What is... une forme automorphe?

Le but de ce cours est de définir la notion de forme automorphe et d'énoncer un certain nombre de résultats fondamentaux les concernant, qui seront démontrés dans les cours à venir. Ce qui suit comporte donc beaucoup d'énoncés et (trop) peu de démonstrations, qui sont souvent fort délicates et sur lesquelles on reviendra dans des cours prochains.

Il me semble que la manière la plus naturelle de voir les formes automorphes est via la théorie des représentations. Une raison est la suivante: l'action transitive de $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathscr{H}$ induit un homéomorphisme $G/K \simeq \mathscr{H}$, où $K = \mathbf{SO}(2)$, un sous-groupe compact maximal de G. Si Γ est un sous-groupe arithmétique de $\Gamma(1)$ (ou un sous-groupe discret de G arbitraire), on peut considérer les fonctions sur $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ comme des fonctions sur $\Gamma\backslash G$ invariantes par K. L'holomorphie d'une telle fonction sur $\mathscr{H}$ (équations de Cauchy-Riemann) revient à certaines équations différentielles satisfaites par la fonction correspondante sur G.

Cela nous amène naturellement à étudier la représentation de G sur $C(\Gamma\backslash G)$. Par une philosophie générale (due à Harish-Chandra), l'étude se fait en regardant la restriction à K, ainsi que l'action de l'algèbre de Lie de G sur les vecteurs lisses de la représentation, qui sont ici $C^\infty(\Gamma\backslash G)$. Il sera cependant très utile (pour pouvoir prouver quelque chose en fin de compte...) de se placer dans un cadre assez général au départ, ce qui nous amène à nous introduire bon nombre d'objets... La définition d'une forme automorphe ne viendra qu'à la fin de ce cours, bien qu'elle ne soit pas très compliquée (mais assez peu naturelle-pour moi!- sans une discussion préliminaire).

1 Abstract nonsense

Soit G un groupe **raisonnable**, i.e. un groupe topologique localement compact, unimodulaire[1], dénombrable à l'infini (réunion croissante dénombrable de compacts). Tous les groupes étudiés dans ce cours sont de ce type. Des exemples importants sont $G = \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ (ou $G = \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$), mais aussi $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ ou $\mathbf{GL}_n(\mathbf{A})$ ($\mathbf{A}$ étant les adèles de $\mathbf{Q}$, animal pas encore introduit...).

Rappelons qu'un espace de Fréchet (complexe) est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable, séparé et complet. Sa topologie est alors définie par une famille dénombrable de semi-normes[2]. Cela inclut les espace de Banach (en par-

[1] Autrement dit toute mesure de Haar à gauche sur G est invariante à droite.

[2] Une **semi-norme sur** V est une application $p : V \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ telle que $p(av) = |a|p(v)$ pour $a \in \mathbf{C}, v \in V$ et $p(v+w) \leq p(v) + p(w)$ pour $v, w \in V$. C'est donc presqu'une norme, mais on ne demande pas que l'égalité $p(v) = 0$ entraîne $v = 0$. Un espace vectoriel V muni d'une famille de semi-normes (p_i) possède une structure naturelle d'espace vectoriel topologique, en le munissant de la topologie la plus faible rendant continues les applications $x \to p_i(x-y)$ et $y \in V$. Une base

ticulier ceux de Hilbert), ainsi que les espaces $C(G)$ et $C^\infty(G)$ (si G est un groupe de Lie).

Définition 1.1. Soit $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des **représentations continues de** G sur des espaces de Fréchet. Les objets sont les espaces de Fréchet V munis d'une action linéaire continue de G, au sens où l'application $G \times V \to V, (g, v) \to g.v$ est continue. Les morphismes sont les applications linéaires continues G-équivariantes.

Attention, la notion d'irréductibilité, sous-représentation, etc. est par rapport à cette catégorie, en particulier V est irréductible si $V \neq 0$ et si V n'a pas de sous-espace propre **fermé** et G-invariant. De même, W est une sous-représentation de V si W est **fermé** dans V et G-stable.

Remarque 1.1. Grâce au théorème de Banach-Steinhauss[3], la continuité de l'application $G \times V \to V$ est équivalente à la condition concrète suivante: pour tout $v \in V$ l'application $G \to V, g \to g.v$ est continue, i.e. pour toute semi-norme continue p sur V et $\varepsilon > 0$ on a $p(g.v - v) < \varepsilon$ pour g dans un voisinage de 1.

Exercice 1.2. Montrer que $C(G)$ (avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G) et $L^2(G, dg)$, avec l'action de G par translation à gauche ou à droite, sont des objets de $\mathrm{Rep}(G)$. Indication pour le deuxième: $C_c(G)$ est dense dans $L^2(G)$.

Le procédé de **régularisation par convolution** est fort puissant et sera utilisé constamment dans la suite. Rappelons que l'espace $C_c(G)$ est muni d'un produit de convolution, défini par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(xy^{-1}) f_2(y) dy.$$

Considérons d'abord $V \in \mathrm{Rep}(G)$ **avec** V **un espace de Hilbert** et soient $v \in V$ et $f \in C_c(G)$. L'application $l \in V^* \to \int_G f(g) l(g.v) dg \in \mathbf{C}$ est une forme linéaire continue sur V^* (immédiat), donc (par le théorème de Riesz) il existe un unique $f.v \in V$ tel que

$$l(f.v) = \int_G f(g) l(g.v) dg$$

pour tout $l \in V^*$. On écrit aussi $f.v = \int_G f(g) g.v dg$, pour des raisons évidentes. L'espace $C_c(G)$ est muni du produit de convolution, défini par

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(xy^{-1}) f_2(y) dy.$$

On vérifie facilement que $(f_1 * f_2).v = f_1.(f_2.v)$ et $(f_1 + f_2).v = f_1.v + f_2.v$ si $f_i \in C_c(V)$ et $v \in V$.

Définition 1.2. Une **suite de Dirac** dans G est une suite $f_1, f_2, ... \in C_c(G)$ telle que $f_j \geq 0$, les supports des f_j sont décroissants et "tendent" vers $\{1\}$ et $\int_G f_j(g) dg = 1$.

Tout groupe raisonnable G possède des suites de Dirac, que l'on peut choisir invariantes par conjugation par un sous-groupe compact donné de G. Si G est un groupe de Lie, on peut aussi supposer que les f_n sont lisses.

de voisinages de 0 pour cette topologie est donnée par les $\{x \in V \mid \max(p_1(x), ..., p_n(x)) < \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$ et $p_1, ...p_n \in \{p_i\}$.

[3] Cela utilise le fait que V est un Fréchet!

