CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE ET ANNEAUX DE KISIN

par

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu & Wiesława Nizioł

Résumé. — Nous utilisons un procédé de complétion $\mathscr{B}$-adique et la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ pour donner une construction des anneaux de Kisin et des représentations galoisiennes universelles associées (en dimension 2 et pour $\mathbf{Q}_p$) à partir de la correspondance de Langlands locale classique. Cela fournit, en particulier, une preuve uniforme de la conjecture de Breuil-Mézard (version géométrique) dans le cas supercuspidal.

Abstract. — We use a $\mathscr{B}$-adic completion and the p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ to give a construction of Kisin's rings and the attached universal Galois representations (in dimension 2 and for $\mathbf{Q}_p$) directly from the classical Langlands correspondence. This gives, in particular, a uniform proof of the geometric Breuil-Mézard conjecture in the supercuspidal case.

Table des matières

Introduction

Nous donnons, pour $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$) et en dimension 2, une construction directe des anneaux de Kisin et des représentations universelles attachées.

Les trois auteurs sont membres du projet ANR-19-CE40-0015-02 COLOSS..

Plus précisément, soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et de corps résiduel k_L, et soient M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 irréductible, $a < b$ des entiers et $\overline{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$ une représentation continue, semi-simple. Notre construction part de la représentation $\mathrm{LL}(M)$ de $G := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée à M par la recette de Fontaine et la correspondance de Langlands locale classique (c'est une représentation supercuspidale puisque M est supposé irréductible). On suppose que la représentation localement algébrique

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) = \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

a un caractère central unitaire. Elle admet alors des $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par G ; on fixe un tel réseau Λ. La représentation $\overline{\rho}$ détermine un bloc $\mathscr{B}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de G lisses de longueur finie et de caractère central égal à celui de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$. On définit [(1)] *le complété $\mathscr{B}$-adique* $\Lambda_{\mathscr{B}}$ de Λ comme la limite projective des quotients de longueur finie de Λ dont toutes les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$, et on pose $\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Lambda_{\mathscr{B}}$ (le résultat est indépendant du choix de Λ). Soient alors [(2)] :

$$R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]} := \mathrm{End}_G(\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)), \quad X_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]} := \mathrm{Spec}\, R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}, \quad \rho_M^{[a,b]} := \mathbf{V}(\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M))$$

Notre résultat principal est que $\rho_M^{[a,b]}$ est la famille universelle des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont la réduction [(3)] est $\overline{\rho}$, de type (M, a, b) (i.e. de dimension 2, potentiellement semi-stables à poids de Hodge-Tate a et b, et dont le D_{pst} est isomorphe à M).

Théorème 0.1. — (i) *$R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ est un anneau commutatif s'identifiant à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert analytique de $\mathbf{P}^1$; algébriquement, c'est le produit d'un nombre fini d'anneaux principaux.*

(ii) *$\rho_M^{[a,b]}$ est libre de rang 2 sur $R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ et l'application de spécialisation $x \mapsto \rho_x$ induit, pour toute extension finie L' de L, une bijection entre $X_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}(L')$ et l'ensemble des L'-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de réduction $\overline{\rho}$ et de type (M, a, b).*

Ce théorème est prouvé aux §§ 5.2 et 5.3 (les notations y sont un peu différentes car on met l'accent sur le bloc $\mathscr{B}$ plutôt que la représentation $\overline{\rho}$, et donc $R_{M,\overline{\rho}}^{[a,b]}$ devient $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ et $\rho_M^{[a,b]}$ devient $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$). La preuve repose sur deux ingrédients :

• Le « théorème $R = T$ » local de Paškūnas **[25, 28]** qui montre que $\mathbf{V}(\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M))$ est « de type GL_2 » et munit ce module d'une action de l'anneau des déformations universelles du pseudo-caractère $\mathrm{Tr} \circ \overline{\rho}$.

---

1. Cette construction apparaît déjà dans **[24**, (1.6.4)**]**.
2. Rappelons que l'on dispose d'un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ associant une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à une L-représentation unitaire Π de G, et que la correspondance de Langlands locale p-adique $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associe à une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, une L-représentation de G vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V)) = V$.
3. I.e. la semi-simplifiée de la réduction d'un réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

• Une extension des résultats de [**16**] selon lesquels, si V est irréductible de dimension 2, de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, et si E est une extension de V par V, alors $\mathbf{\Pi}(V)$ est la complétée de ses vecteurs localement algébriques si et seulement si E est de Rham. Ces résultats permettent de montrer que $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ est un produit d'anneau principaux et que $\rho^{[a,b]}_M$ est libre de rang 2 sur $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ (cf. th. 5.4 et cor. 5.5).

Remarque 0.2. — (i) Pour $\overline{\rho}$ générique, l'existence de $\rho^{[a,b]}_M$ peut se déduire des résultats de Kisin [**23**] (cf. aussi [**24**, cor. 1.4.7]) à part pour le fait que Kisin ne fixe pas M mais seulement sa restriction au sous-groupe d'inertie et son déterminant ce qui donne a priori deux M possibles : M et $M \otimes \mu_{-1}$ où μ_{-1} est le caractère non ramifié d'ordre 2. (Les résultats de Kisin sont valables pour des représentations de $\mathscr{G}_K$, avec $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, en dimension arbitraire, mais comme notre construction utilise la correspondance de Langlands locale p-adique, nous sommes forcés de nous restreindre aux représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; la géométrie de l'analogue de l'espace $X^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$ ci-dessus a été étudiée par Wang-Erickson [**31**].)

