamma_0(N)$ et que $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \simeq (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ via $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \to d$.

Dans toute la suite de ce texte Γ sera un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$.

Le sous-espace

$$FM_k(\Gamma) = \{f \in O(\mathscr{H}) |\ f|_k\gamma = f,\ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

des fonctions fixées par l'action de Γ est appelé **l'espace des formes faiblement modulaires de poids k et niveau Γ.** Il s'agit souvent d'un espace de dimension infinie. Pour se ramener à des espaces de dimension finie et enfin définir la notion de forme modulaire, nous introduisons:

Definition 1.2. On dit qu'une fonction $f \in O(\mathscr{H})$ est **à croissance modérée** si pour tout $\alpha \in \Gamma(1)$ la fonction $f|_k\alpha$ possède une limite finie quand $\mathrm{Im}(z) \to \infty$. On dit que f est **nulle aux pointes de** Γ si de plus cette limite est nulle.

Voir le paragraphe 5.2 pour les considérations géométriques implicites dans la définition un peu étrange ci-dessus. Le point à retenir est que le quotient $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ est une surface de Riemann non compacte, et que l'on peut la compactifier en lui ajoutant un nombre fini de points, appelés **pointes**. La condition de croissance modérée (resp. annulation aux pointes) est celle qu'il faut pour éviter qu'une telle fonction explose (resp. s'annule) quand elle s'approche des pointes de la surface.

Definition 1.3. Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$.

a) L'espace $M_k(\Gamma)$ des **formes modulaires de poids k pour** Γ est le sous-espace de $FM_k(\Gamma)$ formé des fonctions à croissance modérée.

b) L'espace $S_k(\Gamma)$ des **formes cuspidales ou paraboliques de poids k et niveau** Γ est le sous-espace de $M_k(\Gamma)$ formé des fonctions nulles aux pointes.

Nous verrons plus loin dans ces notes que grâce aux conditions de croissance imposées, les espaces $M_k(\Gamma)$ sont de dimension finie (c'est tout sauf évident vu leur définition!).

Remarque 1.3. a) Prenons $\Gamma = \Gamma(1)$. Il est classique (et pas difficile) de vérifier que Γ est engendré par $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, qui agissent par $z \to -1/z$ et $z \to z+1$ sur $\mathscr{H}$. Ainsi

$$FM_k(\Gamma(1)) = \{f \in O(\mathscr{H}) |\, f(z+1) = f(z),\ f(-1/z) = z^k f(z)\}$$

et $M_k(\Gamma(1))$ est le sous-espace des fonctions ayant une limite finie quand $\mathrm{Im}(z) \to \infty$.

b) Il est immédiat, mais très utile de voir que si $f \in M_k(\Gamma)$ et $g \in M_l(\Gamma)$, alors $fg \in M_{k+l}(\Gamma)$. Si $g \in S_l(\Gamma)$ on a $fg \in S_l(\Gamma)$. Voir l'exercice ci-dessous pour une re-interprétation. Ainsi $M(\Gamma) = \sum_k M_k(\Gamma)$ est une sous-algèbre de $O(\mathscr{H})$ et $S(\Gamma) = \sum_k S_k(\Gamma)$ en est un idéal.

Exercice 1.4. Montrer que les sous-espaces $M_k(\Gamma)$ ($k \in \mathbf{Z}$ variable) sont en somme directe dans $O(\mathscr{H})$.

Exercice 1.5. Montrer que $M_k(\Gamma(1)) = 0$ si k est impair.

Exercice 1.6. Si $f \in M_k(\Gamma)$ et $\alpha \in \Gamma(1)$, alors $f|_k\alpha \in M_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$.

2 q-développement d'une forme modulaire

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$ et soit $f \in FM_k(\Gamma)$. Comme Γ est d'indice fini dans $\Gamma(1)$, on a

$$\Gamma_\infty := \Gamma \cap \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

pour un (unique) entier $h > 0$. Alors $f \in O(\mathscr{H})$ et $f(z) = f(z+h)$. Soit en utilisant l'analyse de Fourier sur $\mathbf{R}$ combinée aux équations de Cauchy-Riemann, soit de manière plus savante en utilisant le biholomorphisme entre $\left(\begin{smallmatrix} 1 & h\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \backslash \mathscr{H}$ et $D^* = \{z \in \mathbf{C} | 0 < |z| < 1\}$ induit par $z \to q_h : (z \to e^{2i\pi z/h})$, on obtient l'existence d'une fonction holomorphe $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n q^n$ dans D^* (la série étant absolument convergente sur tout compact de D^*) telle que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n q_h^n, \quad q_h := e^{2i\pi z/h}.$$

On appelle cela le **q-développement à l'infini de** f. Notons que si $\alpha \in \Gamma(1)$, la fonction $f|_k\alpha \in FM_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$, donc $f|_k\alpha$ possède aussi un q-développement à l'infini (attention, h et les a_n changent!), qui n'a pas grand chose en commun avec celui de f. Donc chaque f induit plusieurs q-développements à l'infini, sauf bien sûr si $\Gamma = \Gamma(1)$.

Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n q_h^n$ est le q-développement à l'infini de f, alors

$$f(x+iy) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{\frac{-2\pi yn}{h}} \cdot e^{\frac{2i\pi nx}{h}}$$

et donc

$$a_n \cdot e^{\frac{-2\pi yn}{h}} = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+iy)e^{-\frac{2i\pi nx}{h}}.$$

Une application fort utile de cette discussion est l'énoncé suivant, qui explique mieux la notion de croissance modérée.

Proposition 2.1. *Soit $f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n q_h^n$ le q-développement à l'infini de $f \in MF_k(\Gamma)$, avec $\Gamma_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) $\lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} f(z)$ existe et est finie.
b) Il existe $N \geq 1$ et $c > 0$ tels que $|f(x+iy)| \leq cy^N$ pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $y \geq 1$.
c) On a $a_n = 0$ pour $n < 0$.
Les assertions suivantes sont équivalentes:
a) $\lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} f(z) = 0$
b) $a_n = 0$ pour $n \leq 0$.
c) Il existe $c > 0$ tel que $|f(x+iy)| \leq ce^{-2\pi y/h}$ pour $x \in \mathbf{R}$ et $y \geq 1$.

Proof. Il est clair que a) entraîne b) et que c) entraîne a) (la limite est a_0, bien sûr). Le fait que b) entraîne c) se déduit en faisant, pour $n < 0$, $y \to \infty$ dans

$$h|a_n|e^{-\frac{2\pi ny}{h}} = |\int_0^h f(x+iy)e^{-\frac{2i\pi nx}{h}}dx| \leq cy^N h.$$

ii) Vu ce qui précède, le seul point non évident est que b) entraîne c). Mais il est aussi clair, car $a_1 + a_2 q + ...$ est bornée sur le disque unité, et donc $|f(z)| = O(|q_h|) = O(e^{-2\pi y/h})$ uniformément en x.

$\square$

Attention: il ne suffit pas de tester l'annulation des a_n pour $n < 0$ pour conclure que f est modulaire. En effet, il faut vérifier le même genre d'annulation pour les q-développements à l'infini de **toutes** les fonctions $f|_k\alpha$, avec $\alpha \in \Gamma(1)$. Cela peut être très pénible, mais on le résultat suivant permet d'éviter la fatigue inutile:

Théorème 2.1. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q_h^n \in FM_k(\Gamma)$ telle que $a_n = O(n^N)$ pour un certain $N \geq 1$. Alors $f \in M_k(\Gamma)$.*

Proof. Soit $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$ et $F := f|_k\alpha$. Alors $F \in FM_k(\Gamma_1)$ avec $\Gamma_1 := \alpha^{-1}\Gamma\alpha$, un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$. D'après la proposition précédente, il suffit donc de montrer que $|F(x+iy)| \leq Cy^N$ pour $y \geq 1$, avec C, N convenables. Par périodicité par rapport à x, on peut supposer que x reste dans un compact fixé. Le cas $c = 0$ étant trivial, on suppose dans la suite que $c \neq 0$ et que $y \geq 1$.

Posons $z = x + iy$ et $\alpha.z = u + iv$, alors $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$ et comme x reste dans un compact, on a $\frac{C}{y} \leq v \leq \frac{1}{y}$ pour une constante C et $y \geq 1$. De plus, comme $|cz + d| \geq y \geq 1$, on a

$$|F(x+iy)| = \left|\frac{f(u+iv)|}{(cz+d)^k}\right| \leq |f(u+iv)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n| e^{-2\pi n v/h}.$$

L'hypothèse $a_n = O(n^N)$ montre (exercice d'analyse réelle) l'existence d'une constante C' telle que la dernière série soit majorée par $\frac{C'}{v^{N+1}}$ pour $0 < v \leq 1$. Enfin, $v \geq C/y$, ce qui permet de conclure. □

3 Séries de Poincaré et Eisenstein

Pour construire des fonctions dans $FM_k(\Gamma)$, la manière la plus naturelle est de considérer des "moyennes" selon Γ. La difficulté évidente est que Γ est infini.

Soit $h > 0$ tel que

$$\Gamma_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cap \Gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Si $\varphi \in O(\mathscr{H})$ est h-périodique, on peut tenter de considérer

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \varphi|_k\gamma,$$

qui est bien Γ-invariante...si la série converge. Prenons φ bornée et notons que si deux matrices dans Γ diffèrent par un élément de Γ_∞ (à gauche), alors elles ont la même deuxième ligne, dont les éléments sont des entiers premiers entre eux. Donc

$$|f(z)| = |\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \varphi|_k\gamma(z)| \leq ||\varphi||_\infty \cdot \sum_{\mathrm{pgcd}(c,d)=1} \frac{1}{|cz+d|^k} \leq ||\varphi||_\infty \sum_{(c,d)\in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{|cz+d|^k}.$$

D'autre part, on a le très utile et simple:

Lemme 3.1. *La série $\sum_{(c,d)\in\mathbf{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(cz+d)^k}$ converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathscr{H}$ si $k \geq 3$. Elle est identiquement nulle si k est impair et tend vers $2\zeta(k)$ quand $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ si k est pair.*

Proof. Soit A un compact de $\mathscr{H}$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $y \geq \varepsilon$ et $|x| \leq \varepsilon^{-1}$ pour $z = x + iy \in A$. Si $(c, d) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ et $z = x + iy \in A$ on obtient $|cz + d| \geq |c||y| \geq \varepsilon|c|$, mais aussi[1]

$$|cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 \geq \frac{d^2y^2}{x^2 + y^2} \geq Cd^2$$

pour une constante C (dépendant de ε). Comme la série $\sum_{c,d} \frac{1}{\max(|c|,|d|)^k}$ converge pour $k \geq 3$, cela finit le premier point. Le deuxième est laissé au lecteur. □

Le même genre d'argument combiné avec l'observation que pour tout $\alpha \in \Gamma(1)$

$$f|_k\alpha = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma\alpha} \varphi|_k\gamma,$$

montre que $f|_k\alpha$ est bornée à l'infini, ce qui fournit:

Théorème 3.1. *(Poincaré) Si $k \geq 3$ et φ est une fonction holomorphe, h-périodique et bornée*[2] *sur $\mathscr{H}$, alors $f = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \varphi|_k\gamma$ est dans $M_k(\Gamma)$.*

Une série construite comme ci-dessus s'appelle **série de Poincaré**. On peut montrer que les séries de Poincaré engendrent $M_k(\Gamma)$, mais il n'est pas facile (et c'est toujours un problème ouvert...) de décider si une série de Poincaré donnée est identiquement nulle.