Proposition 1.1. *Si f_n est une suite de Dirac, alors pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$, avec V un espace de Hilbert, et $v \in V$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n.v = v$.*

Proof. Par continuité, pour g dans un voisinage U de 1 on a $||g.v - v|| \leq \varepsilon$. Si n est grand, $\mathrm{supp}(f_n) \subset U$ et

$$||f_n.v - v|| = ||\int_G f_n(g)(g.v - v)dg|| \leq \int_G f_n(g)||g.v - v||dg \leq \varepsilon \int_G f_n(g)dg = \varepsilon.$$

□

Ce qui précède reste vrai pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$, mais l'argument est plus indirect, car le théorème de Riesz n'est plus valable. On peut s'en tirer en utilisant la théorie de l'intégration dans un espace vectoriel topologique localement convexe et complet, ou bien à la main, en définissant $\int_G f(g)g.vdg \in V$ comme une limite d'une suite de sommes de Riemann (la convergence se démontre comme dans le cas "classique", en utilisant l'uniforme continuité de f et la continuité de $g \to g.v$). Je passe les détails un peu pénibles, mais routiniers, le résultat final est:

Proposition 1.2. *Tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$ a une unique structure de $C_c(G)$-module $(f, v) \to f.v = \int_G f(g)g.vdg$ telle que pour tous $f \in C_c(G), l \in V^*$ (dual topologique) et $v \in V$*

$$l(f.v) = \int_G f(g)l(g.v)dg.$$

Si f_n est une suite de Dirac, alors pour tout $v \in V$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n.v = v$.

2 Restriction à un sous-groupe compact

L'étude de $\mathrm{Rep}(G)$ pour G non compact utilise fortement la théorie des représentations des groupes compacts, en regardant les objets de $\mathrm{Rep}(G)$ comme des objets de $\mathrm{Rep}(K)$, pour des sous-groupes compacts K de G convenables. Cette théorie est infiniment plus simple que celle des groupes non-compacts, mais elle est loin d'être une trivialité. Si $K = \mathbf{SO}(2)$, tout est beaucoup plus simple, car K est abélien, et tout se ramène à l'analyse de Fourier en une variable...

Soit K un groupe topologique compact. Un tel groupe possède donc une unique mesure de probabilité dk invariante par translation à gauche et à droite. Nous allons voir que $\mathrm{Rep}(K)$ est contrôlée par les représentations continues de dimension finie. Celles-ci ont des très bonnes propriétés, en particulier elles sont semi-simples (i.e. somme directe de représentations irréductibles), comme le montre la proposition ci-dessous[4].

Proposition 2.1. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(K)$* ***de dimension finie****.*

a) V possède un produit hermitien K-invariant, et donc une structure d'espace de Hilbert telle que K agit par des isométries sur V.

b) V est semi-simple, i.e. somme directe de représentations irréductibles.

Proof. a) On va utiliser une **astuce unitaire**. On part de n'importe quel produit hermitien $\langle ., . \rangle$ sur V et on pose

$$(v, v') = \int_K \langle k.v, k.v' \rangle dk.$$

[4]Qui tombe en défaut pour les représentations de dimension infinie!

La fonction intégrée est continue, donc $(v,v) = \int_K |k.v|^2 dk > 0$ si $v \neq 0$. L'invariance de $(.,.)$ sous K découle de celle de la mesure de probabilité dk. Le reste est immédiat.

b) Si V est irréductible c'est fini, sinon on prend un sous-espace propre W stable par K et un produit hermitien K-invariant sur V. Alors $W^\perp$ est aussi K-stable et $V = W \oplus W^\perp$. On conclut par récurrence sur $\dim V$. □

Exercice 2.1. Soit $V \in \mathrm{Rep}(K)$. Montrer que l'application $p : V \to V$ définie par

$$p(v) = \int_K k.v dk$$

est un projecteur sur l'espace V^K des invariants de V sous K. En déduire que $V = V^K \oplus \ker(p)$ et que le foncteur $V \to V^K$ est exact sur $\mathrm{Rep}(K)$.

Exercice 2.2. Montrer que si $V \in \mathrm{Rep}(K)$ est une représentation continue de K sur un espace de Hilbert, il existe un produit scalaire K-invariant sur V définissant la même topologie, i.e. toute représentation hilbertienne de K est unitarisable.

Soit $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets irréductibles **de dimension finie**[5] de $\mathrm{Rep}(K)$. Chaque $\tau \in \hat{K}$ fournit une application

$$e_\tau = \dim(\tau) \cdot \overline{\chi_\tau} \in C(K),$$

où χ_τ est le **caractère** de τ, i.e. $\chi_\tau(k)$ est la trace de l'endomorphisme de τ induit par k (cela a un sens, car $\dim \tau < \infty$). Ces fonctions vérifient[6]

$$e_\tau * e_\sigma = 1_{\tau \simeq \sigma} \cdot e_\tau, \quad \forall \sigma, \tau \in \hat{K},$$

de telle sorte que les opérateurs $e_\tau : v \to \int_K e_\tau(k) k.v dk$ induits sur tout $V \in \mathrm{Rep}(K)$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux. Les espaces

$$V(\tau) := \{v \in V | e_\tau.v = v\} = e_\tau(V)$$

sont donc fermés et en somme directe dans V. De plus, comme e_τ est invariante par conjugaison par K (immédiat sur sa définition), on voit immédiatement que chaque $V(\tau)$ est stable sous K. On appelle $V(\tau)$ la **composante τ-isotypique de V**.

On peut "rendre algébrique" une représentation $V \in \mathrm{Rep}(K)$ en passant aux vecteurs K-finis, au sens suivant:

Définition 2.1. Soit $V \in \mathrm{Rep}(K)$. On dit que $v \in V$ est **K-fini** si l'espace engendré par les $k.v$ ($k \in K$) est de dimension finie. On note V_K le sous-espace des vecteurs K-finis de V.

Le résultat suivant est fondamental. Sa preuve utilise des méthodes hilbertiennes et sera faite dans un cours consacré à ces méthodes.

Théorème 2.3. *(Peter-Weyl) Soit K un groupe compact et $V \in \mathrm{Rep}(K)$.*

[5] Tout objet irréductible est automatiquement de dimension finie, mais ce n'est pas du tout évident.

[6] Ces relations, version des relations d'orthogonalité de Schur, se démontrent comme dans le cas d'un groupe fini, en remplaçant les sommes finies par des intégrales. Cf. un des cours prochains pour les détails.

1. *L'espace* V_K *est dense dans* V *et*

$$V_K = \sum_{\tau \in \hat{K}} V(\tau) \simeq \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} V(\tau).$$

2. *L'application évidente* $\tau \otimes \mathrm{Hom}_K(\tau, V) \to V$ *induit un isomorphisme*

$$\tau \otimes \mathrm{Hom}_K(\tau, V) \simeq V(\tau).$$

3. *Tout objet irréductible de* $\mathrm{Rep}(K)$ *est de dimension finie.*

La preuve du théorème précédent se ramène par un certain nombre d'acrobaties au cas $V = L^2(K)$, et tout repose alors sur le résultat suivant, dans lequel $K \times K$ agit sur $L^2(K)$ par $(k_1, k_2).f(x) = f(k_1^{-1} x k_2)$ et comme on le pense sur $\tau \otimes \tau^*$ quand $\tau \in \hat{K}$.