(ii) Pour prouver que $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ est un produit d'anneaux principaux, on commence par prouver que cet anneau est lisse et qu'il s'identifie à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert de $\mathbf{P}^1$, ce qui permet d'utiliser la classification standard des ouverts de $\mathbf{P}^1$ (voir les travaux de Rozensztajn [**29**] pour des résultats du même type).

(iii) Les deux ingrédients ci-dessus ont aussi été utilisés par Paškūnas [**27**] pour prouver la conjecture de Breuil-Mézard (avec quelques restrictions sur $\overline{\rho}$ dont certaines ont été levées par Hu et Tan [**22**]), ce qui nécessite des informations sur $R^{[a,b]}_{M,\overline{\rho}}$ un peu différentes de celles mentionnées ci-dessus (et il ne faut pas rendre p inversible), cf. [**27**, th. 6.6, th. 6.24].

(iv) On déduit de la construction de $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et des résultats des §§ 2.2 et 2.3 une suite de décomposition de la réduction de $\rho^{[a,b]}_M$ qui fournit (prop. 5.9 et 5.11) une forme de la conjecture de Breuil-Mézard [**6, 20**].

(v) L'énoncé du th. 0.1 et sa preuve sont purement locaux, mais il y a quand-même un ingrédient global caché, à savoir la compatibilité local-global d'Emerton [**19**] qui permet de s'assurer que M et $\mathrm{LL}(M)$ se correspondent bien par la correspondance de Langlands locale classique.

(vi) La motivation première pour les résultats de cet article était la définition des objets apparaissant dans la factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld [**12**, th. 0.1].

Notations

On note :

- G le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$,
- B le borel des matrice triangulaires supérieures,

- Z le centre de G,
- $K := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ le sous-groupe compact maximal.

On note :

- μ_λ le caractère non ramifié de $\mathbf{Q}_p^*$ prenant la valeur λ en p (dans un anneau où λ est inversible), i.e. $\mu_\lambda(x) = \lambda^{v_p(x)}$.
- ε le caractère $x \mapsto x|x|$ de $\mathbf{Q}_p^*$.
- χ le caractère $\chi \circ \det$ de G, si χ est un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$.

Remerciements. — Cet article fait écho à des travaux de Kisin, Paškūnas, Emerton et Gee ; nous les remercions de toutes les belles idées qu'ils ont introduites dans le sujet. Nous remercions aussi le rapporteur pour sa lecture attentive et ses remarques.

1. La correspondance de Langlands locale p-adique

1.1. Représentations irréductibles

Si $0 \leq r \leq p-1$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ est un caractère continu, soit $W_{r,\chi}$ le KZ-module $(\mathrm{Sym}^r k_L^2) \otimes \chi$ (où $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur k_L^2), et soit $I_{r,\chi}$ son induite compacte de KZ à G. Soit T_{BL} l'opérateur de Barthel-Livné. Il résulte des travaux de Barthel-Livné [**1, 2**] et Breuil [**5**] que $\mathrm{End}_{k_L[G]} I_{r,\chi} = k_L[T]$, où T agit par T_{BL}, et que, si $P \in k_L[T]$ est irréductible, alors

$$\Pi_{r,\chi,P} := I_{r,\chi}/P$$

est irréductible sauf si $r = 0$ ou $p-1$ et $P = T \pm 1$ (bien sûr, si $\deg P \geq 2$, alors $\Pi_{r,\chi,P}$ n'est pas absolument irréductible).

Remarque 1.1. — Soit $B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$ la $k_L[T, T^{-1}]$-représentation

$$B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) := \mathrm{Ind}_B^G(\chi\mu_{T^{-1}} \otimes \chi\varepsilon^r\mu_T)$$

On déduit des résultats de Barthel-Livné que, si $P \in k_L[T]$ est irréductible et n'admet pas 0 pour racine, alors

$$B_{r,\chi,P} := (k_L[T, T^{-1}]/P) \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

a même semi-simplifiée que $\Pi_{r,\chi,P}$ et lui est isomorphe sauf si $r = p-1$ et $P = T - \lambda$, avec $\lambda = \pm 1$, où $\Pi_{r,\chi,P}$ est une extension de $\chi\mu_\lambda$ par $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda$ tandis que $B_{r,\chi,P}$ est une extension de $\mathrm{St} \otimes \chi\mu_\lambda$ par $\chi\mu_\lambda$.

Si k est une extension de k_L, notons $\mathrm{Irr}_k G$ l'ensemble des k-représentations de G, lisses, admissibles et *absolument irréductibles*. Berger [**3**] a prouvé qu'un élément de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_p} G$ admet un caractère central, et les résultats de [**1, 2, 5**] fournissent la description suivante de $\mathrm{Irr}_k G$

Proposition 1.2. — *Les objets de* $\mathrm{Irr}_{k_L} G$ *sont :*

- *les* χ*, pour* $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ *caractère lisse,*

• *les* $\mathrm{St}\otimes\chi$*, pour* $\chi:\mathbf{Q}_p^*\to k_L^*$ *caractère lisse,*

• *les* $B(\chi_1,\chi_2):=\mathrm{Ind}_B^G\,\chi_2\otimes\chi_1\varepsilon^{-1}$*, pour* $\chi_1,\chi_2:\mathbf{Q}_p^*\to k_L^*$ *caractères lisses, avec* $\chi_1\neq\varepsilon\chi_2$*,*

• *les* $\Pi_{r,\chi,T}$*, pour* $0\leq r\leq p-1$ *et* $\chi:\mathbf{Q}_p^*\to k^*$ *caractère lisse.*

1.2. Le foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$

Soit $\mathrm{Tors}\,G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules lisses, de longueur finie (un tel module est tué par p^N, si N est supérieur ou égal à la longueur). Si $\delta:\mathbf{Q}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on note $\mathrm{Tors}^\delta\,G$ la sous-catégorie des objets de caractère central δ.