Prenons φ la fonction constante 1 et, pour simplifier, $\Gamma = \Gamma(1)$. La série de Poincaré correspondante est ($k \geq 3$)

$$f(z) = \sum_{\mathrm{pgcd}(c,d)=1} \frac{1}{(cz + d)^k} = \frac{1}{\zeta(k)} G_k(z), \text{ où } \quad G_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n)^k}.$$

Les séries G_k s'appellent **séries d'Eisenstein**. Pour des raisons évidentes de symétrie, on a $G_k = 0$ pour $k \geq 3$ impair.

Théorème 3.2. *Si $k \geq 4$ est un entier pair $G_k \in M_k(\Gamma(1))$ et son q-développement est, avec $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$*

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Proof. Le premier point a été déjà vu. Concernant le q-développement, on a

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(mz + n)^k} = 2\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k} + 2\sum_{m \geq 1} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(mz + n)^k}.$$

Il suffit donc de démontrer le résultat suivant:

[1] L'inégalité se déduit de Cauchy-Schwarz:

$$(x^2 + y^2)((cy)^2 + (cx + d)^2) \geq (-xcy + y(cx + d))^2 = d^2y^2.$$

[2] La fonction q_h^n en est un exemple!

Lemme 3.2. *(Euler) Si $k \geq 2$ et $z \in \mathscr{H}$, on a*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(n+z)^k} = \frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{d \geq 1} d^{k-1} q^d.$$

Cela se démontre en dérivant $k-1$ fois l'identité d'Euler

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

Noter que le terme à gauche vaut (avec $q = e^{2i\pi z}$) $i\pi - \frac{2i\pi}{1-q} = -i\pi - 2i\pi \sum_{d \geq 1} q^d$, alors que le terme à droite "vaut" $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{z+n}$ (bien sûr, la série ne converge pas, mais elle converge une fois que l'on dérive...). □

Pour pas mal de questions il est convenable de re-normaliser les G_k, en définissant (pour $k \geq 4$ pair)

$$E_k := \frac{G_k}{2\zeta(k)},$$

ainsi le coefficient a_0 du q-développement à l'infini de E_k est 1, en particulier $E_k \notin S_k(\Gamma(1))$. On a par exemple

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n, \ E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n.$$

Théorème 3.3. *Les coefficients du q-développement à l'infini de E_k sont rationnels.*

Proof. Il faut voir que $\zeta(k)/(2i\pi)^k \in \mathbf{Q}$ pour $k \geq 2$ pair, un résultat célèbre d'Euler. Rappelons l'argument magique: on re-écrit l'identité d'Euler ci-dessous sous la forme

$$1 - \pi z \cot(\pi z) = 2z^2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - z^2} = 2z^2(\zeta(2) + z^2\zeta(4) + z^4\zeta(6) + ...).$$

en utilisant la formule $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ...$ D'autre part, un calcul immédiat montre que le terme à gauche s'écrit $1 - i\pi z - \frac{2i\pi z}{e^{2i\pi z}-1}$. Considérons la suite (B_n) des nombres de Bernouilli, définis par

$$\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{X^n}{n!} = 1 - \frac{X}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{X^2}{2} - \frac{1}{30} \cdot \frac{X^4}{24} + ...$$

On vérifie sans problème que $B_n \in \mathbf{Q}$ pour tout n, et d'autre part l'identité ci-dessus montre que

$$\zeta(k) = -\frac{B_k}{2k!}(2i\pi)^k,$$

ce qui permet de conclure. □

4 Croissance des coefficients

Nous allons étudier maintenant la croissance des fonctions cuspidales. Le résultat suivant sera très utile:

Théorème 4.1. *(Gauss) L'ensemble*

$$D = \{z \in \mathbf{C} |\ |z| \geq 1, |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2\}$$

est un domaine fondamental de $\Gamma(1)$ *agissant sur* $\mathscr{H}$*, i.e.* $\mathscr{H} = \cup_{\gamma \in \Gamma(1)} \gamma.D$ *et les ensembles* $\gamma.\mathrm{Int}(D)$ *sont deux à deux disjoints.*

Proof. Je donne la preuve de la première partie uniquement, car elle est très jolie (et c'est cette partie que l'on utilisera dans la suite). Soit $z \in \mathscr{H}$. Comme $\mathrm{Im}(\gamma z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ et $z\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ est discret, il est clair que l'ensemble S des $z' \in \Gamma(1)z$ tels que $\mathrm{Im}(z')$ soit maximal est non vide. De plus, S est stable par $z' \to z' + 1$, donc S contient un élément z' tel que $|\mathrm{Re}(z')| \leq 1/2$. On a $\mathrm{Im}(z') \geq \mathrm{Im}(-1/z') = \frac{\mathrm{Im}(z')}{|z'|^2}$, donc $|z'| \geq 1$ et donc $z' \in D \cap \Gamma(1)z$, ce qui montre que $\mathscr{H} = \cup_{\gamma \in \Gamma(1)} \gamma.D$. □

Exercice 4.2. Finir la preuve du théorème, en démontrant la deuxième assertion.

Fixons $k \in \mathbf{Z}$. Si f est une fonction sur $\mathscr{H}$, posons

$$\varphi_f : \mathscr{H} \to \mathbf{R}_{\geq 0},\ \ \varphi_f(x+iy) = |f(x+iy)| y^{\frac{k}{2}}.$$

On a alors pour tout $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$

$$\varphi_f(\alpha.z) = |f(\alpha.z)| \mathrm{Im}(\alpha.z)^{\frac{k}{2}} = |f(\alpha.z)| \cdot \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}\right)^{\frac{k}{2}} = \varphi_{f|_k\alpha}(z).$$

En particulier, si $f \in M_k(\Gamma)$, alors $\varphi_f(\alpha.z) = \varphi_f(z)$ pour tout $\alpha \in \Gamma$ et $z \in \mathscr{H}$. Une propriété cruciale est la suivante:

Proposition 4.1. *Si* $f \in S_k(\Gamma)$*, alors* φ_f *est bornée sur* $\mathscr{H}$*.*

Proof. Soit D comme dans le théorème ci-dessus. Ecrivons $\Gamma(1) = \coprod_{i \in I} \Gamma\gamma_i$ avec un nombre fini de $\gamma_i \in \Gamma(1)$. Alors $\mathscr{H} = \cup_{i \in I, \gamma \in \Gamma} \gamma\gamma_i D$. Comme φ_f est Γ-invariante, il reste à voir qu'elle est bornée sur chaque $\gamma_i D$, ou encore, que $\varphi_{f|_k\gamma_i}$ est bornée sur D. Fixons i et posons $f_i := f|_k\gamma_i$. Comme $f \in S_k(\Gamma)$, on a $f_i \in S_k(\gamma_i^{-1}\Gamma\gamma_i)$, donc $f_i(x+iy) = O(e^{-cy})$ quand $y \to \infty$, uniformément en $x + iy \in D$, pour un certain $c > 0$ (proposition 2.1). On en déduit que $\varphi_{f_i}(x+iy)$ tend vers 0 quand $x+iy \in D$ tend vers l'infini. Cela permet de conclure, car φ_{f_i} est continue.

□

Une première application de la proposition est l' important résultat suivant:

Théorème 4.3. *(Hecke) Si* $f \in S_k(\Gamma)$*, alors* $a_n = O(n^{k/2})$*. En fait*

$$\sum_{n \leq x} |a_n|^2 =_{x \to \infty} O(x^k).$$

Proof. Comme φ_f est bornée, il existe $C > 0$ tel que $|f(x+iy)| \leq Cy^{-k/2}$ pour tous $x + iy \in \mathscr{H}$. Comme $f(x+iy) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-2\pi ny/h} e^{2i\pi nx/h}$, la formule de Parseval fournit (c est une certaine constante...)

$$\sum_{n \geq 1} |a_n|^2 e^{-4\pi ny/h} = c \int_0^h |f(x+iy)|^2 dx \leq c' y^{-k}.$$

Si $N > 0$ est un entier, en prenant $y = 1/N$ on obtient $\sum_{n \leq N} |a_n|^2 \leq c' N^k$. Cela finit la preuve du théorème.

□

Remarque 4.4. La méthode de Rankin-Selberg (que l'on ne discutera pas ici) permet de montrer que la majoration $\sum_{n\le N}|a_n|^2 = O(N^k)$ est optimale. En revanche, la majoration $a_n = O(n^{k/2})$ n'est pas optimale. Un théorème très profond de Deligne donne $a_n = O(n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 4.5. Montrer que si a_n est le n-ème coefficient de E_k, alors il existe $c, C > 0$ tels que pour tout $n \ge 1$ on ait $cn^{k-1} \le a_n \le Cn^{k-1}$.

Voici une deuxième application (des méthodes géométriques discutées dans le paragraphe 5.2 fourniraient une preuve plus naturelle que celle ci-dessus...):

Théorème 4.6. *On a* $S_0(\Gamma) = 0$ *et* $M_0(\Gamma) = \mathbf{C}$.

Proof. Si $f \in S_0(\Gamma)$, la fonction $\varphi_f(z) = |f(z)|$ est bornée sur $\mathscr{H}$ et tend vers 0 à l'infini. Elle possède donc un maximum sur D (le domaine fondamental usuel). Par le principe du maximum f est constante et comme f est nulle à l'infini, elle est nulle tout court.

La preuve de $M_0(\Gamma) = \mathbf{C}$ est plus pénible. On commence par le faire quand $\Gamma = \Gamma(1)$. Dans ce cas si $f = a_0 + a_1 q + ...$ est le q-développement de f à l'infini, alors $f - a_0$ est clairement dans $M_0(\Gamma)$ et s'annule à l'infini, donc est dans $S_0(\Gamma) = 0$ (le point essentiel est qu'il n'y a qu'une seule condition du type $\lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} f|_0\alpha(z) = 0$ à vérifier quand $\Gamma = \Gamma(1)$). Cela permet de conclure. Dans le cas général, écrivons $\Gamma(1) = \coprod_{i=1}^r \Gamma\alpha_i$ et considérons le polynôme $P(T) = \prod_{i=1}^r (T - f|_0\alpha_i)$. Ses coefficients sont clairement dans $M_0(\Gamma(1))$, donc constants. D'autre part $P(f) = 0$, autrement dit f est solution d'une équation polynomiale et donc f est constante.

□

5 La fonction Δ et la structure de $M_k(\Gamma(1))$

Dans ce paragraphe $\Gamma = \Gamma(1)$ et, pour simplifier les notations, on pose $M_k = M_k(\Gamma(1))$, $S_k = S_k(\Gamma(1))$.

Nous commençons par démontrer le magnifique et délicat théorème suivant:

Théorème 5.1. *(Jacobi) La fonction suivante est dans* S_{12}*:*

$$\Delta(z) = q\prod_{n\ge 1}(1-q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + ...$$

Notons que l'holomorphie et la 1-périodicité sont claires, donc par la remarque 1.3 il "suffit" de vérifier que $\Delta(-1/z) = z^{12}\Delta(z)$. C'est évidemment tout sauf évident!

Notons que Δ ne s'annule pas dans $\mathscr{H}$, on peut donc poser $f(z) = \frac{\Delta(-1/z)}{z^{12}\Delta(z)}$ et on veut montrer que f est constante, égale à 1. Il suffit de montrer que f est constante, car on a clairement $f(i) = 1$. Notons aussi que la dérivée logarithmique de f s'exprime facilement à partir de celle de Δ:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\Delta'(-1/z)}{\Delta(-1/z)}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{12}{z} - \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}$$

et (en utilisant encore $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ...$)

$$\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} = 2i\pi\left(1 - 24\sum_{n\ge 1}\frac{q^n}{1-q^n}\right) = 2i\pi(1 - 24\sum_{n\ge 1}\sigma_1(n)q^n).$$

L'expression $1 - 24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n$ ressemble drôlement au q-développement d'une hypothétique série d'Eisenstein G_2, qui n'existe pas vraiment en tant que forme modulaire... Ceci étant dit, on va voir que l'on peut définir

$$G_2(z) := \sum_c \left(\sum_d \frac{1}{(cz+d)^2}\right)$$

en tant que série convergente (mais **pas** absolument convergente!) et que l'on a

$$G_2(z) = \frac{\pi^2}{3}(1 - 24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n),$$

ce qui fait que l'annulation de f'/f revient finalement à

$$G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) - 2i\pi z.$$

Montrer cette identité sera le noyau dur de la preuve.