Théorème 2.4. *(Peter-Weyl) On a des décompositions*[7] $K \times K$*-équivariantes*

$$L^2(K) \simeq \widehat{\bigoplus}_{\tau \in \hat{K}} \tau \otimes \tau^*, \quad L^2(K)_K \simeq \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} \tau \otimes \tau^*,$$

la projection orthogonale de $L^2(K)$ *sur* $\tau \otimes \tau^*$ *étant* $f \to e_\tau * f = f * e_\tau$*.*

La deuxième étape dans l'étude de $\mathrm{Rep}(G)$, pour G un groupe de Lie, consiste à étudier l'action infinitésimale de G, i.e. l'action des opérateurs différentiels invariants sur G. Cela demande une discussion préliminaire.

3 Opérateurs différentiels sur G

Considérons maintenant un sous-groupe fermé[8] G de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Un tel groupe possède une structure naturelle de groupe de Lie, grâce au théorème classique de von Neumann. Son algèbre de Lie est la sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbf{R})$

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) |\, e^{tX} \in G, \ \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 3.1. Décrire $\mathfrak{g}$ si $G = \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$.

Dire que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie signifie concrètement que $\mathfrak{g}$ est un sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ stable par le crochet de Lie $(X, Y) \to [X, Y] = XY - YX$. Pour le voir, il suffit d'utiliser la définition de $\mathfrak{g}$ et les formules

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n, \ e^{[A,B]} = \lim_{n\to\infty} (e^{A/n} e^{B/n} e^{-A/n} e^{-B/n})^{n^2},$$

valables pour $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ et dont la preuve est un exercice standard. Pour mémoire (c'est le point crucial dans la preuve du fait que G est un sous-groupe de Lie):

[7] La première somme directe est hilbertienne (orthogonale), la deuxième est une somme directe algébrique.

[8] Ou bien un groupe de Lie arbitraire, pour ceux familiers avec.

Théorème 3.2. *(von Neumann) L'image de l'exponentielle* $\mathfrak{g} \to G, X \to e^X$ *contient un voisinage de* 1 *dans* G*, en particulier* $\exp(\mathfrak{g})$ *engendre* G *(en tant que groupe abstrait)* ***si*** G ***est connexe****.*

Chaque $X \in \mathfrak{g}$ induit une dérivation de $C^\infty(G)$, via

$$(X.f)(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(ge^{tX}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(ge^{tX}) - f(g)}{t}, \ f \in C^\infty(G).$$

On dispose d'une telle dérivation pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, en posant $(Y + iZ).f = Y.f + iZ.f$ si $Y, Z \in \mathfrak{g}$ et $f \in C^\infty(G)$.

Définition 3.1. L'algèbre enveloppante[9] $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ est la sous-algèbre (rarement commutative!) de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ engendrée par les endomorphismes $f \to X.f$ pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

Pour tous $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ on dispose d'un élément $X_1...X_k \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ défini par

$$X_1...X_k = X_1 \circ X_2 \circ ... \circ X_k \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G)),$$

où l'on identifie X_i avec l'endomorphisme $f \to X_i.f$. De manière équivalente,

$$X_1...X_k.f(g) = \frac{d^k}{dt_1...dt_k}|_{t_1=...=t_k=0} f(ge^{t_1X_1}...e^{t_kX_k}).$$

Attention à ne pas confondre le produit $X_1...X_k$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ et le produit des matrices $X_1...X_k$ dans $M_n(\mathbf{C})$, ce n'est pas du tout la même chose!

Chaque $D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est invariant à gauche, i.e. en notant $F(g\cdot)$ l'application $x \to F(gx)$

$$D(f(g\cdot)) = (D(f))(g\cdot), \ g \in G, f \in C^\infty(G),$$

et $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est précisément l'algèbre d'opérateurs différentiels sur G invariants à gauche.

On peut décrire $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de manière purement algébrique. Pour cela, on vérifie (facile mais pénible) que

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = [X, Y].f, \quad X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, f \in C^\infty(G),$$

ce qui fait que l'on a les relations $XY - YX = [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. On obtient ainsi une flèche, trivialement surjective

$$T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})/I(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}), X_1 \otimes ... \otimes X_k \to X_1...X_k$$

du quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) = \oplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\otimes n}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (vu comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel) par l'idéal bilatère $I(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ engendré par les $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, avec $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Le résultat suivant est absolument fondamental, mais parfaitement classique. Voir les notes de Chenevier pour une preuve dans le cas $G = \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, qui s'adapte sans mal à notre situation (en fait ce qui suit est valable dans une généralité bien plus grande, cf. la discussion ci-dessous).

[9] Comme la notation l'indique, elle ne dépend que de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

Théorème 3.3. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) a) La flèche* $T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})/I(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ *est un isomorphisme d'algèbres.*

b) Si $X_1, ..., X_d$ *est une base de* $\mathfrak{g}$*, alors les* $X_1^{k_1}...X_d^{k_d}$*, avec* $k_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$*, forment une* $\mathbf{C}$*-base de* $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$*.*

Exercice 3.4. En déduire que si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (i.e. un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet $(X, Y) \to [X, Y]$), alors l'application naturelle $U(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est injective. De plus, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_r$ est une décomposition en somme directe d'espaces vectoriels, avec $\mathfrak{g}_i$ des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, l'application naturelle $U(\mathfrak{g}_{1,\mathbf{C}}) \otimes ... \otimes U(\mathfrak{g}_{r,\mathbf{C}}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (pas d'algèbres!).

Tout ce qui précède s'applique à n'importe quelle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un sous-corps k de $\mathbf{C}$ (et même plus généralement...). Faisons quelques rappels là-dessus: une **algèbre de Lie sur** k est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (crochet de Lie) telle que $[X, X] = 0$ et $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (la seconde identité est appelée **identité de Jacobi**). Une **sous-algèbre** (resp. **idéal**) de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{a}$) tel que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ (resp. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$), où l'on note

$$[U, V] = \mathrm{Vect}_{X \in U, Y \in V}[X, Y]$$

pour $U, V \subset \mathfrak{g}$. Dans ce cas $\mathfrak{h}, \mathfrak{a}$ sont elles-mêmes des algèbres de Lie, et l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est naturellement une algèbre de Lie. Un morphisme d'algèbres de Lie est ce que l'on pense.