Si $\Pi\in\mathrm{Tors}^\delta G$, on peut [**9**, th. IV.2.13, IV.2.14] associer à Π, de manière fonctorielle, une représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ « de type GL_2 » (cf. th. 1.7 pour le sens à donner à cet énoncé : si on est en dimension 2, l'opérateur $g+\delta\varepsilon(g)g^{-1}$ qui y apparaît est juste la trace de g).

Si $\Pi=\varprojlim\Pi_i$, où les Π_i sont de longueur finie, on pose $\mathbf{V}(\Pi)=\varprojlim\mathbf{V}(\Pi_i)$, et si $\Pi=L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Pi^+$, on pose $\mathbf{V}(\Pi)=L\otimes_{\mathscr{O}_L}\mathbf{V}(\Pi^+)$, ce qui permet de définir $\mathbf{V}(\Pi)$ pour des banachs dont la réduction est de longueur finie (ou même juste limite projective d'objets de longueur finie).

Proposition 1.3. — ([**9**, th. 0.10] ou [**24**, th. 1.2.4])

(i) $\mathbf{V}(\Pi)=0$ *si* Π *est de dimension* 1.

(ii) $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,P})=\varepsilon^{r+1}\mu_\lambda\chi$*, si* $P(\lambda)=0$ *et* $\lambda\neq0$*.*

(iii) $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,T})=\mathrm{Ind}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}}^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}\omega_2^{r+1}\otimes\chi$*.*

1.3. Blocs

La théorie de Gabriel [**21**] fournit des décompositions

$$\mathrm{Tors}\,G=\prod\nolimits_{\mathscr{B}}\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}\,G,\quad \mathrm{Tors}^\delta\,G=\prod\nolimits_{\mathscr{B}}\mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\,G$$

où $\mathscr{B}$ parcourt l'ensemble des blocs [(4)] de $\mathrm{Tors}\,G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta\,G$), et $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}\,G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}}\,G$) est la sous-catégorie de $\mathrm{Tors}\,G$ (resp. $\mathrm{Tors}^\delta\,G$) des objets dont toutes les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$. (Les blocs de $\mathrm{Tors}^\delta\,G$ sont ceux de $\mathrm{Tors}\,G$ de caractère central δ.) Les composantes de Jordan-Hölder de $\Pi_{r,\chi,P}$ appartiennent toutes à un même bloc.

On dit qu'un bloc de $\mathrm{Tors}\,G$ ou $\mathrm{Tors}^\delta\,G$ est *absolu* s'il est constitué de représentations absolument irréductibles (si $\mathscr{B}$ n'est pas absolu, alors $\mathscr{B}$ peut être considéré comme absolu sur une extension non ramifiée $L(\mathscr{B})$ de L, cf. rem. 1.9).

4. On met, sur les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles, une relation d'équivalence définie par $\pi\sim\pi'$ si et seulement si il existe une suite $\pi=\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_r=\pi'$ telle que $\pi_{i+1}=\pi_i$ ou $\mathrm{Ext}^1(\pi_i,\pi_{i+1})\neq0$ ou $\mathrm{Ext}^1(\pi_{i+1},\pi_i)\neq0$ (ces conditions ne sont pas exclusives). Une classe d'équivalence est *un bloc*.

Proposition 1.4. — (Paškūnas) *Les blocs absolus de* $\mathrm{Tors}\, G$ *sont d'une des formes suivantes :*

- $\{\Pi_{r,\chi,T}\}$.
- $\{B(\chi_1,\chi_2), B(\chi_2,\chi_1)\}$, *où* $\chi_1\chi_2^{-1}\neq\varepsilon^{\pm}, 1$.
- $\{B(\chi,\chi)\}$, *si* $p\neq 2$ (*devient* $\{\chi, \mathrm{St}\otimes\chi\}$, *si* $p=2$).
- $\{\chi, \mathrm{St}\otimes\chi, B(\chi,\chi\varepsilon)\}$, *si* $p\neq 3$ (*devient* $\{\chi, \mathrm{St}\otimes\chi, \chi\varepsilon, \mathrm{St}\otimes\chi\varepsilon\}$, *si* $p=3$).

Si π est irréductible, on note P_π (resp. P_π^δ) le dual de Pontryagin d'une enveloppe injective de π dans la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules lisses qui sont la réunion de leurs sous $\mathscr{O}_L[G]$-modules de longueur finie (resp. de caractère central δ). Le caractère central de P_π^δ est donc δ^{-1}, et P_π est un $\mathscr{O}_L[G]$-module compact, limite projective de $\mathscr{O}_L[G]$-modules compacts et de longueur finie.

Si $\mathscr{B}$ est un bloc de $\mathrm{Tors}\, G$ ou de $\mathrm{Tors}^\delta G$, on pose

$$\begin{array}{lll} P_{\mathscr{B}} = \oplus_{\pi\in\mathscr{B}} P_\pi & E_{\mathscr{B}} := \mathrm{End}_G(P_{\mathscr{B}}) & Z_{\mathscr{B}} := \text{centre de } E_{\mathscr{B}} \\ P_{\mathscr{B}}^\delta = \oplus_{\pi\in\mathscr{B}} P_\pi^\delta & E_{\mathscr{B}}^\delta := \mathrm{End}_G(P_{\mathscr{B}}^\delta) & Z_{\mathscr{B}}^\delta := \text{centre de } E_{\mathscr{B}}^\delta \end{array}$$

Alors on dispose d'un morphisme naturel $Z_{\mathscr{B}}\to Z_{\mathscr{B}}^\delta$.