Pour simplifier un peu les formules, on fait la **convention** que dans toutes les sommes ci-dessus on ne considère que des paires $(c,d) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pour lesquelles $\frac{1}{(cz+d)^2}$ a un sens quand $z \in \mathscr{H}$.

Commençons par la partie "facile". Le lemme 3.2 montre que pour tout $c \neq 0$ la série (absolument convergente) $\sum_d \frac{1}{(cz+d)^2}$ est égale à $-4\pi^2\sum_{d\geq 1} dq^{|c|d}$. D'autre part, on voit directement que

$$\sum_{c\neq 0}\sum_{d\geq 1} dq^{|c|d} = 2\sum_{c,d\geq 1} dq^{cd} = 2\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n,$$

toute série manipulée ci-dessus étant convergente. Cela montre que

$$G_2(z) = \sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^2} + \sum_{c\neq 0}\left(\sum_d \frac{1}{(cz+d)^2}\right) = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n = \frac{\pi^2}{3}(1 - 24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n).$$

Notons que cette fonction G_2 est nettement plus délicate que les $G_4, G_6, \ldots$, à cause de l'absence de convergence absolue des séries utilisées. Passons au coeur de l'argument et montrons que

$$G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) - 2i\pi z.$$

Ca sera très fin... On "régularise" G_2 en remarquant que $\sum_{d\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(cz+d)(cz+d+1)} = 0$ pour tout c (somme télescopique!). Donc

$$G_2(z) = \sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^2} + \sum_{c\neq 0}\left(\sum_d \frac{1}{(cz+d)^2} - \sum_d \frac{1}{(cz+d)(cz+d+1)}\right) =$$

$$= \sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^2} + \sum_{c\neq 0}\sum_d \frac{1}{(cz+d)^2(cz+d+1)} = \sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^2} + \sum_d\sum_{c\neq 0}\frac{1}{(cz+d)^2(cz+d+1)},$$

la permutation finale étant justifiée par la convergence absolue de la somme[3]

[3]C'est la raison pour laquelle on a soustrait $\sum_{d\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(cz+d)(cz+d+1)}$!

Ensuite, on a

$$\frac{1}{z^2}G_2(-1/z) = \sum_c \sum_d \frac{1}{(dz-c)^2} = \sum_c \sum_d \frac{1}{(dz+c)^2} = \sum_{c\neq 0} \frac{1}{c^2} + \sum_d \sum_{c\neq 0} \frac{1}{(cz+d)^2},$$

la dernière égalité demandant un petit moment de réflexion.

En comparant, on obtient, en utilisant encore une fois l'identité d'Euler

$$\frac{1}{z^2}G_2(-1/z) - G_2(z) = \sum_d \sum_{c\neq 0} \left(\frac{1}{(cz+d)^2} - \frac{1}{(cz+d)^2(cz+d+1)} \right)$$

$$= \sum_d \sum_{c\neq 0} \frac{1}{(cz+d)(cz+d+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{d=-N}^{N-1} \sum_{c\neq 0} \left(\frac{1}{cz+d} - \frac{1}{cz+d+1} \right).$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{c\neq 0} \left(\frac{1}{cz-N} - \frac{1}{cz+N} \right) = \lim_{N\to\infty} -\frac{2}{z} \sum_{c\geq 1} \left(\frac{1}{\frac{N}{z}-c} + \frac{1}{\frac{N}{z}+c} \right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} -\frac{2}{z} \left(\pi \cot \frac{\pi N}{z} - \frac{z}{N} \right) = \frac{2i\pi}{z}.$$

Cela permet de conclure.

Exercice 5.2. Montrer que la fonction (pas holomorphe!) $f(z) = G_2(z) - \frac{\pi}{\mathrm{Im}(z)}$ vérifie $f|_2\gamma = f$ pour $\gamma \in \Gamma(1)$.

Le résultat précédent a beaucoup d'applications concernant la structure des espaces $M_k := M_k(\Gamma(1))$ et $S_k := S_k(\Gamma(1))$, qui sont résumés dans le théorème et les deux corollaires ci-dessus:

Théorème 5.3. *a) On a $S_0 = 0$, $M_0 = \mathbf{C}$, $M_k = 0$ pour $k < 0$ et $S_k = 0$ pour $k < 12$. De plus, $M_k = \mathbf{C}E_k$ pour $k = 4, 6, 8, 10$, $M_2 = 0$ et $S_{12} = \mathbf{C}\Delta$.*

b) Pour tout k on a $S_k = \Delta \cdot M_{k-12}$. De plus, pour tout $k \geq 2$ pair $\dim M_k$ est $\lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ si $k \equiv 2 \pmod{12}$ et $1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ sinon.

Proof. Nous allons utiliser les observations suivantes plusieurs fois:

• $M_k = \mathbf{C}E_k \oplus S_k$ pour $k \geq 4$ pair. En particulier $\dim M_k = 1 + \dim S_k$.

• Si $f \in S_k$, alors $f/\Delta \in M_{k-12}$, en particulier $S_k = \Delta M_{k-12}$. En effet, l'invariance par $\Gamma(1)$ pour l'action de poids $k-12$ est claire, tout comme l'holomorphie (noter le point crucial: Δ ne s'annule pas sur $\mathscr{H}$). Pour ce qui est de la croissance à l'infini, il suffit de noter que $f = O(q)$ et $\Delta = q(1 + O(q))$ (deuxième propriété essentielle de Δ!).

a) On a déjà vu que $S_0 = 0$ et $M_0 = \mathbf{C}$. Si $k < 0$ et $f \in M_k$, alors $f^{12}\Delta^{-k} \in S_0 = 0$, donc $f = 0$. Ensuite, si $k < 12$ et $f \in S_k$, alors $f/\Delta \in M_{k-12} = 0$ (deuxième observation ci-dessus). On en déduit aussi que $M_k = \mathbf{C}E_k$ pour $k = 4, 6, 8, 10$ (première observation ci-dessus!). Si $f \in S_{12}$, alors $f/\Delta \in M_0 = \mathbf{C}$, donc $S_{12} = \mathbf{C}\Delta$.

Il reste à voir que $M_2 = 0$. Or si $f \in M_2$, on a $f^2 \in M_4$ et $f^3 \in M_6$, donc $f^2 = \alpha E_4, f^3 = \beta E_6$ pour des nombres $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Si $f \neq 0$, on obtient alors $E_4^3 = \gamma E_6^2$ pour un $\gamma \in \mathbf{C}$. En regardant le q-développement on voit que cela est impossible.

b) Le premier point a été déjà vu. On montre la relation concernant $\dim M_k$ par récurrence sur k, en passant de k à $k+12$. Pour $0 \leq k \leq 10$ cela a été vérifié, et on passe de k à $k+12$ en utilisant les relations $M_k = \mathbf{C}E_k \oplus S_k$ et $S_k = \Delta M_{k-12}$ pour $k \geq 12$, qui montrent que $\dim M_k = 1 + \dim M_{k-12}$. □

Corollaire 5.1. *On a*

$$\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}.$$

Proof. Les deux termes sont dans $S_{12} = \mathbf{C}\Delta$, donc sont proportionnels. Pour identifier la constante, on regarde le coefficient de q dans le q-développement. $\square$

Corollaire 5.2. *Si $k \geq 4$ est pair, une base de M_k est donnée par les $E_4^r E_6^s$ pour les entiers $r, s \geq 0$ tels que $4r + 6s = k$.*

Proof. On vérifie sans mal que le nombre de paires (r, s) est le même que $\dim M_k$, donc il suffit de montrer que la famille en question est génératrice. Il est facile de voir que pour tout $k \geq 4$ pair il existe $r, s \geq 0$ tels que $k = 4r + 6s$. Fixons une telle paire (r, s) et notons que pour tout $f \in M_k$ on a $f - f(\infty)E_4^r E_6^s \in S_k = \Delta M_{k-12}$. Comme $\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$, on peut conclure par récurrence sur k. $\square$

Exercice 5.4. a) Montrer que $E_4^2 = E_8$. En déduire que pour tout $n \geq 2$

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_3(j)\sigma_3(n-j).$$

b) Montrer que $E_4 E_6 = E_{10}$ et écrire l'identité analogue à celle dans a) qui s'en déduit.

Soit $f \in M_k$. Si $z \in \mathscr{H}$ on note $v_z(f)$ l'ordre d'annulation de f en z, et on note $v_\infty(f) = v_q(f)$ (si $f = a_0 + a_1 q + ...$ est le q-développement de f, $v_q(f)$ est le plus petit n tel que $a_n \neq 0$). Soit aussi e_z le cardinal du stabilisateur de z dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Les quantités $v_z(f)$ et e_z ne dépendent que de $\Gamma(1)z$, et $e_z = 1$ sauf si $z \in \Gamma(1)i \cup \Gamma(1)\rho$, avec $e_z = 2$ pour $z \in \Gamma(1)i$ et $e_z = 3$ pour $z \in \Gamma(1)\rho$.

Théorème 5.5. *(la formule $k/12$) Pour tout $f \in M_k$ non nulle on a*

$$v_\infty(f) + \sum_{z \in \Gamma(1)\backslash\mathscr{H}} \frac{v_z(f)}{e_z} = \frac{k}{12}.$$

Proof. Voir le livre de Serre ou les notes de Chenevier. L'idée est d'intégrer f'/f le long de la frontière de D, mais les détails sont assez pénibles... $\square$

Une application importante du théorème ci-dessus est le:

Théorème 5.6. *Si Γ est un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$, alors $M_k(\Gamma)$ est de dimension finie, majorée par $1 + \frac{k}{12}[\Gamma(1) : \Gamma]$.*

Proof. (merci à Gaëtan Chenevier pour cette preuve élégante) Prenons un entier $N > \frac{k}{12}[\Gamma(1) : \Gamma]$ et considérons $z_1, .., z_N \in \mathrm{Int}(D)$ (D étant le domaine fondamental usuel). On va montrer que l'application $M_k(\Gamma) \to \mathbf{C}^N$ envoyant f sur $(f(z_1), ..., f(z_N))$ est injective, ce qui permettra de conclure. Supposons que $f \in M_k(\Gamma)$ est non nulle et $f(z_i) = 0$ pour $i = 1, ..., N$. Alors $N(f) := \prod_{\alpha \in \Gamma\backslash\Gamma(1)} f|_k\alpha$ est clairement dans $M_{k[\Gamma(1):\Gamma]}(\Gamma(1))$ et s'annule aussi en chacun des z_i. Par le théorème précédent cela force $N(f) = 0$. Comme $O(\mathscr{H})$ est intègre, on doit avoir $f|_k\alpha = 0$ pour un $\alpha \in \Gamma(1)$, et donc $f = 0$. Cela permet de conclure. $\square$

5.1 Séries theta et sommes de carrés

Soit $r_k(n)$ le nombre de $(n_1, ..., n_k) \in \mathbf{Z}^k$ tels que $n_1^2 + ... + n_k^2 = n$.