Si A est une k-algèbre associative, alors A est une k-algèbre de Lie pour $[a, b] = ab - ba$. En particulier, en prenant $A = M_n(k)$ (ou $\mathrm{End}(V)$) on obtient une algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(k)$ (resp. $\mathfrak{gl}(V)$). Des sous-algèbres importantes de $\mathfrak{gl}_n(k)$ sont $\mathfrak{sl}_n(k)$ (matrices de trace nulle), $\mathfrak{b}_n(k)$ (matrices triangulaires supérieures), $\mathfrak{n}_n(k)$ (matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls). Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ il existe une algèbre associative $U(\mathfrak{g})$, son algèbre enveloppante, munie d'un morphisme $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ d'algèbres de Lie qui est universel, i.e. il induit une identification

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(U(\mathfrak{g}), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A),$$

pour toute algèbre associative A (vue comme algèbre de Lie dans le terme à droite). En fait, on peut prendre $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$, avec $T(\mathfrak{g}), I(\mathfrak{g})$ comme ci-dessus.

La catégorie $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ des **représentations de** $\mathfrak{g}$ **ou** $\mathfrak{g}$**-modules** a pour objets les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels V (pas forcément de dimension finie, et sans topologie!) munis d'une action $(X, v) \to X.v$ de $\mathfrak{g}$ par opérateurs linéaires tels que

$$X.(Y.v) - Y.(X.v) = [X, Y].v, X, Y \in \mathfrak{g}, v \in V,$$

et pour morphismes ce que l'on pense. Autrement dit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Il est clair que cette catégorie est équivalente à celle des $U(\mathfrak{g})$-modules à gauche, i.e.

$$\mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{g}) - \mathrm{mod}.$$

Cette équivalence de catégories explique bien l'importance de $U(\mathfrak{g})$.

4 Des représentations aux $(\mathfrak{g}, K)$-modules

Gardons notre sous-groupe fermé G de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Beaucoup d'informations portant sur $V \in \mathrm{Rep}(G)$ sont obtenues en étudiant l'action infinitésimale de G, i.e. l'action de $\mathfrak{g}$. Si V est de dimension finie, tout morphisme continu $G \to \mathbf{GL}(V)$ est automatiquement lisse, donc l'action de G se dérive sans problème et fournit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V (dans l'autre sens c'est plus délicat: une représentation de $\mathfrak{g}$ ne provient pas toujours d'une de G, mais c'est le cas si G est simplement connexe). Cette représentation retient énormément d'information sur la représentation de G, tout en étant souvent bien plus facile à manipuler, ce qui explique l'intérêt de cette opération de dérivation.

En dimension infinie les choses sont nettement plus compliquées: il n'y a aucune raison que l'action de G soit dérivable sur V (penser à $V = C(G)$ ou $L^2(G)$). On se restreint alors au sous-espace maximal de V sur lequel on peut dériver (infiniment...) l'action de G: c'est **l'espace V^∞ des vecteurs lisses** $v \in V$, au sens où l'application $G \to V, g \to g.v$ est lisse. Comme je ne veux pas trop entrer dans la théorie des fonctions lisses à valeurs dans un Fréchet, je préfère prendre la définition plus pédestre suivante:

Définition 4.1. Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$ et $v \in V$. On dit que v est **de classe** C^1 si

$$X.v = \lim_{t \to 0} \frac{e^{tX}.v - v}{t}$$

existe pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On dit que v est **de classe** C^k si $X.v$ est de classe C^{k-1} pour tout $X \in \mathfrak{g}$, et on dit que v est **lisse** si v est de classe C^k pour tout k. On note V^∞ le sous-espace de V formé des vecteurs lisses.

Exercice 4.1. Décrire V^∞ dans chacun des cas suivants: i) $V = L^2(K)$, avec $K = \mathrm{SO}(2)$, agissant par translation à gauche.

ii) (plus difficile) $V = L^2(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}$ agissant par translation à gauche.

Indication: analyse de Fourier!

A priori V^∞ pourrait être nul, mais le résultat suivant montre que V^∞ est toujours suffisamment gros et que c'est une représentation de $\mathfrak{g}$ (ou de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, c'est pareil), donc un $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-module.

Proposition 4.1. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$.*

a) On a $f.v \in V^\infty$ pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $v \in V$.

b) V^∞ est dense dans V et stable par G.

c) On a $X.v \in V^\infty$ si $X \in \mathfrak{g}, v \in V^\infty$, et l'action de $\mathfrak{g}$ sur V^∞ est une représentation de $\mathfrak{g}$, i.e. $X.(Y.v) - Y.(X.v) = [X, Y].v$ si $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $v \in V^\infty$.

Proof. a) Si $f \in C_c^\infty(G)$ et $v \in V^\infty$, on a pour[10] $X \in \mathfrak{g}$

$$X.(f.v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_G f(g) e^{tX} g.v dg = \int_G \frac{d}{dt}|_{t=0} f(e^{-tX}g) g.v dg = \int_G F(g) g.v dg = F.v,$$

avec $F(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(e^{-tX}g)$. Comme $F \in C_c^\infty(G)$, une récurrence immédiate montre que $f.v$ est C^k pour tout k, donc lisse.

[10] La permutation "derivation-intégrale est immédiate car f est à support compact.

b) Pour le premier point prendre une suite de Dirac formée de fonctions lisses et appliquer a) et la proposition 1.2. Pour le deuxième, notons que $Y := g^{-1}Xg \in \mathfrak{g}$ pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ (immédiat) et

$$\frac{e^{tX}.g.v - g.v}{t} = g.\frac{e^{tY}.v - v}{t}.$$

On conclut que si v est C^1 alors $g.v$ l'est aussi et $X.(g.v) = g.(Y.v)$. Une récurrence évidente montre alors que V^∞ est stable par G.

c) Par définition $X.v$ est C^{k-1} si v est C^k, donc $X.v \in V^\infty$ si $v \in V^\infty$. Pour le deuxième point, par Hahn-Banach il suffit de vérifier que $l(X.(Y.v)) - l(Y.(X.v)) = l([X,Y].v)$ pour tout $l \in V^*$ (dual continu). Si $v \in V^\infty$, la fonction $f_v : g \to l(g.v)$ est lisse sur G et $(X.f_v)(g) = l(g.(X.v))$ (immédiat), en particulier $l(X.v) = (X.f_v)(1)$. On se ramène donc à montrer que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $C^\infty(G)$ définie par $(X,f) \to X.f$ est une représentation de $\mathfrak{g}$, déjà vu (sans preuve...).

□

Remarque 4.2. On a une injection d'image fermée $V^\infty \to C^\infty(G,V)$, et en munissant V^∞ de la topologie induite (qui n'est **pas** celle induite par V), on obtient une représentation $V^\infty \in \mathrm{Rep}(G)$ telle que $(V^\infty)^\infty = V^\infty$.

Voici un résultat vraiment magnifique, fort délicat et surprenant.