Remarque 1.5. — L'anneau $Z_{\mathscr{B}}^\delta$ s'identifie, par les résultats de Gabriel [**21**], au centre de la catégorie $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}^\delta G$; il agit donc naturellement sur tout $\pi\in\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}^\delta G$ ainsi que, par fonctorialité, sur $\mathbf{V}(\pi)$. L'action sur π peut s'expliciter en utilisant la description

$$\pi = (P_{\mathscr{B}}\otimes_{E_{\mathscr{B}}} \mathrm{Hom}(P_{\mathscr{B}}, \pi^\vee))^\vee$$

où $^\vee$ désigne le dual de Pontryagin.

1.4. Blocs et représentations galoisiennes modulo p

On associe à un bloc absolu $\mathscr{B}$ de $\mathrm{Tors}\, G$ la k_L-représentation $\rho_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ semi-simple, de dimension 2, dont les composantes irréductibles sont les $\mathbf{V}(\pi)$, pour $\pi\in\mathscr{B}$. On obtient de la sorte une bijection entre les blocs absolus de $\mathrm{Tors}\, G$ et les k_L-représentations $\rho_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ semi-simples, de dimension 2.

Remarque 1.6. — $\rho_{\mathscr{B}}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\rho_{\mathscr{B}}$ est irréductible, de dimension 2, si $\mathscr{B}=\{\Pi_{r,\chi,T}\}$.
- $\rho_{\mathscr{B}}=\chi_1\oplus\chi_2$, si $\mathscr{B}=\{B(\chi_1,\chi_2), B(\chi_2,\chi_1)\}$ et $\chi_1\neq\chi_2$.
- $\rho_{\mathscr{B}}=\chi\oplus\chi$, si $\mathscr{B}=\{B(\chi,\chi)\}$.
- $\rho_{\mathscr{B}}=\chi\oplus\chi\varepsilon$, si $\mathscr{B}=\{\chi, \mathrm{St}\otimes\chi, B(\chi,\chi\varepsilon)\}$.

Si $\mathscr{B}$ est un bloc de Tors_G^δ, alors $(\det\rho_{\mathscr{B}})\varepsilon^{-1}=\delta$.

Soit $\mathscr{B}$ un bloc absolu de $\mathrm{Tors}^\delta G$. Notons $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$ l'anneau des déformations universelles du pseudo-caractère $\mathrm{Tr}\circ\rho_{\mathscr{B}}$, de dimension 2 et de déterminant $\delta\varepsilon$, et

$$T_{\mathscr{B}}^\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$$

le pseudo-caractère universel. On a alors le « théorème $R = T$ » local suivant (cf. rem. 1.5 pour l'action de $Z^\delta_{\mathscr{B}}$).

Théorème 1.7. — (Paškūnas [**25**], Paškūnas-Tung [**28**]) *Il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\iota^\delta_{\mathscr{B}} : R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}} \to Z^\delta_{\mathscr{B}}$$

tel que, pour tout $\pi \in \mathrm{Tors}^\delta_{\mathscr{B}} G$ *et tout* $g \in \mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}_p}$, *on ait :*

$$\iota^\delta_{\mathscr{B}}(T^\delta_{\mathscr{B}}(g)) = g + \delta\varepsilon(g)g^{-1} \quad \textit{dans}\ \mathrm{End}(\mathbf{V}(\pi)).$$

De plus :

- *Si* $p \geq 5$, $\iota^\delta_{\mathscr{B}}$ *est un isomorphisme.*
- *Dans le cas général* $\iota^\delta_{\mathscr{B}}$ *est un morphisme fini* (i.e. $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ est un $R^{\mathrm{ps}}_{\mathscr{B}}$-module de type fini), $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \iota^\delta_{\mathscr{B}}$ *est un isomorphisme,* $Z^\delta_{\mathscr{B}} = R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}/\mathscr{O}_L$-torsion *si* $p = 3$ *et le conoyau de* $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}/\mathscr{O}_L$-torsion $\to Z^\delta_{\mathscr{B}}$ *est tué par* 2 *si* $p = 2$.
- *Le* $Z^\delta_{\mathscr{B}}$*-module* $E_{\mathscr{B}}$ *est de type fini.*

Remarque 1.8. — Les anneaux de déformations universelles de pseudo-caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont noethériens (et mêmes quotients de $\mathscr{O}_L[[x_1, \dots, x_r]]$) ; on en déduit que $Z^\delta_{\mathscr{B}}[1/p]$ est noethérien. En fait $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ est noethérien [**28**, th 1.1].

Remarque 1.9. — Tout ce qui précède suppose que $\mathscr{B}$ est absolu mais on peut considérer tout bloc comme absolu, quitte à remplacer L par une certaine extension non ramifiée $L(\mathscr{B})$. En effet :

(i) Si π est irréductible comme $k_L[G]$-module, alors l'anneau $k(\pi) := \mathrm{End}_{k[G]}\pi$ est une extension finie de k, et π est absolument irréductible vue comme $k(\pi)[G]$-module.