Théorème 5.7. *(Jacobi) La fonction $F_k(z) = \sum_{n\geq 0} r_k(n)q^n$ (avec $q = e^{2i\pi z}$) est un élément de $M_{k/2}(\Gamma_0(4))$ si $k \geq 1$ est un multiple de 4.*

Notons que

$$F_k(z) = \sum_{n\geq 0} r_k(n)q^n = \sum_{n_1,...,n_k\in\mathbf{Z}} q^{n_1^2+...+n_k^2} = \theta(z)^k,$$

où θ est la fonction θ de Jacobi

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + ...$$

Le théorème découle alors directement du résultat plus précis suivant (attention cependant, il n'est pas vrai que $\theta^2 \in M_1(\Gamma_0(4))$, précisément à cause du $(-1)^{\frac{d-1}{2}}$ apparaissant dans la formule ci-dessous!), compte tenu aussi du fait que les $r_k(n)$ ont un comportement au plus polynomial quand $n \to \infty$ (ce qui permet d'utiliser le théorème 2.1 pour vérifier la condition de croissance aux pointes).

On vérifie sans problème que l'application $\chi : \Gamma_0(4) \to \mathbf{C}^*$, $\chi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = (-1)^{\frac{d-1}{2}}$ est un caractère de $\Gamma_0(4)$, i.e. un morphisme de groupes.

Théorème 5.8. *(Jacobi) On a $\theta^2 \in M_1(\Gamma_0(4), \chi)$, i.e. $\theta^2 \in M_1(\Gamma_0(4))$ et $\theta^2|_1\gamma = \chi(\gamma)\theta^2$ pour $\gamma \in \Gamma_0(4)$.*

Proof. On va utiliser le fait (exercice) que $\Gamma_0(4)$ est engendré par $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La loi de transformation est immédiatement vérifiée pour les deux premières matrices (mais noter que c'est la première qui interdit à θ d'être une forme modulaire de poids 1 pour $\Gamma_0(4)$!). Il reste donc à voir que $f(\frac{z}{4z+1}) = (4z+1)f(z)$, où $f = \theta^2$. En posant $\frac{z}{4z+1} = -\frac{1}{4x}$ on a $z = -\frac{1}{4(x+1)}$ et $4z + 1 = \frac{x}{x+1}$. Il suffit donc de vérifier que $f(-\frac{1}{4x}) = -2xif(x)$ pour tout x, car alors

$$(4z+1)f(z) = \frac{x}{x+1}f(-\frac{1}{4(x+1)}) = \frac{x}{x+1} \cdot (-2i(x+1))f(x+1)$$

$$= -2ixf(x) = f(-\frac{1}{4x}) = f(\frac{z}{4z+1}).$$

De manière équivalente, on veut $f(\frac{iz}{2}) = z^{-1}f(\frac{i}{2z})$ et il suffit de voir cela quand $z = t > 0$, i.e. on veut $\theta(\frac{it}{2}) = t^{-1/2}\theta(\frac{i}{2t})$ ou encore

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.$$

C'est une application de la formule de Poisson[4], pour la fonction (on fixe $t > 0$)

[4] Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est continue et L^1 et si $g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ converge absolument et uniformément sur tout compact, et si g est lisse, alors $g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$, avec $\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2i\pi xt}dx$. En particulier $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$. Pour démontrer la formule noter que g est 1-périodique et lisse, donc $g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{g}(n)e^{2i\pi nx}$, or

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 g(u)e^{-2i\pi nu}du = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_0^1 f(u+k)e^{-2i\pi n(u+k)}du = \hat{f}(n).$$

$f(x) = e^{-\pi x^2 t}$, dont la transformée de Fourier est donnée par la formule classique $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi x^2}{t}}$.

□

On peut montrer (on ne le fera pas) que $M_{2k}(\Gamma_0(4))$ est de dimension $k+1$ pour $k \geq 1$. En particulier θ^4, θ^8 vivent dans des espaces de dimension 2 (resp. 3), pour lesquels il n'est pas trop difficile de construire des bases à partir de séries d'Eisenstein. L'observation essentielle est que si $f \in M_k(\Gamma(1))$, alors $f(Nz) \in M_k(\Gamma_0(N))$ (immédiat). En appliquant cela à $f(z) = G_2(z) - \frac{\pi}{\mathrm{Im}(z)}$, on obtient

$$G_2^{[N]}(z) := G_2(z) - NG_2(Nz) \in M_2(\Gamma_0(N)),$$

avec un q-développement

$$G_2^{[N]}(z) = \frac{\pi^2}{3}(1-N) - 8\pi^2 \sum_{n\geq 1} (\sum_{d|n, d\notin N\mathbf{Z}} d) q^n.$$

Cela montre en particulier que $G_2^{[2]}$ et $G_2^{[4]}$ forment une famille libre, et donc une base de $M_2(\Gamma_0(4))$. En écrivant $\theta^4 = aG_2^{[2]} + bG_2^{[4]}$ et en regardant les q-développements, on obtient $\theta^4 = -\frac{G_2^{[4]}}{\pi^2}$, puis le beau:

Théorème 5.9. *(Jacobi) On a*

$$r_4(n) = 8 \sum_{d|n, d\notin 4\mathbf{Z}} d.$$

Exercice 5.10. a) On admet que $M_4(\Gamma_0(4))$ est de dimension 3. Montrer que $E_4(z), E_4(2z), E_4(4z)$ en forment une base.

b) Ecrire θ^8 comme une combinaison linéaire de ces trois fonctions, et en déduire la formule (avec la convention $\sigma_3(x) = 0$ pour $x \notin \mathbf{Z}$)

$$r_8(n) = 16\sigma_3(n) - 32\sigma_3(n/2) + 256\ \sigma_3(n/4).$$

c) Montrer le théorème de Jacobi:

$$r_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n-d} d^3.$$

En particulier $r_8(p) = 16(p^3+1)$ pour tout premier p, et $r_8/16$ est une fonction multiplicative.

6 Quelques considérations géométriques

Les observations géométriques faites ci-dessous sont très utiles dans l'étude des formes modulaires, mais faute de temps nous ne pourrons pas les discuter. Si l'on veut vraiment étudier les formes modulaires sérieusement-ce qu'on ne fera pas ici...- on ne peut pas se passer de cette étude géométrique.

Si $\Gamma \subset \Gamma(1)$ est un sous-groupe arithmétique, on pose

$$Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathscr{H},$$

que l'on munit de la topologie quotient. Le groupe Γ agit proprement discontinument sur $\mathscr{H}$, i.e. tout $x \in \mathscr{H}$ a un voisinage ouvert U_x tel que $\{\gamma \in \Gamma | \gamma U_x \cap U_x \neq \emptyset\}$ soit égal à $\Gamma_x := \mathrm{Stab}_G(x)$, et Γ_x est un groupe fini, cyclique. En combinant cela avec la théorie des surfaces de Riemann, on obtient

Théorème 6.1. *L'espace topologique $Y(\Gamma)$ est séparé, localement compact et possède une unique structure de surface de Riemann telle que $p : \mathscr{H} \to Y(\Gamma)$ soit holomorphe. Les fonctions holomorphes sur un ouvert U de $Y(\Gamma)$ sont les fonctions holomorphes Γ-invariantes sur $p^{-1}(U)$.*

Les espaces $Y(\Gamma)$ sont tout à fait remarquables. On a par exemple le résultat miraculeux suivant:

Théorème 6.2. *(d'uniformisation) Soit $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Alors $Y(\Gamma)$ est biholomorphe à $\mathbf{C}$ et est naturellement en bijection avec d'une part l'ensemble des réseaux de $\mathbf{C}$, à homothétie près, d'autre part l'ensemble des courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$, à isomorphisme près.*

L'espace $Y(\Gamma)$ n'est pas compact. Cela se voit clairement pour $\Gamma = \Gamma(1)$ en utilisant le théorème 4.1. On peut "compactifier" la surface de Riemann $Y(\Gamma)$ en ajoutant un nombre fini de "pointes". Le groupe $\Gamma(1)$ agit transitivement (comme on le pense) sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$, le stabilisateur $\Gamma(1)_\infty$ de ∞ étant $\Gamma(1)_\infty = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a donc une identification $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) = \Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty$. L'ensemble des pointes est en bijection avec $\Gamma\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) = \Gamma\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty$, qui est bien fini car Γ est d'indice fini dans $\Gamma(1)$.

Décrivons plus précisément la compactification $X(\Gamma)$ de $Y(\Gamma)$. Soit

$$\mathscr{H}^* = \mathscr{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C}),$$

que l'on munit d'une topologie comme suit:

• on conserve les ouverts de $\mathscr{H}$.

• Une base de voisinages de ∞ est donné par les $U_T = \{z \in \mathscr{H} | \mathrm{Im}(z) > T\} \cup \{\infty\}$, avec $T > 0$. Une base de voisinages de $\alpha.\infty$ ($\alpha \in \Gamma(1)$) est donnée par les αU_T.

On pose alors

$$X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathscr{H}^*,$$

muni de la topologie quotient et on note $C(\Gamma) = X(\Gamma) \setminus Y(\Gamma)$ l'ensemble des pointes (ou cusps) de $X(\Gamma)$. On montre (c'est un peu pénible...) que $X(\Gamma)$ est un espace topologique séparé, connexe et compact. La partie la plus pénible est le caractère séparé, la connexité est claire, car $X(\Gamma)$ est l'image du connexe $\mathscr{H}^*$. De plus, la compacité se déduit du caractère séparé de $X(\Gamma)$ et du théorème 4.1: si D est le domaine fondamental ci-dessus, l'espace $D \cup \{\infty\}$ est compact (par définition de la topologie sur $\mathscr{H}^*$), il en est donc de même de l'union finie de ses translatés $\cup_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma} \gamma(D \cup \{\infty\})$. Comme $X(\Gamma)$ est l'image continue de cette réunion par la projection canonique, et comme il est séparé (le fait admis ci-dessus...), il est compact.

On peut munir $X(\Gamma)$ d'une structure de surface de Riemann compacte étendant celle sur $Y(\Gamma)$. Si $U \subset X(\Gamma)$ est un ouvert, les fonctions holomorphes sur U sont les fonctions continues $f : U \to \mathbf{C}$ dont la restriction à $U \cap Y(\Gamma)$ est holomorphe. Soit $\Gamma_\infty = \Gamma \cap \Gamma(1)_\infty$, il existe alors un unique entier $h > 0$ tel que $\pm\Gamma_\infty = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & h\mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors $q_h = e^{2i\pi z/h}$ est une coordonée locale en la pointe $\Gamma\infty$.

7 Opérateurs de Hecke

Nous allons travailler dans la suite en niveau

$$\Gamma = \Gamma_1(N),$$

avec $N \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. On écrira donc simplement

$$M_k(N) := M_k(\Gamma_1(N)),\ S_k(N) = S_k(\Gamma_1(N)).$$

Comme $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \simeq (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ via $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \to d$, on a une décomposition

$$M_k(N) = \bigoplus_{\chi(-1)=(-1)^k} M_k(N, \chi),$$

la somme portant sur les caractères de Dirichlet χ modulo N tels que $\chi(-1) = (-1)^k$, avec

$$M_k(N, \chi) = \{f \in M_k(N) |\ f|_k\gamma = \chi(\gamma)f,\ \forall\ \gamma \in \Gamma_0(N)\}.$$

On se propose de construire des algèbres commutatives (de Hecke) $\mathbb{T}^{(N)} \subset \mathbb{T}$ d'endomorphismes des espaces $M_k(N, \chi)$, qui préservent $S_k(N, \chi)$ et dont l'étude des espaces propres simultanés fournit un tas de renseignements sur l'arithmétique des formes modulaires.