Théorème 4.3. *(Dixmier-Malliavin) Pour tout* $V \in \mathrm{Rep}(G)$ *on a*

$$V^\infty = \{f.v |\, f \in C_c^\infty(G), v \in V\}.$$

La construction $V \to V^\infty$ est bien jolie, mais elle a deux défauts importants (qui ne se manifestent pas en dimension finie):

• tout sous-espace fermé G-invariant W de V induit un sous-$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-module W^∞ de V^∞, mais l'adhérence d'un $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-sous-module de V^∞ n'a aucune raison d'être G-stable. Prenons par exemple $G = \mathbf{R}$ agissant par translation à gauche sur $V = L^2(\mathbf{R})$. Alors $C_c^\infty(]0,1[) \subset V^\infty$ est stable par dérivation, mais il n'est pas stable par G, et son adhérence non plus.

• Si V est irréductible, V^∞ n'a aucune raison d'être un $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-module simple, car $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est de dimension dénombrable, alors que V^∞ ne l'est presque jamais. Pour résoudre ces problèmes, Harish-Chandra a d'une part mélangé les deux constructions (restriction à un compact et aux vecteurs lisses), d'autre part introduit une bonne classe de représentations (celles admissibles), qui est assez large pour inclure les représentations apparaissant naturellement et pour laquelle ces problèmes ne se posent plus.

Fixons un sous-groupe compact K de G (en pratique on choisit un sous-groupe compact maximal, qui est unique à conjugaison près pour les groupes étudiés-ceux réductifs réels-G). Nous allons mélanger la théorie des représentations de K et de $\mathfrak{g}$, en définissant un objet algébrique $HC(V)$ attaché à $V \in \mathrm{Rep}(G)$, qui est muni d'une action de K et d'une action de $\mathfrak{g}$, vérifiant certaines compatibilités. Le passage $V \to HC(V)$ perd de l'information, mais l'étude de ce foncteur fournit beaucoup de résultats importants concernant $\mathrm{Rep}(G)$. Bien sûr, HC fait référence à Harish-Chandra, mathématicien extraordinaire s'il en est...

Définition 4.2. Si $V \in \mathrm{Rep}(G)$. On note

$$HC(V) = V^\infty \cap V_K$$

le sous-espace de V formé des vecteurs lisses et K-finis de V.

Théorème 4.4. *$HC(V)$ est dense dans V et stable sous l'action de K et de $\mathfrak{g}$ (mais* ***pas*** *sous l'action de G en général!).*

Proof. Montrons d'abord la densité. Soit f_n une suite de Dirac formée de fonctions lisses et K-invariantes par conjugaison et soit $v \in V$. Il existe une suite de vecteurs K-finis v_j tels que $v_j \to v$ (théorème 2.3). Alors $f_j.v_j$ sont lisses (prop. 4.1), K-finis (car f_j préserve chaque $V(\tau)$ grâce à son invariance par conjugaison) et leur limite est v (exercice immédiat).

La stabilité par K est claire. Pour montrer la stabilité par $\mathfrak{g}$, le seul point nontrivial consiste à vérifier que si $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in HC(V)$, alors $X.v$ est K-fini. Mais pour $k \in K$ on a (en posant $\mathrm{Ad}(k)X = kXk^{-1}$), par un calcul déjà fait dans la preuve de la prop. 4.1

$$k.(X.v) = \mathrm{Ad}(k)X.(k.v)$$

et les $k.v$ restent dans un espace de dimension finie, ainsi que les $\mathrm{Ad}(k)X$ (ils restent dans $\mathfrak{g}$!). $\square$

$HC(V)$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module, au sens suivant:

Définition 4.3. Un $(\mathfrak{g}, K)$**-module** est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel M (sans topologie!) muni d'une structure de $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$-module et d'une action linéaire de K telle que:

• M est la réunion de ses sous-K-représentations continues de dimension finie, autrement dit tout $m \in M$ vit dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de M stable sous K et sur lequel l'action de K est continue (et donc analytique).

• Si $X \in \mathfrak{k}$ et $v \in M$ on a[11]

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{tX}.v - v}{t} = X.v.$$

• Les deux actions sont compatibles, i.e. $k.(X.v) = \mathrm{Ad}k(X).(k.v)$ pour $k \in K, X \in \mathfrak{g}$ et $v \in M$, où $\mathrm{Ad}k(X) = kXk^{-1}$.

On a donc obtenu un foncteur

$$\mathrm{Rep}(G) \to (\mathfrak{g}, K) - \mathrm{mod},\ V \to HC(V),$$

tel que $HC(V)$ soit dense dans V. Cependant, ce foncteur perd de l'information, comme le montre l'exercice suivant:

Exercice 4.5. Soit K un groupe compact. Montrer que $L^2(K)$ et $C(K)$ ont le même $(\mathfrak{g}, K)$-module.

Exercice 4.6. Si M est un $(\mathfrak{g}, K)$-module et $v \in M$, vérifier que $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C}).\mathbf{C}[K].v$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de M.

Par exemple, si $V \in \mathrm{Rep}(G)$ est lisse, i.e. $V = V^\infty$, alors $HC(V) = V_K$ est l'espace des vecteurs K-finis de V. C'est le cas par exemple si V est de dimension finie ou bien si $V = C^\infty(G)$, avec l'action de G par translation à droite ou à gauche. Nous verrons plus tard que c'est aussi le cas des représentations admissibles, notion pas encore introduite...

[11] Noter que la limite existe par la première condition imposée à M. Dans la formule, $e^{tX} \in K$, donc le terme à gauche fait référence à l'action de K, celui à droite à celle de $\mathfrak{g}$.

5 La notion de forme automorphe (enfin...)

Nous allons restreindre la classe de groupes considérés. Nous discuterons plus en détail la notion de groupe réductif réel dans les cours à suivre, donnons pour l'instant une définition provisoire mais qui a le mérite de la simplicité:

Définition 5.1. Un **groupe réductif réel** est un sous-groupe G de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ avec les deux propriétés suivantes:

a) Il existe une famille de polynômes $f_k \in \mathbf{R}[X_{ij} | 1 \leq i, j \leq n]$ tels que $G = \{g \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) | \, f_k(g) = 0 \ \forall k\}$.

b) Il existe $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que si $g \in G$, alors $Ag^tA^{-1} \in G$.

Des exemples évidents: $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R}), \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$, mais il y en a bien d'autres.

Soit $G \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ un groupe réductif réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Un théorème profond de Cartan et Mostow affirme que deux tels K sont conjugués sous G^0 (la composante connexe de 1 dans G), donc le choix de K n'est pas très important. Si $G = \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, un choix naturel est $K = O(n)$, si $G = \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ on prend $K = \mathbf{SO}(n)$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G et considérons l'espace

$$V = C(\Gamma \backslash G)$$

des fonctions continues sur G, invariantes (à gauche) par Γ. Muni de l'action de G par translation à droite, c'est un objet de $\mathrm{Rep}(G)$ (fermé dans le Fréchet $C(G)$). On dispose alors du $(\mathfrak{g}, K)$-module

$$HC(G, \Gamma) := HC(V) = C^\infty(\Gamma \backslash G) \cap C(\Gamma \backslash G)_K.$$

C'est donc l'espace des fonctions lisses sur G, invariantes à gauche sous Γ et dont les translatés à droite par l'action de K engendrent un espace de dimension finie.