(ii) Si $\mathscr{B}$ est un bloc de $\mathrm{Tors}\, G$, alors $k(\pi)$ ne dépend pas de $\pi \in \mathscr{B}$; notons le $k(\mathscr{B})$, et notons $L(\mathscr{B})$ l'extension non ramifiée de L de corps résiduel $k(\mathscr{B})$.

(iii) Tout élément de $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}G$ est muni d'une action de $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})}$ relevant celle de $k(\mathscr{B})$, ce qui permet de considérer $\mathscr{B}$ comme un bloc absolu de $\mathrm{Tors}_{\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})}}G$. De plus, l'oubli de l'action de $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})}$ induit une équivalence entre $\mathrm{Tors}_{\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})},\mathscr{B}}G$ et $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}G$.

(iv) Si $\Pi \in \mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}G$, alors $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})} \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi$ se decompose sous la forme $\oplus_\sigma \Pi^\sigma$, où σ décrit $\mathrm{Hom}_L(L(\mathscr{B}), L(\mathscr{B}))$. Cela découpe $\mathscr{O}_{L(\mathscr{B})} \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{B}$ en blocs absolus $\mathscr{B}^\sigma$ qui sont distincts mais conjugués sous l'action de $\mathrm{Gal}(k(\mathscr{B})/k_L)$.

2. Complétions profinie et $\mathscr{B}$-adique

2.1. Complétion profinie

Si X est un $\mathscr{O}_L[G]$-module topologique, on note $\widetilde{X}$ son *complété profini*, i.e. la limite projective des X/W, où W parcourt l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L[G]$-modules ouverts (et donc aussi fermés) de X tels que $X/W \in \mathrm{Tors}\, G$. Alors $\widetilde{X}$ admet une décomposition

$$\widetilde{X} = \prod\nolimits_{\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$$

où $\mathscr{B}$ décrit l'ensemble des blocs des représentations de G sur k_L ; $X_{\mathscr{B}}$ est le *complété $\mathscr{B}$-adique* de X. Si X a pour caractère central δ, les blocs apparaissant dans le produit sont ceux de $\mathrm{Tors}^{\delta}\, G$.

Remarque 2.1. — On n'est pas forcé de prendre un bloc pour définir un complété $\mathscr{B}$-adique : on peut prendre pour $\mathscr{B}$ un sous-ensemble d'un bloc et ne considérer que les quotients dont les composantes de Jordan-Hölder appartiennent à $\mathscr{B}$.

Proposition 2.2. — *Si X est une représentation lisse de G, de type fini, à caractère central δ, on dispose d'un isomorphisme naturel de G-modules ind-profinis*

$$X_{\mathscr{B}}^{\vee} \simeq P_{\mathscr{B}}^{\delta} \otimes_{E_{\mathscr{B}}^{\delta}} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, X^{\vee}).$$

Démonstration. — Soit $(\sigma_i)_{i\in I}$ l'ensemble (dénombrable) des quotients de X qui appartiennent à $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}^{\delta}$. On a donc $X_{\mathscr{B}}^{\vee} \simeq \varinjlim_{i\in I} \sigma_i^{\vee}$ et pour tout i la flèche naturelle $P_{\mathscr{B}}^{\delta} \otimes_{E_{\mathscr{B}}^{\delta}} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, \sigma_i^{\vee}) \to \sigma_i^{\vee}$ est un isomorphisme, d'où un isomorphisme

$$X_{\mathscr{B}}^{\vee} \simeq P_{\mathscr{B}}^{\delta} \otimes_{E_{\mathscr{B}}^{\delta}} (\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, \sigma_i^{\vee}))).$$

Il suffit donc de montrer que l'injection $\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, \sigma_i^{\vee}) \to \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, X^{\vee})$ (induite par les injections $\sigma_i^{\vee} \to X^{\vee}$) est une surjection. Soit donc $f : P_{\mathscr{B}}^{\delta} \to X^{\vee}$ un morphisme continu G-équivariant. Son image est fermée car $P_{\mathscr{B}}^{\delta}$ est compact, et elle est G-stable dans $X^{\vee}$, donc son dual de Pontryagin correspond à un quotient σ de X. Il suffit de montrer que σ est de longueur finie. Mais $\sigma^{\vee}$ est un quotient de $P_{\mathscr{B}}^{\delta}$, donc σ est un sous-objet de $(P_{\mathscr{B}}^{\delta})^{\vee}$, et ce dernier est une limite inductive de représentations de longueur finie. D'autre part σ est un quotient de X, donc σ est de type fini, et on conclut que σ est de longueur finie. □

Corollaire 2.3. — *Soit $\mathscr{C}^{\delta}$ la catégorie des représentations lisses de type fini de G, à caractère central δ. Le foncteur $X \mapsto X_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{C}^{\delta}$ dans la catégorie des G-modules pro-discrets est exact.*