7.1 Le formalisme des algèbres de Hecke

Commençons par quelques points assez formels, mais très importants. Soit A un anneau commutatif (typiquement $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{Z}$), Γ un sous-groupe d'un groupe G, ce dernier agissant à droite, de manière A-linéaire sur un A-module M. On suppose que pour tout $g \in G$ l'ensemble $\Gamma\backslash\Gamma g\Gamma$ est fini, i.e. on peut écrire $\Gamma g\Gamma = \coprod_{i=1}^n \Gamma g_i$ pour certains $n \geq 1$ et $g_i \in G$. Notons que l'application $g^{-1}\Gamma g \cap \Gamma\backslash\Gamma \to \Gamma\backslash\Gamma g\Gamma$ envoyant la classe de γ sur celle de $g\gamma$ est bijective, donc l'hypothèse revient à demander que

$$\Gamma_g := \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g \ \ \textbf{est d'indice fini dans}\ \Gamma\ \forall g \in G.$$

Noter par ailleurs que Γ_g est simplement le stabilisateur de $\Gamma g \in \Gamma\backslash G$ dans Γ.

L'exemple dont on aura besoin dans la suite est celui du groupe $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})^+ = \{g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}) |\det(g) > 0\}$ agissant par l'action de poids k sur $M = O(\mathscr{H})$, avec $A = \mathbf{C}$, Γ étant un sous-groupe fini de $\Gamma(1)$. Dans ce cas l'hypothèse précédente est satisfaite, Γ_g étant d'indice fini dans $\Gamma(1)$ pour $g \in G$. En effet, Γ_g est d'indice fini dans $g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma(1)$, qui est d'indice fini dans $g\Gamma(1)g^{-1} \cap \Gamma(1)$, qui est enfin d'indice fini dans $\Gamma(1)$ car on vérifie sans mal qu'il contient un $\Gamma(M)$ pour $M \geq 1$ assez divisible.

Revenons à la situation complètement générale décrite ci-dessus et considérons le A-module $M^\Gamma = \{m \in M | m.\gamma = m, \forall\gamma \in \Gamma\}$ des invariants de M sous Γ. Considérons le A-module $\mathscr{H}(G, \Gamma)$ des fonctions $\Phi : G \to A$ qui sont invariantes par translation à gauche et à droite par Γ (et donc peuvent se voir comme des fonctions sur $\Gamma\backslash G/\Gamma$) et dont le support est fini modulo l'action de Γ par translation à gauche. Grâce à notre hypothèse sur la finitude de l'indice de Γ_g dans Γ, on vérifie sans mal que $\mathscr{H}(G, \Gamma)$ est simplement le A-module engendré par les fonctions indicatrices

$1_{\Gamma g \Gamma}$ de $\Gamma g \Gamma \subset G$, quand g varie dans G. C'est un exercice amusant (ou pas) de vérifier que le produit de convolution

$$(\Phi_1 * \Phi_2)(g) = \sum_{x \in G/\Gamma} \Phi_1(x)\Phi_2(x^{-1}g)$$

munit $\mathscr{H}(G,\Gamma)$ d'une structure de A-algèbre associative (son élément neutre est 1_Γ), pas forcément commutative. De plus, M^Γ devient naturellement un $\mathscr{H}(G,\Gamma)$-module, via

$$m.\Phi := \sum_{g \in \Gamma\backslash G} \Phi(g) \cdot (m.g), \quad \Phi \in \mathscr{H}(G,\Gamma), m \in M^\Gamma.$$

Noter déjà que l'expression à droite a bien un sens, grâce aux hypothèses faites sur Φ et parce que l'on prend $m \in M^\Gamma$ (donc $m.g$ ne dépend que de l'image de g dans $\Gamma\backslash G$). Toute cette discussion un peu formelle est une manifestation d'une technique standard en théorie des représentations, la **réciprocité de Frobenius**, qui fournit dans notre situation une identification $\mathrm{Hom}_{A[G]}(A[\Gamma\backslash G], M) \simeq M^\Gamma$ (on envoie un élément à gauche sur sa valeur en 1), montrant que M^Γ est un module à droite sur $\mathrm{End}_{A[G]}(A[\Gamma\backslash G]) \simeq A[\Gamma\backslash G]^\Gamma \simeq A[\Gamma\backslash G/\Gamma]$, l'action de la double classe $\Gamma g\Gamma$ étant

$$m.(\Gamma g \Gamma) = \sum_{h \in \Gamma\backslash \Gamma g \Gamma} m.h.$$

7.2 L'algèbre de Hecke de niveau N

Revenons maintenant à des affaires plus amusantes et prenons **dans toute la suite** un poids $k \in \mathbf{Z}$, $\Gamma = \Gamma_1(N)$, $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, agissant sur $M = O(\mathscr{H})$ par

$$f|_k g(z) = \frac{\det(g)^{k-1}}{(cz+d)^k} f(g.z),\ g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G.$$

Attention, cela diffère des formules introduites dans le premier paragraphe par un facteur $\det(g)^{k/2-1}$. Bien sûr, tant que $g \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q})$, cela n'a aucune influence, mais on prendra des $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})^+ \setminus \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q})$. La raison de cette normalisation est que les formules sortantes ont des bonnes propriétés d'intégralité.

Dans la situation ci-dessus on a bien sûr $M^\Gamma = FM_k(\Gamma)$, et elle fournit un endomorphisme T_α de cet espace pour tout $\alpha \in G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, via l'action de la double classe $\Gamma\alpha\Gamma$ (autrement dit de la fonction $1_{\Gamma\alpha\Gamma} \in \mathscr{H}(G,\Gamma)$). Concrètement, on a donc

$$T_\alpha(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma} f|_k\gamma, \quad f \in FM_k(\Gamma).$$

Remarquons que cet opérateur n'est rien d'autre qu'un opérateur "trace". En effet, si $f \in FM_k(\Gamma)$, alors clairement $f|_k\alpha \in FM_k(\Gamma_\alpha)$, avec $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$, et $T_\alpha(f)$ est simplement la "trace" de $f|_k\alpha$:

$$T_\alpha(f) = \sum_{\beta \in \Gamma_\alpha\backslash\Gamma} (f|_k\alpha)|_k\beta.$$

Bien sûr, si $f \in M_k(\Gamma)$ (resp. $S_k(\Gamma)$), on a $f|_k\alpha \in M_k(\Gamma_\alpha)$ (resp...) et la formule précédente montre que $T_\alpha(f) \in M_k(\Gamma)$ (resp...). Ainsi l'opérateur T_α de $FM_k(\Gamma)$ préserve les sous-espaces $M_k(N)$ et $S_k(N)$ de $FM_k(\Gamma)$. En particulier la définition suivante a un sens:

Definition 7.1. a) Le p**-ième opérateur de Hecke** T_p sur $M_k(N)$ (ou $S_k(N)$, ou $M_k(N,\chi)$ ou...) est

$$T_p = T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)}.$$

b) **L'algèbre de Hecke pleine (resp. restreinte) de niveau** N $\mathbb{T}$ (resp. $\mathbb{T}^{(N)}$) est le sous-anneau de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(M_k(N))$ engendré par les opérateurs T_p pour tout nombre premier p (resp. uniquement ceux ne divisant pas N). On garde les mêmes notations si l'on remplace $M_k(N)$ par $M_k(N,\chi)$ ou $S_k(N)$ ou $S_k(N,\chi)$.

Pour rendre ces opérateurs plus explicites, par exemple pour calculer le q-développement à l'infini de $T_p(f)$ en fonction de celui de f, on commence par vérifier[5] que

$$\Gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \Gamma = \coprod_{j=0}^{p-1} \Gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \coprod \Gamma\sigma \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

pour un $\sigma \in \Gamma_0(N)$ arbitraire satisfaisant $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ N & p \end{smallmatrix}\right)$, avec la convention que le terme $\Gamma\sigma \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ apparaît uniquement si p ne divise pas N. On en déduit que pour $f \in M_k(N,\chi)$ (avec la convention $\chi(p) = 0$ pour $p \mid N$)

$$T_p f(z) = \sum_{j=0}^{p-1} f|_k \left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)(z) + \chi(p)p^{k-1} f(pz) = U_p f(z) + \chi(p)p^{k-1} V_p f(z),$$

avec

$$U_p f(z) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right), \ V_p f(z) = f(pz).$$

Au niveau du q-développement à l'infini, cela s'écrit pour $f = \sum_n a_n q^n$

$$U_p f = \sum_n a_{np} q^n, \quad V_p f = \sum a_n q^{np},$$

comme le montre un calcul immédiat. On en déduit que

$$a_n(T_p f) = a_{np}(f) + \chi(p)p^{k-1} a_{\frac{n}{p}}(f)$$

avec la convention que le deuxième terme est nul si $p \nmid n$ (ou $p \mid N$). En particulier $a_1(T_p f) = a_p(f)$ et $a_0(T_p f) = (1 + \chi(p)p^{k-1})a_0(f)$.

La formule décrivant les coefficients du q-développement de f en fonction de ceux de f montre immédiatement que les opérateurs T_p et T_q commutent sur $M_k(N,\chi)$ pour tous les premiers p, q. On vient de démontrer:

Théorème 7.1. *a)* $\mathbb{T}$ *et* $\mathbb{T}^{(N)}$ *sont des anneaux commutatifs.*

b) On a $T_p = U_p + \chi(p)p^{k-1} V_p$ *sur* $M_k(N,\chi)$ *(attention* U_p, V_p *ne sont* ***pas*** *des endomorphismes de* $M_k(N,\chi)$*, uniquement de* $O(\mathscr{H})$*!).*

c) Si $f = \sum_n a_n q^n$ *est le* q*-développement de* f *à l'infini, celui de* $T_p(f)$ *est*

$$T_p(f) = \sum_n (a_{np} + \chi(p)p^{k-1} a_{\frac{n}{p}}) q^n.$$

En particulier $a_1(T_p(f)) = a_p(f)$.

[5] C'est élémentaire mais assez pénible, cf. tout livre sur les formes modulaires.

Exercice 7.2. a) Si $f = \sum_n a_n q^n \in M_k(N)$, montrer que $V_p \circ U_p(f) = \sum_{p|n} a_n q^n$.

b) Si $f \in M_k(M)$, montrer que $V_p(f) \in M_k(Mp)$.

c) Soit $f = \sum a_n q^n \in M_k(N)$

i) Si $p \mid N$, montrer que $\sum a_{np} q^n \in M_k(N)$ et $\sum_{p\nmid n} a_n q^n \in M_k(Np)$.

ii) Si $p \nmid N$, montrer que $\sum_{p\nmid n} a_n q^n \in M_k(Np^2)$ (indication: $U_p(f) \in M_k(Np)$ et $V_p \circ U_p(f) \in M_k(Np^2)$).

7.3 Numérologie: les opérateurs T_n

On peut définir des opérateurs U_n, V_n sur $O(\mathscr{H})$ pour tout $n \geq 1$ par les mêmes formules (remplacer p par n), mais l'analogue T_n des opérateurs T_p est subtil. Il y a plusieurs façons de les définir, mais je n'en trouve pas une naturelle (si $N = 1$ il y a des interprétations géométriques bien jolies de ces opérateurs, cf. la discussion dans les notes de Gaëtan Chenevier). Pour éviter beaucoup de numérologie avec des doubles classes, je vais prendre la définition obtenue à partir des opérateurs U_n et V_n, en posant

$$T_n = \sum_{d|n} \chi(d) d^{k-1} V_d \circ U_{n/d}.$$

Cela définit un endomorphisme de $O(\mathscr{H})$, mais ce n'est nullement évident qu'il préserve $M_k(N, \chi)$. En fait, nous allons même voir un énoncé beaucoup plus fort, cf. théorème 6.3.