Les formes automorphes pour G de niveau Γ (le tout relativement à K...) sont des fonctions $f \in HC(G, \Gamma)$, solutions "qui n'explosent pas à l'infini" de certaines équations différentielles imposées par les opérateurs différentiels bi-invariants sur G. Préciser cela demande encore quelques préliminaires...

Le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ est un objet très intéressant: d'un point de vue analytique, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ est (si G est connexe...) l'algèbre d'opérateurs différentiels bi-invariants sur G, i.e. qui commutent aux translations à gauche et à droite sur G. L'intérêt de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ est qu'il fournit des endomorphismes du $(\mathfrak{g}, K)$-module $HC(V)$ attaché à n'importe quelle $V \in \mathrm{Rep}(G)$. L'étude de ces endomorphismes permet de déduire énormément d'information sur V elle-même, comme on le verra. En particulier, on peut considérer les espaces propres communs pour l'action de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$, ou des espaces propres généralisés. Cela amène à la définition suivante:

Définition 5.2. Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$. Un vecteur $v \in HC(V)$ est dit **$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$-fini** si

$$\dim \mathrm{Vect}_{D \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})} D.v < \infty.$$

D'un point de vue plus algébrique, pour les groupes G que l'on considère (i.e. ceux réductifs réels), $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ est un anneau de polynômes. Ce résultat d'apparence innocente est en fait un théorème hautement nontrivial de Chevalley et Harish-Chandra! Par exemple, si $G = \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$, on a un isomorphisme

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}[T_1, ..., T_{n-1}],$$

qui est tout sauf évident... Pour $n = 2$ on peut choisir $T_1 = C$, **l'élément de Casimir**

$$C = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE, \quad H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \ E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

On vérifie "à la main" que C commute bien à tout élément de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (il suffit de voir qu'il commute à H, E, F, bien sûr), mais ce n'est déjà pas trivial que seuls les polynômes en C sont dans le centre de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$...

Ensuite, expliquons ce que veut dire que $f \in V = C(\Gamma\backslash G)$ "n'explose pas à l'infini". Pour cela nous avons besoin d'une norme sur G. La norme la plus naturelle sur $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est bien sûr

$$||g||_{HS} = \sqrt{\mathrm{Tr}(g^t g)} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}^2}.$$

Cependant, il vaut mieux (pour des raisons liées aux groupes algébriques) voir $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ comme sous-groupe de $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ par le plongement diagonal $g \to (g, 1/\det(g))$ et considérer la norme induite, autrement dit

$$||g|| = \sqrt{||g||_{HS}^2 + 1/(\det g)^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}(g^t g) + 1/\det(g)^2}, \ g \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Cette norme a les propriétés agréables suivantes, qui se déduisent des propriétés analogues et parfaitement standard de la norme $|| \cdot ||_{HS}$:

$$||gh|| \leq ||g|| \cdot ||h||, \quad ||g + h|| \leq ||g|| + ||h||, \quad ||kgk'|| = ||g||, \ k, k' \in O(n).$$

Exercice 5.1. Montrer que cette norme est à distance fixe de 0:

$$||g|| > 1, \ g \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Nous arrivons **enfin** à la définition d'une forme automorphe pour G et Γ (rappelons que cela sous-entend le choix de K):

Définition 5.3. Une **forme automorphe pour G, de niveau** Γ (relativement à K...) est une fonction $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-finie $f \in HC(G, \Gamma)$, **à croissance modérée**, au sens où il existe $c > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que

$$|f(g)| \leq c||g||^N, \quad g \in G.$$

On note $A(G, \Gamma)$ **l'espace des formes automorphes pour G, de niveau** Γ.

Pour résumer, $A(G, \Gamma)$ est l'espace des fonctions lisses $f : G \to \mathbf{C}$ qui vérifient:
- f est invariante à gauche par Γ.
- les fonctions $f(\cdot k) : x \to f(xk)$ engendrent un espace de dimension finie quand k varie dans K.
- les fonctions $D.f$ engendrent un espace de dimension finie quand D varie dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.
- $|f(g)| \leq c||g||^N$ pour $g \in G$, c, N étant des constantes convenables.

Un premier théorème difficile de la théorie est le:

Théorème 5.2. *(Harish-Chandra) Tout $f \in A(G, \Gamma)$ est une fonction analytique réelle et $A(G, \Gamma)$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $HC(G, \Gamma)$.*

Le point délicat dans la deuxième assertion est la stabilité par $\mathfrak{g}$, i.e. le fait que les dérivées d'une forme automorphe sont aussi à croissance modérée. Cela se déduit d'un théorème fondamental de Harish-Chandra (que l'on verra bien plus tard...), disant que toute forme automorphe est "presque harmonique".

6 Reality check: une forme modulaire "est" une forme automorphe

Revenons un peu sur terre et prenons $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, $K = \mathbf{SO}(2)$. On a alors un homéomorphisme $G/K \simeq \mathscr{H}, gK \to g.i$. La surjectivité découle de l'identité

$$(n_x a_y).i = x + iy, \quad n_x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), a_y = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.1. Vérifier que cette application est bien un homéomorphisme.

Via l'identification $\mathscr{H} \simeq G/K$ on peut voir f comme une fonction sur G, invariante à droite par K. Pour tenir compte du poids k, il convient de regarder plutôt la fonction

$$\Phi_f : G \to \mathbf{C}, \Phi_f(g) = f|_k g(i) = \frac{1}{(ci+d)^k} f(g.i), g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On peut récupérer facilement f à partir de Φ_f, via

$$f(z) = y^{-k/2}\Phi_f(n_x a_y), \quad z = x + iy, \quad \text{i.e.} \quad \Phi_f(n_x a_y) = y^{k/2} f(x + iy) \qquad (1).$$

Considérons les opérateurs différentiels dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (avec $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$)

$$X_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{smallmatrix}\right), \ H = -i\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ \Delta = \frac{1}{4}(H^2 + 2X_+X_- + 2X_-X_+),$$

qui vérifient $[H, X_+] = 2X_+, [H, X_-] = -2X_-, [X_+, X_-] = H$. L'opérateur Δ est "la moitié" de l'opérateur de Casimir vu avant. En fonction des coordonnées fournies par la décomposition d'Iwasawa

$$g = n_x a_y r_\theta, \quad \text{où} \quad r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

on a[12]

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right) - y\frac{\partial^2}{\partial x \partial\theta}.$$

Le premier dictionnaire "formes modulaires-formes automorphes" est fourni par:

Théorème 6.2. *Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. L'application $f \to \Phi_f$ identifie $M_k(\Gamma)$ et le sous-espace de $A(G, \Gamma)$ formé des $\Phi : G \to \mathbf{C}$ telles que*

1. *On a $\Phi(gr_\theta) = e^{ik\theta}\Phi(g)$.*
2. *Φ vérifie les équations différentielles $X_-\Phi = 0$ et $\Delta\Phi = \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\Phi$.*

Proof. Si $F_1, F_2 : \mathscr{H} \to \mathbf{C}$, alors $F_1 = F_2$ si et seulement si $F_1|_k g(i) = F_2|_k g(i)$ pour tout $g \in G$, car l'action de G sur $\mathscr{H}$ est transitive. En utilisant cette observation, on obtient immédiatement que f est invariante par l'action de poids k de Γ si et seulement si Φ_f est invariante à gauche par Γ.