Démonstration. — Soit $0 \to X_1 \to X \to X_2 \to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{C}^{\delta}$. Le G-module lisse $(P_{\mathscr{B}}^{\delta})^{\vee}$ est injectif dans la catégorie de toutes les représentations lisses de G, à caractère central δ (prop. 5.16 de [**25**]). On en déduit que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, X_2^{\vee}) \to \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, X^{\vee}) \to \mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, X_1^{\vee}) \to 0$$

reste exacte. Pour conclure via la proposition 2.2 il suffit de voir que $P_{\mathscr{B}}^{\delta}$ est plat sur $E_{\mathscr{B}}^{\delta}$. Mais la théorie de Gabriel [**21**] (voir aussi le chapitre 2 de [**25**]) montre que les foncteurs $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}^{\delta}, (-)^{\vee})$ et $(-)\,\widehat{\otimes}_{E_{\mathscr{B}}^{\delta}} P_{\mathscr{B}}^{\delta}$ induisent une équivalence de catégories entre celle des représentations localement admissibles de G, à caractère central δ et dont les sous-quotients irréductibles sont dans $\mathscr{B}$, et celle des $E_{\mathscr{B}}^{\delta}$-modules compacts. Pour vérifier la platitude de $P_{\mathscr{B}}^{\delta}$ sur $E_{\mathscr{B}}^{\delta}$ il suffit de tester l'exactitude du foncteur $(-)\otimes_{E_{\mathscr{B}}^{\delta}} P_{\mathscr{B}}^{\delta}$ sur les $E_{\mathscr{B}}^{\delta}$-modules de type fini. Si M est un tel module on a $M \otimes_{E_{\mathscr{B}}^{\delta}} P_{\mathscr{B}}^{\delta} \simeq$

$M \widehat{\otimes}_{E^\delta_{\mathscr{B}}} P^\delta_{\mathscr{B}}$. Comme le foncteur $\mathrm{Hom}_G(P^\delta_{\mathscr{B}}, (-)^\vee)$ est exact (cf. le début de la preuve), il en est de même de son quasi-inverse $(-) \widehat{\otimes}_{E^\delta_{\mathscr{B}}} P^\delta_{\mathscr{B}}$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 2.4. — *Si X est une représentation lisse de type fini de G, à caractère central δ, alors $\mathbf{V}(X_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — Le $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$-module $\mathbf{V}(X_{\mathscr{B}})$ est une limite inverse de modules de la forme $\mathbf{V}(\pi)$ avec π de longueur finie. Chaque $\mathbf{V}(\pi)$ est de longueur finie sur $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$, donc $\mathbf{V}(X_{\mathscr{B}})$ est un $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$-module compact. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$. Par le lemme de Nakayama topologique il suffit de montrer que $\mathbf{V}(X_{\mathscr{B}})/\mathfrak{m}\mathbf{V}(X_{\mathscr{B}}) \simeq \mathbf{V}(X_{\mathscr{B}}/\mathfrak{m}X_{\mathscr{B}})$ est de dimension finie sur k_L, et pour cela il suffit de voir que $X_{\mathscr{B}}/\mathfrak{m}X_{\mathscr{B}}$ est de longueur finie comme $k_L[G]$-module, ou encore que $X^\vee_{\mathscr{B}}[\mathfrak{m}]$ est de longueur finie comme $k_L[G]$-module compact. Comme $P^\delta_{\mathscr{B}}$ est plat sur $E^\delta_{\mathscr{B}}$, par la proposition ci-dessus et sa preuve, il suffit de vérifier que $P^\delta_{\mathscr{B}}/\mathfrak{m}P^\delta_{\mathscr{B}} \otimes_{E^\delta_{\mathscr{B}}/\mathfrak{m}E^\delta_{\mathscr{B}}} \mathrm{Hom}_G(P^\delta_{\mathscr{B}}, X^\vee)[\mathfrak{m}]$ est de longueur finie. Puisque $(P_{\mathscr{B}}/\mathfrak{m}P_{\mathscr{B}})^\vee$ est de longueur finie (prop. 6.7 de **[28]**), il suffit de voir que $\mathrm{Hom}_G(P_{\mathscr{B}}, X^\vee)[\mathfrak{m}]$ est de dimension finie sur k_L. Cela découle du fait que $(P_{\mathscr{B}}/\mathfrak{m}P_{\mathscr{B}})^\vee$ est admissible (car de longueur finie) et que $\mathrm{Hom}_G(X, \pi)$ est de dimension finie quand X est de type fini et π est admissible. □

2.2. Complétion $\mathscr{B}$-adique des induites compactes : le cas irréductible

Proposition 2.5. — *Si $\mathscr{B}$ est le bloc contenant $\Pi_{r,\chi,P}$, alors*

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} = \varprojlim_n I_{r,\chi}/P^n$$

De plus,

$$\mathrm{End}_{k_L[G]}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}) = \varprojlim_n k_L[T]/P^n$$

Démonstration. — Tout sous-G-module non nul de $I_{r,\chi}$ contient $Q \cdot I_{r,\chi}$ avec $Q \neq 0$ (ceci est standard, voir par exemple le cor. 2.1.4 de **[17]**), et donc un quotient Π de $I_{r,\chi}$, de longueur finie, est quotient de $I_{r,\chi}/Q$, avec $Q \in k_L[T]$, non nul. Le théorème des restes chinois implique donc que Π est quotient de $\oplus_P I_{r,\chi}/P^{n_P}$, où la somme porte sur les P irréductibles et les n_P sont presque tous nuls. Le premier point s'en déduit en remarquant que les blocs associés aux différents P sont distincts (à r, χ fixé, s'entend).