Pour cela, on commence par montrer que les T_n sont multiplicatifs par rapport à n. Il vaut mieux se restreindre à l'espace $O(\mathscr{H})^1$ des fonctions 1-périodiques dans $O(\mathscr{H})$, qui est trivialement stable par les U_n, V_n et donc par les T_n.

Proposition 7.1. *On a* $T_m \circ T_n = T_{mn}$ *dans* $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(O(\mathscr{H})^1)$ *quand* $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$.

Proof. Un calcul immédiat montrer que $U_m U_n = U_{mn}$ et $V_{mn} = V_m V_n$ en tant qu'opérateurs sur $O(\mathscr{H})$. Ensuite, je dis que si $\mathrm{pgcd}(d, n) = 1$, alors $U_n V_d = V_d U_n$ sur $O(\mathscr{H})^1$. En effet, si $f \in O(\mathscr{H})^1$, on a

$$U_n V_d f(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} V_d f(\frac{z+j}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{dz+dj}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{dz+j}{n}) = V_d U_n f(z),$$

car les restes modulo n des nombres dj $(0 \leq j \leq n-1)$ sont une permutation de $0, 1, ..., n-1$. Si $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, on a donc dans $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(O(\mathscr{H})^1)$

$$T_m \circ T_n = \sum_{d|m} \sum_{e|n} \chi(de)(de)^{k-1} V_d U_{m/d} V_e U_{n/e} =$$

$$= \sum_{d|m, e|n} \chi(de)(de)^{k-1} V_{de} U_{mn/(de)} = \sum_{d|mn} \chi(d) d^{k-1} V_d U_{mn/d} = T_{mn}.$$

□

Il suffit donc de comprendre les opérateurs T_{p^r} quand p est premier et $r \geq 0$. Ils sont décrits par:

Proposition 7.2. *On a* $T_p T_{p^r} = \chi(p) p^{k-1} T_{p^{r-1}} + T_{p^{r+1}}$.

Proof. Notons pour simplifier $U = U_p, V = V_p$ et $x = \chi(p)$, donc par définition

$$T_{p^r} = \sum_{j=0}^{r} x^j p^{j(k-1)} V^j U^{r-j}.$$

D'autre part, on a $UV = \mathrm{id}$ (immédiat) et donc, par un calcul brutal, mais évident

$$T_p T_{p^r} = U^{r+1} + \sum_{j=1}^{r} x^j p^{j(k-1)} V^{j-1} U^{r-j} + \sum_{j=1}^{r+1} x^j p^{j(k-1)} V^j U^{r+1-j}$$

$$= xp^{k-1} \sum_{j=0}^{r-1} x^j p^{j(k-1)} V^j U^{r-1-j} + \sum_{j=0}^{r+1} x^j p^{j(k-1)} V^j U^{r+1-j} = xp^{k-1} T_{p^{r-1}} + T_{p^{r+1}}.$$

□

Les deux propositions s'expriment de manière beaucoup plus élégante en utilisant une série génératrice (de Dirichlet):

Théorème 7.3. *L'opérateur T_n préserve le sous-espace $M_k(N,\chi)$ de $O(\mathscr{H})^1$, il est même dans le sous-anneau (commutatif!) de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(M_k(N,\chi))$ engendré par l'image de χ et $\mathbb{T}$, et on a une égalité de séries de Dirichlet à coefficients dans cet anneau*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{T_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - T_p p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s}}.$$

Décrivons le q-développement à l'infini de $T_n(f)$ à partir de celui de f:

Proposition 7.3. *Si $f = \sum_j a_j q^j \in M_k(N,\chi)$, alors $T_n(f) = \sum_m b_m q^n$, avec*

$$b_m = \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(m,n)} \chi(d) d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).$$

En particulier $b_1 = a_n$, i.e. $a_1(T_n(f)) = a_n(f)$ pour tout n.

Proof. Si $F = \sum c_n q^n \in O(\mathscr{H})^1$, écrivons $c_n = a_n(F)$. Il est clair que $a_n(V_d(F)) = 1_{d|n} a_{\frac{n}{d}}(F)$ et un petit calcul montre que $a_n(U_d(F)) = a_{nd}(F)$. Ainsi

$$a_m(T_n(f)) = \sum_{d|n} \chi(d) d^{k-1} a_m(V_d(U_{n/d}(f))) =$$

$$= \sum_{d|n} \chi(d) d^{k-1} 1_{d|m} a_{m/d}(U_{n/d}(f)) = \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(m,n)} \chi(d) d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).$$

□

Exercice 7.4. b) Montrer que

$$T_m \circ T_n = \sum_{d \mid \mathrm{pgcd}(m,n)} d^{k-1} \chi(d) T_{\frac{mn}{d^2}}$$

en tant qu'opérateurs sur $M_k(N,\chi)$.

c) Si $f \in M_k(N,\chi)$, alors

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n, a>0} \sum_{b=0}^{d-1} \frac{\chi(a)}{d^k} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

8 Le produit de Petersson, diagonalisation de $\mathbb{T}^{(N)}$

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les opérateurs $T_n \in \mathrm{End}(S_k(N,\chi))$, avec n **premier à** N sont simultanément diagonalisables. Pour cela on construira un produit hermitien sur $S_k(N,\chi)$ pour lequel ces opérateurs sont normaux (i.e. commutent à leur adjoint). On verra plus tard une interprétation nettement plus naturelle de tout ceci, en termes d'espaces L^2.

La mesure $d\mu(z) = \frac{dxdy}{y^2}$ sur $\mathscr{H}$ est invariante[6] sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})^+$ et descend en une mesure sur $Y(1) = \Gamma(1)\backslash\mathscr{H}$. De manière concrète (mais pas toujours utile...), on a

$$\int_{Y(1)} f(x)d\mu(x) = \int_D f(z)d\mu(z)$$

pour $f \in C_c(Y(1))$ (vue comme fonction sur $\mathscr{H}$, invariante par $\Gamma(1)$), où $D = \{z \in \mathscr{H} | |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2, |z| \geq 1\}$ est le domaine fondamental usuel.

Exercice 8.1. Vérifier que $\int_{Y(1)} d\mu(x) < \infty$. Calculer explicitement sa valeur.

Si Γ est un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$, la mesure μ sur $\mathscr{H}$ descend aussi en une mesure sur $Y(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathscr{H}$, et on a

$$\int_{Y(\Gamma)} f(z)d\mu(z) = \int_{Y(1)} \left(\sum_{\gamma \in \bar{\Gamma}\backslash\overline{\Gamma(1)}} f(\gamma.z) \right) d\mu(z) \qquad (*)$$

pour toute fonction intégrable f, $\bar{\Gamma}$ étant l'image de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$.

Ensuite, si $f, g \in M_k(\Gamma)$, au moins une étant dans $S_k(\Gamma)$, on a $fg \in S_{2k}(\Gamma)$, donc φ_{fg} est bornée sur $\mathscr{H}$, où l'on rappelle que l'on pose

$$\varphi_F(z) = |F(z)|\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}}.$$

On en déduit que la fonction

$$\Phi_{f,g}(z) = f(z)\overline{g(z)}\mathrm{Im}(z)^k$$

est continue et bornée sur $\mathscr{H}$. L'invariance de f et g par l'action de poids k montre que $\Phi_{f,g}$ est Γ-invariante, donc descend en une fonction continue bornée sur $Y(\Gamma)$, en particulier intégrable car $Y(\Gamma)$ est de volume fini d'après l'exercice précédent et la discussion ci-dessus. Cela donne un sens à la définition suivante:

Definition 8.1. Le **produit de Petersson de** f **et** g est

$$\langle f, g\rangle_\Gamma = \frac{1}{V_\Gamma} \int_{Y(\Gamma)} \Phi_{f,g}(z)d\mu(z),$$

où $V_\Gamma = \int_{Y(\Gamma)} d\mu(z) < \infty$.

La quantité $\langle f, g\rangle_\Gamma$ ne dépend pas du choix de Γ tel que f et g soient toutes les deux modulaires de niveau Γ, une propriété cruciale de ce produit:

[6] Exercice, utiliser le fait que $dxdy = \frac{dzd\bar{z}}{-2i}$ et les formules $d(\alpha.z) = \frac{\det(\alpha)dz}{(cz+d)^2}$ et $\mathrm{Im}(\alpha.z) = \frac{\det(\alpha)\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

Proposition 8.1. *Si* $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$, *alors* $V_\Gamma = [\overline{\Gamma(1)} : \bar\Gamma] V_{\Gamma(1)}$ *et* $\langle f, g\rangle_\Gamma = \langle f, g\rangle_{\Gamma'}$ *pour* $f, g \in M_k(\Gamma)$, *au moins une étant cuspidale.*

Proof. Le premier point découle de l'identité $(*)$ en prenant la fonction constante 1. Ensuite, on a (noter que $\Phi_{f,g} = \Phi_{f,g} \circ \gamma$ pour $\gamma \in \Gamma$)

$$\langle f, g\rangle_{\Gamma'} = \frac{1}{V_{\Gamma'}} \int_{\Gamma'\backslash\mathscr{H}} \Phi_{f,g} d\mu = \frac{1}{V_{\Gamma'}} \int_{\Gamma\backslash\mathscr{H}} \left(\sum_{\gamma \in \bar\Gamma'\backslash\bar\Gamma} \Phi_{f,g} \circ \gamma \right) d\mu$$

$$= \frac{[\bar\Gamma : \bar\Gamma']}{V_{\Gamma'}} \int_{Y(\Gamma)} \Phi_{f,g} d\mu = \frac{[\bar\Gamma : \bar\Gamma'] V_\Gamma}{V_{\Gamma'}} \langle f, g\rangle_\Gamma = \langle f, g\rangle_\Gamma.$$

□

On se permettra donc d'écrire simplement $\langle f, g\rangle$ pour le produit de Petersson $\langle f, g\rangle_\Gamma$, pour tout choix de niveau commun Γ pour f et g. Le résultat suivant n'est **pas** simplement un calcul formel, contrairement à ce qu'on pourrait penser...

Théorème 8.2. *(Petersson) Si* Γ *est arithmétique dans* $\Gamma(1)$ *et* $\alpha \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, *l'adjoint de* T_α *sur* $S_k(\Gamma)$ *est* T_{α^*}, *où* $\alpha^* = \det(\alpha) \cdot \alpha^{-1}$.

Proof. On va le faire en deux étapes, le point crucial étant[7]

Lemme 8.1. *Soit* $\Gamma \subset \Gamma(1)$ *arithmétique,* $\alpha \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ *et* $g \in S_k(\Gamma_\alpha)$. *Alors* $V_{\Gamma_\alpha} = V_{\Gamma_{\alpha^*}}$ *et* $\langle f|_k\alpha, g\rangle = \langle f, g|_k\alpha^*\rangle$.