Ensuite, on a par définition $F|_k r_\theta(i) = e^{ik\theta}F(i)$ pour toute fonction F sur $\mathscr{H}$, en particulier Φ_f vérifie $\Phi_f(gr_\theta) = e^{ik\theta}\Phi_f(g)$ (sans aucune hypothèse sur f).

Montrons ensuite que $f : \mathscr{H} \to \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si Φ_f est tuée par X_-, dans quel cas $\Delta\Phi_f = \frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)\Phi_f$. Plus précisément:

[12] Grâce à un calcul pas très amusant que je vous laisse faire...de toute façon je n'aurai pas besoin de cette formule.

Lemme 6.1. *Soit Φ une fonction sur G telle que $\Phi(gr_\theta) = e^{ik\theta}\Phi(g)$, et soit f une fonction sur $\mathscr{H}$ telle que* (1) *soit satisfaite. Alors*

$$(X_-\Phi)(n_x a_y r_\theta) = -ie^{i(k-2)\theta} y^{\frac{k}{2}+1} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+iy),$$

où $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$. En particulier, $f \in O(\mathscr{H})$ si et seulement si $X_-\Phi = 0$.

Proof. On s'occupe d'abord de la variable θ: puisque $r_\theta X_- r_\theta^{-1} = e^{-2i\theta}X_-$ et

$$r.(X.\Phi) = (rXr^{-1}).(r.\Phi), \quad r \in G, X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}},$$

on obtient

$$r_\theta.(X_-\Phi) = e^{-2i\theta}X_-(r_\theta.\Phi) = e^{-2i\theta}X_-(e^{ik\theta}\Phi) = e^{i(k-2)\theta}X_-.\Phi,$$

autrement dit

$$X_-\Phi(n_x a_y r_\theta) = e^{i(k-2)\theta}X_-\Phi(n_x a_y).$$

Ensuite, on calcule $X_-\Phi(n_x a_y)$ en utilisant la décomposition

$$X_- = -\frac{H}{2} - ie + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right), \quad e = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right).$$

- On d'une part

$$H\Phi(g) = -i\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(ge^{t\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)}) = -i\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(gr_t) = -i\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(g)e^{ikt} = k\Phi(g).$$

- Ensuite, comme $n_x a_y \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix} = n_x a_{ye^{2t}}$, on a[13] (avec $z = x+iy$)

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\phi(n_x a_y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(n_x a_{ye^{2t}}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(ye^{2t})^{k/2}f(x+ye^{2t}i) = y^{k/2}(kf(z)+2y\frac{\partial f}{\partial y}(z)).$$

- Enfin, comme $n_x a_y n_t = n_{x+ty}a_y$, on obtient

$$e\Phi(n_x a_y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(n_{x+ty}a_y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}y^{k/2}f(x+ty+iy) = y^{\frac{k}{2}+1}\frac{\partial f}{\partial x}(z).$$

En mettant le tout ensemble on obtient immédiatement le premier résultat, et le deuxième s'en déduit (équations de Cauchy-Riemann). □

Il reste à traiter l'opérateur Δ, mais cela découle de sa définition et du fait que $H\Phi = k\Phi$ et $X_-\Phi = 0$, donc $X_-X_+\Phi = -H\Phi = -k\Phi$ (utiliser $[X_+, X_-] = H$).

Passons à la croissance modérée. On va montrer que si $f \in FM_k(\Gamma)$, alors f est à croissance modérée si et seulement si la fonction associée Φ_f l'est (cela permettra de conclure). Comme $\Phi_f(gr_\theta) = e^{ik\theta}\Phi_f(g)$ et $||gr_\theta|| = ||g||$, Φ_f est à croissance modérée (au sens du théorème) si et seulement s'il existe $c, N > 0$ tels que $|\Phi_f(n_x a_y)| \leq c||n_x a_y||^N$ pour tous $x \in \mathbf{R}, y > 0$, autrement dit

$$|y^{k/2}f(x+iy)| \leq c\left(y + \frac{x^2+1}{y}\right)^{N/2}. \tag{2}$$

[13]On voit f comme la fonction de deux variables $f(x,y) = f(x+iy)$.

Notons aussi que pour $\alpha \in \Gamma(1)$ on a

$$\Phi_{f|_k\alpha}(g) = f|_k\alpha|_k g(i) = f|_k\alpha g(i) = \Phi_f(\alpha g).$$

Supposons donc que f est à croissance modérée et montrons que Φ_f l'est aussi. D'après le cours 1, il existe $c, N > 0$ tels que l'inégalité (2) soit satisfaite pour $y \geq 1$, $x \in \mathbf{R}$. Il reste à voir ce qui se passe quand y est proche de 0. Mais $f|_k S$ (rappelons que $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) est aussi à croissance modérée et donc on a une inégalité du même genre pour elle. Comme $\mathrm{Im}(S.z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$ et ceci se comporte comme $1/\mathrm{Im}(z)$ quand $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ et $\mathrm{Re}(z)$ reste dans un compact, on obtient facilement que (2) est vraie aussi pour $0 < y < 1$, quitte à augmenter c et N.

Supposons maintenant que Φ_f est à croissance modérée et prenons $\alpha \in \Gamma(1)$. Soit $F = f|_k\alpha$, donc $\Phi_F = \Phi_f(\alpha g)$. Je dis que Φ_F est aussi à croissance modérée, autrement dit qu'il existe c', N' tels que $|\Phi_F(g)| \leq c'||g||^{N'}$ pour $g \in G$. Cela revient à $|\Phi_f(\alpha g)| \leq c'||g||^{N'}$, ou encore $|\Phi_f(g)| \leq c'||\alpha^{-1}g||^{N'}$. Mais $||\alpha^{-1}g|| \geq \frac{||g||}{||\alpha||}$, et la croissance modérée de Φ_f permet de conclure. Nous savons donc que $F \in FM_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$ et que l'on a une inégalité du type (2) pour F. D'après le cours (1), cela force $F \in M_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$ et le résultat s'ensuit.