Le second découle de ce que $\mathrm{End}(I_{r,\chi}/Q) = k_L[T]/Q$. En effet, la suite exacte $0 \to I_{r,\chi} \to I_{r,\chi} \to I_{r,\chi}/Q \to 0$ et l'isomorphisme $\mathrm{End}(I_{r,\chi}) \simeq k_L[T]$ fournissent une injection de $k_L[T]/Q$ dans $\mathrm{End}(I_{r,\chi}/Q)$, il suffit donc de vérifier que ce dernier k_L-espace vectoriel est de dimension $\leq \deg(Q)$. Pour cela on peut étendre les scalaires à une clôture algébrique de k_L (en utilisant le lemme 5.1 de **[25]**), et on se ramène par dévissage au cas $\deg Q = 1$, qui est standard. □

Proposition 2.6. — *Si $P \in k_L[T]$ est irréductible et n'admet pas 0 pour racine, si $\mathscr{B}$ est le bloc qui lui correspond, et si T agit sur $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}$ via T_{BL}, on a un isomorphisme* *de $k_L[T]_P[G]$-modules*[(5)] *:*

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong k_L[T]_P \,\widehat{\otimes}_{\,k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

dans le cas générique, et une suite exacte

$$0 \to k_L[T]_P \,\widehat{\otimes}_{\,k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

si $r = p-1$ et $P = T-\lambda$ avec $\lambda = \pm 1$.

Démonstration. — On a une flèche naturelle $I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$ de $k_L[T][G]$-modules, où T agit sur $I_{r,\chi}$ par $T_{\rm BL}$. Celle-ci induit une flèche de $k_L[T,T^{-1}][G]$-modules

$$k_L[T,T^{-1}] \otimes_{k_L[T]} I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

qui est injective et est un isomorphisme sauf si $r = p-1$ où l'on a une suite exacte

$$0 \to k_L[T,T^{-1}] \otimes_{k_L[T]} I_{r,\chi} \to B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to ({\rm St} \otimes \chi\mu_1) \oplus ({\rm St} \otimes \chi\mu_{-1}) \to 0$$

et T agit par 1 (resp. -1) sur le premier (resp. second) terme du conoyau.

• Si $r \neq p-1$ ou si $P \neq T-\lambda$, avec $\lambda \neq \pm 1$ (cas générique), on a donc, pour tout n, un isomorphisme

$$I_{r,\chi}/P^n \cong (k_L[T]/P^n) \otimes_{k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

• Si $r = p-1$ et si $\lambda = \pm 1$ (cas exceptionnels), on a, pour tout n, des suites exactes

$$0 \to {\rm St} \otimes \chi\mu_\lambda \to I_{r,\chi}/(T-\lambda)^n \to M_{\lambda,n} \to 0$$
$$0 \to (T-\lambda)(B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})/(T-\lambda)^{n-1}) \to M_{\lambda,n} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$
$$M_{\lambda,n} := {\rm Ker}\big(B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})/(T-\lambda)^n \to {\rm St} \otimes \chi\mu_\lambda\big)$$

Quand on passe de $n+1$ à n, la flèche ${\rm St}\otimes\chi\mu_\lambda \to {\rm St}\otimes\chi\mu_\lambda$ est 0 (et pas l'identité). En passant aux limites projectives, cela fournit, dans le cas générique, un isomorphisme

$$(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong k_L[T]_P \,\widehat{\otimes}_{\,k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}})$$

et dans les cas exceptionnels, un isomorphisme $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \cong \varprojlim_n M_{\lambda,n}$, et une suite exacte

$$0 \to P\, k_L[T]_P \,\widehat{\otimes}_{\,k_L[T,T^{-1}]} B(\chi\varepsilon^{r+1}\mu_T, \chi\mu_{T^{-1}}) \to (I_{r,\chi})_{\mathscr{B}} \to \chi\mu_\lambda \to 0$$

On en déduit le résultat. □

Lemme 2.7. — ([**24**, Lemma 1.5.11]) *Si $P \in k_L[T]$ est irréductible et si $\mathscr{B}$ est le bloc que lui est associé, l'application naturelle $\alpha_{r,\chi} : Z_{\mathscr{B}} \to {\rm End}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est surjective sauf dans le cas $r = p-2$ et $P = T\pm 1$, correspondant à $\mathscr{B} = \{B(\chi\mu_{\pm 1}, \chi\mu_{\pm 1})\}$, où l'image est $k_L[[P^2]]$.*

Corollaire 2.8. — ([**24**, Lemma 1.5.2]) *$\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est un module de type fini sur $Z_{\mathscr{B}}$, de rang 2, si $P = T$ et « de rang 1 » si P n'a pas 0 comme racine.*

5. $k_L[T]_P$ est le complété P-adique de $k_L[T]$.

Démonstration. — Cela suit de ce que $\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P)$ est de rang fini sur $\mathrm{End}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})/P$, et ce rang vaut 2 si $P = T$ (car $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P$ est supersingulière) et 1 sinon (car $(I_{r,\chi})_{\mathscr{B}}/P$ est une série principale à des caractères près). $\square$

Remarque 2.9. — Dans le cas d'un bloc de la série principale, $\mathbf{V}((I_{r,\chi})_{\mathscr{B}})$ est la déformation non ramifiée d'un caractère. Dans le cas $\mathscr{B}$ supersingulier, on obtient une déformation « Fontaine-Laffaille » de $\mathbf{V}(\Pi_{r,\chi,T})$, cf. [**24**, Lemma 1.5.3].