Proof. Notons que $(\alpha^*)^{-1}\Gamma_\alpha\alpha^* = \Gamma_{\alpha^*}$, donc $g|_k\alpha^* \in S_k(\Gamma_{\alpha^*})$. Pour la première égalité, noter que $Y(\Gamma_\alpha) \to Y(\Gamma_{\alpha^*})$ envoyant la classe de z sur celle de $\alpha.z$ est un homéomorphisme et $d\mu(\alpha.z) = d\mu(z)$, d'où $V_{\Gamma_\alpha} = V_{\Gamma_{\alpha^*}}$. Pour le deuxième point, un calcul brutal sans problème montre que

$$\Phi_{f,g|_k\alpha^*}(\alpha.z) = \Phi_{f|_k\alpha,g}(z).$$

On obtient le résultat en utilisant encore l'homéomorphisme ci-dessus. □

La deuxième partie de la preuve est purement combinatoire, mais assez astucieuse. Ecrivons $\Gamma\alpha\Gamma = \coprod \Gamma\alpha_i$ et posons $\tilde\Gamma = \cap\Gamma_{\alpha_i}$. On a $f|_k\alpha_i \in S_k(\Gamma_i) \subset S_k(\tilde\Gamma)$ si $f \in S_k(\Gamma)$. Le lemme ci-dessus fournit alors pour $g \in S_k(\Gamma) \subset S_k(\tilde\Gamma)$

$$\langle T_\alpha f, g\rangle = \langle \sum f|_k\alpha_i, g\rangle = \sum \langle f|_k\alpha_i, g\rangle = \sum \langle f, g|_k\alpha_i^*\rangle.$$

Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir α_i de telle sorte que l'on ait aussi $\Gamma\alpha^*\Gamma = \coprod \Gamma\alpha_i^*$, car le même argument donnera $\sum \langle f, g|_k\alpha_i^*\rangle = \langle f, T_{\alpha^*} g\rangle$.

On gagne si on montre qu'il existe α_i tels que $\Gamma\alpha\Gamma = \coprod \Gamma\alpha_i = \coprod \alpha_i\Gamma$, car alors $\det\alpha = \det\alpha_i$, donc

$$\Gamma\alpha^*\Gamma = \det\alpha\Gamma\alpha^{-1}\Gamma = \det\alpha(\Gamma\alpha\Gamma)^{-1} = \coprod \det\alpha\Gamma\alpha_i^{-1} = \coprod \Gamma\alpha_i^*.$$

Mais $\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma$ est en bijection avec $\Gamma_\alpha\backslash\Gamma$ (via $\gamma \in \Gamma_\alpha\backslash\Gamma \to \alpha\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma$) et $\Gamma\alpha\Gamma/\Gamma$ est en bijection avec $\Gamma_{\alpha^*}\backslash\Gamma$, via $\gamma \in \Gamma_{\alpha^*}\backslash\Gamma \to \gamma\alpha$. Or le lemme crucial fournit $V_{\Gamma_\alpha} = V_{\Gamma_{\alpha^*}}$, qui se traduit (prop. 7.1) finalement en $|\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma| = |\Gamma\alpha\Gamma/\Gamma|$. On peut donc écrire $\Gamma\alpha\Gamma = \coprod_{i=1}^n \Gamma u_i = \coprod_{i=1}^n v_i\Gamma$ pour certains n et u_i, v_i. Pour tout i on a $\Gamma u_i \cap v_i\Gamma \neq \emptyset$, sinon $\Gamma u_i \subset \cup_{j\neq i} v_j\Gamma$, donc $\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma u_i\Gamma \subset \cup_{j\neq i} v_j\Gamma$, ce qui est absurde. Si on choisit $\alpha_i \in \Gamma u_i \cap v_i\Gamma$, alors $\Gamma\alpha\Gamma = \coprod \alpha_i\Gamma = \coprod \Gamma\alpha_i$. □

[7] Rappelons que $\Gamma_\alpha = \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma$; on a donc $f|_k\alpha \in S_k(\Gamma_\alpha)$ si $f \in S_k(\Gamma)$.

Nous sommes presqu'arrivés au bout de nos peines: le résultat suivant montre que les T_n sont normaux et ils commutent deux à deux, donc ils sont simultanément diagonalisables.

Théorème 8.3. *Pour n premier à N, l'adjoint de T_n sur $S_k(N,\chi)$ est $\chi(n)^{-1}T_n$, i.e. pour $f,g\in S_k(N,\chi)$ on a $\langle T_n f, g\rangle = \chi(n)\langle f, T_n g\rangle$. Les $T\in\mathbb{T}^{(N)}$ sont simultanément diagonalisables.*

Proof. Par multiplicativité des T_n on se ramène au cas de T_{p^r}, avec p premier à N. En utilisant la proposition 6.2 on se ramène ensuite à $r=1$. Comme $T_p = T_{\alpha_p}$, avec $\alpha_p = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)$, le théorème précédent fournit $T_p^* = T_{\alpha_p^*} = T_{\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}$. Pour comprendre la double classe[8] $\Gamma\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Gamma$, introduisons une matrice $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}p&n\\N&m\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(N)$ (elle existe car p,N sont premiers entre eux!) et posons $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\sigma\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&n\\N&mp\end{smallmatrix}\right)$. Alors $\gamma\in\Gamma$ et (rappelons que Γ est distingué dans $\Gamma_0(N)$)

$$\Gamma\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Gamma = \Gamma\gamma\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Gamma = \Gamma\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\sigma\Gamma = \Gamma\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\Gamma\sigma,$$

donc si $\Gamma\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\Gamma = \coprod \Gamma\alpha_i$, alors $\Gamma\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Gamma = \coprod\Gamma\alpha_i\sigma$, et au bout du compte

$$T_p^* f = \sum f|_k\alpha_i\sigma = (T_p f)|_k\sigma = \chi(m)T_p(f).$$

Comme $mp\equiv 1 \pmod N$, on a $\chi(m)=\chi(p)^{-1}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Prenons d'abord $N=1$. Les opérateurs T_n sont alors auto-adjoints pour le produit de Petersson, leurs valeurs propres sont donc réelles, et $S_k = S_k(1)$ possède une base orthogonale de vecteurs propres pour tous les T_n. Si f est un tel vecteur propre, disons $T_n(f)=\lambda_n f$, en regardant le coefficient de q dans le q-développement on en déduit que $a_n(f)=\lambda_n a_1(f)$. En particulier $a_1(f)\neq 0$ (car f n'est pas nulle) et, quitte à re-normaliser f, on peut supposer que $a_1(f)=1$ (on dit alors que f est **normalisée**). Mais alors $\lambda_n = a_n(f)$, i.e. $T_n(f)=a_n(f)f$. Cela montre que **les $\mathbb{T}$-espaces propres simultanés sont de dimension** 1.

Tout ceci tombe en défaut si $N>1$. D'une part, pour $p\mid N$ l'opérateur $T_p = U_p$ n'est plus forcément diagonalisable sur $S_k(N)$. D'autre part, les espaces propres simultanés pour l'action de $\mathbb{T}^{(N)}$ ne sont plus de dimension 1 en général. En effet, prenons un diviseur $M<N$ de N et $f\in S_k(M)$ propre pour $\mathbb{T}^{(M)}$. Alors les fonctions $f(dz)$, pour d diviseur de N/M sont dans le même espace propre et forment une famille libre (cf. discussion précédant le th. 7.5). Bien sûr:

• les espaces propres simultanés pour l'action de $\mathbb{T}$-s'il en existe!-sont forcément de dimension 1, par le même argument qu'avant: les coefficients a_n sont déterminés par le système de valeurs propres.

• Un espace $\mathbb{T}^{(N)}$-propre de dimension 1 est stable par $\mathbb{T}$ et donc est un espace propre pour $\mathbb{T}$.

Tout le problème vient du fait que pour $N>1$ il est tout à fait possible d'avoir $f\in S_k(N)$ propre pour $\mathbb{T}^{(N)}$ et telle que $a_1(f)=0$, ce qui équivaut à $a_n(f)=0$ pour tout n premier à N. Par exemple, si $d>1$ est un diviseur de N et $g\in S_k(N/d)$, la fonction $f(z)=g(dz)$ a cette propriété. La théorie d'Atkin-Lehner (qui est tout sauf une trivialité...) dit essentiellement que ceci est la seule obstruction:

[8] Rappelons que $\Gamma = \Gamma_1(N)$

Théorème 8.4. *(Atkin-Lehner) Soit $f \in S_k(N)$, $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$. S'il existe $D \geq 1$ tel que $a_n = 0$ pour tout n premier à D, alors $f(z) = \sum_{p|N} g_p(pz)$ pour certaines $g_p \in S_k(N/p)$.*

Ce théorème est fort délicat et on l'admettra (la preuve, 4 pages d'astuces et contorsions avec les opérateurs U_p et V_p, n'est pas vraiment éclairante). L'énoncé ci-dessus suggère que l'espace

$$S_k(N)^{\mathrm{old}} := \sum_{p|N} S_k(N/p)|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{M|N, M\neq N} \sum_{d|N/M} S_k(M)|_k \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

joue un rôle important, et son orthogonal, **l'espace des formes nouvelles**

$$S_k(N)^{\mathrm{new}} := (S_k(N)^{\mathrm{old}})^{\perp}$$

joue un rôle encore plus important[9].

Si $dM \mid N$, la flèche $S_k(M) \to S_k(N), f \to f|_k \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ commute (cf. le q-développement) à l'action des opérateurs de Hecke T_n avec n premier à d, en particulier à l'action de $\mathbb{T}^{(N)}$. Cela montre que $S_k(N)^{\mathrm{old}}$ est stable par $\mathbb{T}^{(N)}$ et si $f \in S_k(M)$ est $\mathbb{T}^{(M)}$-propre, alors les $f(dz)$ (pour $dM \mid N$) sont $\mathbb{T}^{(N)}$-propres dans $S_k(N)$, avec le même système de valeurs propres que f. Le calcul de l'adjoint des T_n (avec n premier à N) permet d'en déduire que $S_k(N)^{\mathrm{new}}$ est stable par $\mathbb{T}^{(N)}$, et donc possède une base orthogonale de vecteurs $\mathbb{T}^{(N)}$-propres. En fait, on a mieux:

Théorème 8.5. *(Atkin-Lehner) a) $S_k(N)^{\mathrm{old}}$ et $S_k(N)^{\mathrm{new}}$ sont stables sous $\mathbb{T}$.*

b) Si $f \in S_k(N)^{\mathrm{new}}$ est $\mathbb{T}^{(ND)}$-propre pour un $D \geq 1$, alors $a_1(f) \neq 0$.

*c) Supposons que $f \in S_k(N)^{\mathrm{new}}$ est **primitive**, i.e. $a_1(f) = 1$ et f est $\mathbb{T}^{(N)}$-propre. Alors f est $\mathbb{T}$-propre, et donc $T_n(f) = a_n f$ pour tout n.*

Exercice 8.6. Démontrer b) et c) en admettant le théorème 7.4.

9 Fonctions L des formes modulaires

Pour simplifier, on travaille la plupart du temps en niveau $\Gamma(1)$, mais ce qui suit s'adapte au cas général (cf. exercices), à l'exception du théorème réciproque 8.3 de Hecke ci-dessous, qui est dû à Weil dans le cas général et dont la preuve est nettement plus délicate.

Une forme $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in S_k(N, \chi)$ est déterminée par sa **fonction** L

$$L(f, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s},$$

qui converge dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$ grâce à la borne de Hecke, et y définit une fonction holomorphe. Notons que si f est $\mathbb{T}$-propre et **normalisée**, i.e. $a_1 = 1$, alors le théorème 6.3 fournit immédiatement

$$L(f, s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_p \cdot p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s}}.$$

[9] C'est l'analogue pour $\mathbf{GL}_2$, i.e. dans la théorie des formes modulaires de l'ensemble des caractères de Dirichlet **primitifs** pour $\mathbf{GL}_1$.