□

7 Admissibilité

Harish-Chandra a introduit une classe de représentations de G, fondamentale dans la théorie des formes automorphes, qui est assez grande pour contenir les représentations que l'on rencontre dans les applications[14], mais assez restreinte pour éviter les problèmes soulevés ci-dessus. Le mérite des groupes réductifs réels est qu'ils possèdent beaucoup de représentations admissibles. Soit donc G un tel groupe et fixons un sous-groupe compact K de G.

Définition 7.1. On dit que $V \in \mathrm{Rep}(G)$ est **admissible** (par rapport à K) si toute composante τ-isotypique $V(\tau)$ de V, avec $\tau \in \hat{K}$, est de dimension finie.

Un exemple de représentation non admissible est le produit d'une infinité de copies de $C(G)$, avec G compact (par exemple). D'autre part, nous verrons plus tard que toute représentation irréductible **unitaire** (i.e. par isométries) de G sur un espace de Hilbert est admissible, un résultat fondamental, dont la preuve est fort délicate. En général une représentation de Banach irréductible de G n'est pas forcément admissible[15].

On peut aussi définir une notion d'admissibilité pour les $(\mathfrak{g}, K)$-modules. En effet, si M est un tel module, comme l'action de K est localement finie il est facile de définir ce qu'est la composante τ-isotypique ($\tau \in \hat{K}$) de M, soit en posant $M(\tau) = e_\tau(M)$ (cela a un sens car M est réunion de K-modules continus de dimension finie, donc l'opérateur e_τ sur chacun d'entre eux en induit un sur M), soit en disant que $M(\tau)$ est la somme des sous-espaces de M stables sous K et isomorphes à τ. On a alors (grâce à la semi-simplicité des représentations de dimension finie de K et aux hypothèses sur l'action de K sur M)

$$M = \oplus_{\tau \in \hat{K}} M(\tau)$$

[14]Il faut se fatiguer pas mal (et on le fera) pour démontrer cela...

[15]Soergel a construit des contre-exemples pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.

et on dit que M est **admissible** si

$$\dim M(\tau) < \infty, \ \forall \tau \in \hat{K}.$$

Exercice 7.1. Montrer que $V \in \mathrm{Rep}(G)$ est admissible (par rapport à K) si et seulement si $HC(V)$ l'est.

Le théorème suivant montre l'intérêt des représentations admissibles, pour lesquelles les problèmes soulevés dans les paragraphes précédents ne se posent plus.

Théorème 7.2. *(Harish-Chandra) Soit G un groupe réductif réel et K un sous-groupe compact maximal de G. Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$ une représentation **admissible**.*

a) On a $HC(V) = H_K$.

b) Si $v \in HC(V)$ et $l \in V^*$, l'application $G \to \mathbf{C}, g \to l(g.v)$ est analytique.

c) Les applications $W \to HC(W)$ et $M \to \bar{M}$ induisent une bijection entre les sous-espaces fermés G-stables de V et les sous $(\mathfrak{g}, K)$-modules de $HC(V)$. En particulier V est irréductible si et seulement si $HC(V)$ l'est.

La preuve du théorème utilise des résultats délicats de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles (sic!), plus précisément le théorème de régularité elliptique analytique, sous la forme suivante.

Théorème 7.3. *Soit G comme dans le théorème ci-dessus, $V \in \mathrm{Rep}(G)$ et $v \in HC(V)$ un vecteur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini. Pour tout $l \in V^*$ l'application $G \to \mathbf{C}, g \to l(g.v)$ est analytique réelle.*

Nous admettons[16] ce théorème et expliquons la preuve du théorème 7.1.

Proof. (du théorème 7.1) a) Une inclusion étant claire, il suffit de montrer que tout vecteur K-fini v de V est lisse, ou encore que $V^\infty \cap V(\tau) = V(\tau)$ pour tout $\tau \in \hat{K}$. Comme $V(\tau)$ est de dimension finie par hypothèse, il suffit de vérifier que $V^\infty \cap V(\tau)$ est dense dans $V(\tau)$. Or si $v \in V(\tau)$, f_n est une suite de Dirac formée de fonctions lisses, alors[17] $e_\tau.(f_n.v) = (e_\tau * f_n).v$ sont dans $V^\infty \cap V(\tau)$ et convergent vers $e_\tau.v = v$.

b) Grâce au théorème 7.2 il suffit de montrer que tout $v \in HC(V)$ est $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini. Or $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ préserve chaque $V(\tau)$, qui est de dimension finie, donc tout vecteur de $V(\tau)$ est $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini, ainsi tout vecteur K-fini est aussi $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-fini.

c) Clairement si W est un sous-G-module fermé de V, alors $HC(W)$ est un sous $(\mathfrak{g}, K)$-module de $HC(V)$. L'autre sens est difficile: il faut montrer que si M est un sous $(\mathfrak{g}, K)$-module de $HC(V)$, alors $W = \bar{M}$ est G-stable. Comme[18] $G = G^0 K$, on peut supposer que G est connexe. Il suffit alors de montrer que $GM \subset W$. Par Hahn-Banach on se ramène à montrer que si $l \in V^*$ est nulle sur W, alors elle est nulle sur GM. Si $v \in M$, d'après b) la fonction $f(g) = l(v.g)$ est analytique. Comme l est nulle sur W (donc sur M), ses dérivées en 1 sont toutes nulles (car elles sont calculables à partir de l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur v), donc f est nulle sur G et l l'est sur GM.

Ensuite, il faut voir que les deux applications sont inverses une de l'autre. L'égalité $\overline{HC(W)} = W$ découle de la densité de $HC(W)$ dans W. Quant à $HC(\bar{M}) =$

[16] Pour l'instant...

[17] On étend $e_\tau \in C(K)$ en une fonction continue sur G, ce qui est possible.

[18] Ce n'est pas évident, cela utilise la décomposition de Cartan d'un groupe réductif. On le verra plus tard.

M, par a) cela revient à montrer que $\bar{M}(\tau) = M(\tau)$ pour tout $\tau \in \hat{K}$. Une inclusion est claire, l'autre vient du fait que $M(\tau)$ est de dimension finie, car $M(\tau) \subset V(\tau)$, et dense dans $\bar{M}(\tau)$ (clair).

□

Exercice 7.4. Soient G, K comme dans les théorèmes ci-dessus et soit $f : V \to W$ une application linéaire continue entre deux représentations admissibles de G, induisant une application $(\mathfrak{g}, K)$-équivariante $HC(V) \to HC(W)$. Montrer que f est G-équivariante. Indication: s'inspirer de la preuve du théorème 7.1.

Nous allons énoncer maintenant un théorème difficile (et pourtant basique dans la théorie!) de Harish-Chandra, dont la preuve nous occupera pas mal de temps:

Théorème 7.5. *(Harish-Chandra) Soit $f \in A(G, \Gamma)$. Le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module $M = U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}[K].f$ engendré par f est admissible.*