Cependant, si est seulement $\mathbb{T}^{(N)}$-propre et normalisée, tout ce que l'on peut dire est que

$$L(f,s) = \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1 - a_p \cdot p^{-s} + \chi(p)p^{k-1-2s}} \cdot \sum_{n | N^\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

i.e. on n'a aucun contrôle sur les coefficients dont l'indice a tous ses facteurs premiers parmi ceux de N. Cette discussion combinée avec celle du paragraphe ci-dessus fournit le beau:

Théorème 9.1. *(Atkin-Lehner) L'espace $S_k(N,\chi)^{\text{new}}$ possède une base orthogonale de formes primitives. Si $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ est primitive, on a une factorization de la fonction L en produit Eulerien*

$$L(f,s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - a_p \cdot p^{-s} + \chi(p)p^{k-1-2s}}.$$

En particulier, comme $S_{12} := S_{12}(\Gamma(1))$ est de dimension 1, $\Delta \in S_{12}$ est automatiquement $\mathbb{T}$-propre et on obtient ainsi

$$L(\Delta,s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}.$$

Ainsi, en écrivant

$$\Delta = q \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24} = \sum_{n\geq 1} \tau(n) q^n,$$

la suite $\tau(n)$ est multiplicative, ce qui n'est nullement évident, et

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1}),$$

encore moins évident... Ces résultats avaient été conjecturés par Ramanujan et démontrés par Mordell, mais le formalisme a été ensuite dégagé par Hecke. Ramanujan avait aussi conjecturé que

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}},$$

conjecturé qui a fallu atteindre le tour de force de Deligne. Il a prouvé de manière plus générale que si $f \in S_k(N,\chi)$ est primitive, alors $|a_p(f)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$ (un cas particulier mais hautement important de la fameuse **conjecture de Ramanujan-Petersson**). On ne peut rien dire sur la preuve dans ces notes, sauf qu'elle utilise **beaucoup** de géométrie algébrique très dure...

La **fonction L complète de f** est

$$\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s),$$

où $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ est la fonction Γ. Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 9.2. *(Hecke) La fonction $\Lambda(f,s)$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier, bornée dans les bandes verticales*[10] *et vérifiant l'équation fonctionnelle*

$$\Lambda(f,s) = i^k \Lambda(f, k-s).$$

[10] Autrement dit dans toute région $\mathrm{Re}(s) \in [a,b]$, avec $a \leq b \in \mathbf{R}$.

La preuve de ce théorème fait intervenir une construction très utile. Soit Φ : $\mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C}$ une fonction C^∞ telle que $\Phi(t) = O(e^{-ct})$ quand $t \to \infty$ et $\Phi(t) = O(t^{-v})$ quand $t \to 0$ (pour des $c, v > 0$ convenables) La **transformée de Mellin** de Φ est

$$M\Phi(s) = \int_0^\infty \Phi(t) t^s \frac{dt}{t}.$$

Si C est tel que $|\Phi(t)| \leq Ce^{ct}$ pour $t \geq 1$ et $|\Phi(t)| \leq Ct^{-v}$ pour $0 < t \leq 1$, on a

$$\int_0^\infty |\Phi(t)t^s| \frac{dt}{t} \leq C(\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(s)-v-1} dt + \int_1^\infty e^{-ct} t^{\mathrm{Re}(s)-1} dt),$$

ce qui montre que $M\Phi$ est bien définie pour $\mathrm{Re}(s) > v$, holomorphe dans ce demi-plan, et bornée dans les bandes verticales de ce demi-plan.

Prenons alors $\Phi(t) = f(it) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-2\pi nt}$. Il est clair que $\Phi(t) = O(e^{-2\pi t})$ quand $t \to \infty$, et on a vu que $\Phi(t)t^{k/2}$ est bornée sur $\mathbf{R}_{>0}$. De plus[11] pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$ on a

$$M\Phi(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n\geq 1} a_n e^{-2\pi nt} \right) t^s \frac{dt}{t} = \sum_{n\geq 1} a_n \int_0^\infty e^{-2\pi nt} t^s \frac{dt}{t} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(2\pi n)^s} \Gamma(s) = \Lambda(f, s).$$

Cela fournit la première partie du théorème. Pour la deuxième, il faut une nouvelle idée: on écrit

$$M\Phi(s) = \int_0^1 \Phi(t) t^s \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \Phi(t) t^s \frac{dt}{t}$$

et on fait un changement de variable $t = 1/x$ dans la première intégrale, d'où

$$M\Phi(s) = \int_1^\infty \left(\Phi(1/x) x^{-s} + \Phi(x) x^s \right) \frac{dx}{x}.$$

La modularité de f fournit $f(-1/z) = z^k f(z)$, qui se traduit par $\Phi(1/t) = i^k t^k \Phi(t)$, donc

$$M\Phi(s) = \int_1^\infty \Phi(x)(i^k x^{k-s} + x^s) \frac{dx}{x}.$$

En se rappelant que k est pair (donc $i^{2k} = 1$), sinon il n'y a rien à faire, on voit tout de suite que $M\Phi(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, vérifiant $M\Phi(s) = i^k M\Phi(k - s)$, ce qui permet de conclure la preuve du théorème.

La preuve du théorème suivant est plus délicate.

Théorème 9.3. *(théorème réciproque de Hecke) Soit $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ une fonction holomorphe sur $\mathscr{H}$, avec $a_n = O(n^v)$ pour un certain $v > 0$. Supposons que la fonction*

$$\Lambda(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s), \quad L(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

possède un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, borné dans les bandes verticales et satisfaisant $\Lambda(s) = i^k \Lambda(k - s)$ pour $s \in \mathbf{C}$. Alors $f \in S_k(\Gamma(1))$.

[11] On laisse au lecteur les justifications faciles concernant l'interversion somme/intégrale...

Proof. Il s'agit de voir que $f(-1/z) = z^k f(z)$, ce qui se ramène (par prolongement analytique) à vérifier que $\Phi(1/t) = i^k t^k \Phi(t)$, où $\Phi(t) = f(it) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-2\pi n t}$. Noter que les considérations précédentes s'appliquent à Φ: cette fois $M\Phi$ est définie et holomorphe dans $\mathrm{Re}(s) > 1 + v$, car l'hypothèse $a_n = O(n^v)$ force (exercice) $\Phi(t) = O(t^{-v-1})$ pour $t \to 0$. De plus, le même calcul que ci-dessus montre que $\Lambda(s) = M\Phi(s)$. Le point essentiel est que l'on peut récupérer Φ à partir de $M\Phi$ par la formule d'inversion (cf. exercices ci-dessous pour l'argument, qui est essentiellement une inversion de Fourier déguisée)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M\Phi(s)t^{-s}ds = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \Lambda(s)t^{-s}ds, \quad \sigma > 1+v, t > 0.$$

On a donc (pour σ comme avant)

$$(it)^{-k}\Phi(1/t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} i^{-k}\Lambda(s)t^{-(k-s)}ds =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=k-\sigma} i^{-k}\Lambda(k-s)t^{-s}ds = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=k-\sigma} \Lambda(s)t^{-s}ds$$

et il suffit de montrer que $\int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \Lambda(s)t^{-s}ds = \int_{\mathrm{Re}(s)=k-\sigma} \Lambda(s)t^{-s}ds$. La fonction $F(s) = \Lambda(s)t^{-s}$ est holomorphe. En considérant l'intégrale sur le rectangle de sommets $(\sigma, T), (k-\sigma, T), (k-\sigma, -T), (\sigma, -T)$ avec T assez grand, il suffit de vérifier que $\lim_{|T|\to\infty} \int_{k-\sigma}^{\sigma} F(u+iT)du = 0$. C'est assez délicat.

On a $\Lambda(s) = M\Phi(s) = \frac{-1}{s}M\Phi'(s)$, ce qui permet d'obtenir $\Lambda(s) = O(1/|s|)$ quand $|s| \to \infty$, en restant sur $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ (fixé). Par l'équation fonctionnelle, c'est aussi vrai sur $\mathrm{Re}(s) = k - \sigma$. Le théorème de Phragmen-Lindelöf[12] montre alors que $|\Lambda(s)| = O(1/|s|)$ uniformément sur la bande $k - \sigma \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma$. On a donc

$$|F(u+iT)| = t^{-u}|\Lambda(u+iT)| = O(1/T)$$

uniformément en $u \in [k-\sigma, \sigma]$, ce qui montre bien que $\lim_{|T|\to\infty} \int_{k-\sigma}^{\sigma} F(u+iT)du = 0$ et finit la preuve du théorème. □

Exercice 9.4. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes tels que $a_n = O(n^v)$ pour un certain $v > 0$. Soit

$$L(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}, \quad \Phi(t) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-nt}, t > 0.$$

a) Montrer que Φ est C^∞ sur $]0, \infty[$ et que $\Phi(t) = O(e^{-t})$ pour $t \to \infty$, $\Phi(t) = O(t^{-v-1})$ pour $t \to 0$.

b) Soit $M\Phi(s) = \int_0^\infty \Phi(t)t^s \frac{dt}{t}$. Montrer qu'elle est bien définie et holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + v$, et que $M\Phi(s) = \Gamma(s)L(s)$.

c) Vérifier que $M\Phi(c+iu) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{ixu}dx$ pour $c > 1+v$. En déduire la formule d'inversion pour $t > 0$ et $c > 1 + v$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=c} M\Phi(s)t^{-s}ds.$$

[12] Si F est holomorphe dans un ouvert contenant la bande $\mathrm{Re}(s) \in [a, b]$, et si F est bornée dans la bande, avec $|F(s)| = O(|\mathrm{Im}(s)|^\alpha)$ sur $\mathrm{Re}(s) = a$ et $\mathrm{Re}(s) = b$, alors cette estimée est vraie uniformément sur toute la bande.

d) Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 1+v+j$ alors

$$M\Phi(s) = \frac{(-1)^j}{s(s+1)...(s+j-1)} M\Phi^{(j)}(s),$$

et en déduire que $M\Phi(s) = \frac{1}{|s|^j}$ quand $|s| \to \infty$ et s reste dans une bande verticale contenue dans $\mathrm{Re}(s) > 1+v+j$.

e) Supposons que $\Phi(1/t) = t^k\Psi(t)$, avec $k \in \mathbf{R}$, où Ψ est une fonction du même genre que Φ, i.e. $\Psi(t) = \sum_{n\geq 1} b_n e^{-nt}$, avec $b_n = O(n^w)$. Montrer que $M\Phi$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, vérifiant $M\Phi(s) = M\Psi(k-s)$.

Exercice 9.5. (Hecke) Soit $q = e^{2i\pi z}$, a_n, b_n des nombres complexes tels que $a_n = O(n^v), b_n = O(n^v)$ pour un $v > 0$, et soient $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$, $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n q^n$. On suppose que $g(z) = (\sqrt{N}z)^{-k} f(-\frac{1}{NZ})$ et on pose

$$L(f,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}, \quad \Lambda(f,s) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L(f,s).$$

Montrer que $\Lambda(f,s), \Lambda(g,s)$ possèdent un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$, avec $\Lambda(f,s) = i^k\Lambda(g,k-s)$. Indication: regarder les fonctions $\Phi(t) = f(it/\sqrt{N})$ et $\Psi(t) = g(it/\sqrt{N})$ et noter que $\Phi(1/t) = (it)^k\Psi(t)$.

Exercice 9.6. Soit $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$ un caractère de Dirichlet et $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ son conjugué complexe. Soit $w_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Montrer que l'application $f \to f|_k w_N = (z \to (\sqrt{N}z)^{-k} f(-1/(Nz)))$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $S_k(N,\chi) \simeq S_k(N,\bar{\chi})$, en particulier elle induit une involution de $S_k(\Gamma_0(N))$.

b) En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $f \in S_k(N,\chi)$, alors $\Lambda(f,s)$ possède un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$, avec l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f,s) = i^k\Lambda(k-s, f|_k w_N).$$