2.3. Complétion $\mathscr{B}$-adique des induites compactes : exactitude

On fixe $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère lisse, et tous nos KZ-modules et G-modules sont supposés de caractère central δ. Si W est une représentation de KZ, de type fini sur $\mathscr{O}_L$, on pose

$$I(W) := \text{c-Ind}_{KZ}^G W$$

Comme $W \mapsto I(W)$ est exact, on déduit du cor. 2.3 le résultat suivant :

Corollaire 2.10. — *Les foncteurs $W \mapsto \widetilde{I(W)}$ et $W \mapsto I(W)_{\mathscr{B}}$ sont exacts.*

Corollaire 2.11. — *Soit W un $\mathscr{O}_L[KZ]$-module sans p-torsion.*

(i) *$\widetilde{I(W)}$ est sans p-torsion.*

(ii) *$\widetilde{I(W)} = \varprojlim_n \widetilde{I(W)}/p^n$, et $\widetilde{I(W)}/p^n = \widetilde{I(W/p^n)}$, pour tout n.*

Démonstration. — L'identification $\widetilde{I(W)} = \varprojlim_n \widetilde{I(W/p^n)}$ est immédiate. La multiplication par p^n induit un isomorphisme $I(W)/p^n \xrightarrow{\sim} p^n I(W)/p^{2n} I(W) \subset I(W)/p^{2n}$; elle induit donc aussi un isomorphisme $\widetilde{I(W)}/p^n \xrightarrow{\sim} p^n \widetilde{I(W)}/p^{2n} \widetilde{I(W)} \subset \widetilde{I(W)}/p^{2n}$. A la limite, on voit qu'un élément de p-torsion de $\varprojlim_n \widetilde{I(W)}/p^n$ est dans l'image de la multiplication par p^n, pour tout n. Le résultat s'en déduit car le sous-groupe p-divisible de $\widetilde{I(W)}$ est réduit à 0 (vu que c'est le cas pour tous les quotients de longueur finie de $I(W)$). $\square$

Remarque 2.12. — En utilisant la décomposition suivant les blocs, on en déduit les mêmes résultats pour la complétion $\mathscr{B}$-adique.

3. Le complété universel de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$

Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 sur $L \otimes \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, absolument irréductible en restriction au sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (et donc $N = 0$), et soit $\mathrm{LL}(M)$ la L-représentation lisse de G associée par la correspondance de Langlands locale classique (elle est supercuspidale grâce à l'hypothèse faite sur M).

Si $a < b$ sont des entiers, notons $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ la représentation localement algébrique

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) := \mathrm{LL}(M) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a$$

On suppose que le caractère central $\delta_M^{[a,b]}$ de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est unitaire.

D'après la classification des représentations supercuspidales de G, il existe une représentation irréductible σ_M de KZ (de dimension finie), telle que [(6)]

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M = \mathrm{LL}(M) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M = \mathrm{LL}(M) \oplus (\mathrm{LL}(M) \otimes \mu_{-1})$$

On a donc le même résultat pour $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ en remplaçant σ_M par

$$\sigma_M^{[a,b]} := \sigma_M \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det^a$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \oplus (\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \otimes \mu_{-1})$$

L'hypothèse selon laquelle le caractère central de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est unitaire implique qu'il existe des réseaux de $\sigma_M^{[a,b]}$ stables par KZ. Si σ^+ est un tel réseau, on note $I_M(\sigma^+)$ l'image de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma^+$ dans $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$; c'est un réseau de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ et $\widehat{I_M(\sigma^+)} = \varprojlim I_M(\sigma^+)/\varpi^n$ est un réseau du complété universel $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$.

Proposition 3.1. — $\mathrm{End}_{L[G]}(\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)) = L$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ et comme

$$\mathrm{End}_{L[G]}(\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)) = L$$

d'après le lemme de Schur classique, il suffit de prouver que les vecteurs localement algébriques de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ sont réduits à $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$, et pour cela il suffit de prouver le même résultat pour $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$.

Notons X_n la double classe $KZ\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)KZ$ (cela correspond aux points à distance n du sommet central sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Alors $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]} = \oplus_n \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma_M^{[a,b]}$, et le complété universel de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ est l'ensemble des $x = \sum_{n\geq 0} x_n$, avec $x_n \in \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma_M^{[a,b]}$, et $x_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (i.e. $x_n \in p^{k_n} \mathrm{ind}_{KZ}^{X_n} \sigma^+$, avec $k_n \to +\infty$). L'application $x \mapsto R_n(x) = \sum_{i\leq n} x_i$ est K-équivariante et $x = \lim_{n\to\infty} R_n(x)$. Si x est K_r-algébrique, où $K_r = 1 + p^r \mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_p)$, il en est de même de $R_n(x)$ pour tout n. Comme $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ est admissible, les vecteurs K_r-algébriques dans $\oplus_{i\leq n} \mathrm{ind}_{KZ}^{X_i} \sigma_M^{[a,b]}$ ne dépendent pas de $n \geq n(r)$; on en déduit que $R_n(x) = R_{n(r)}(x)$ pour tout $n \geq n(r)$, et donc que $x = R_{n(r)}(x) \in \mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$. En résumé, les vecteurs localement algébriques du complété universel de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ sont réduits à $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$.

Le résultat s'en déduit. $\square$

Soit Π un $L[G]$-banach unitaire de longueur finie, contenant $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ comme sous-espace dense. Par propriété universelle de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ l'injection $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \hookrightarrow \Pi$ se prolonge en une application continue $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$. Comme $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ n'est

6. On note ind := c-Ind l'induite à support compact.

pas admissible, il n'y a aucune raison *a priori* [7] pour que l'image soit fermée, mais on a le résultat suivant.

Proposition 3.2. — *L'application* $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ *est surjective, et donc* Π *est un quotient de* $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

Démonstration. — La surjectivité de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est une conséquence du fait que Π est résiduellement de longueur finie [**25, 13**] : on fixe un réseau Π^+ de Π, et on note r la longueur de Π^+/ϖ. Comme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans Π, on peut trouver $v_1, \dots, v_r \in \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \cap \Pi^+$ dont les images modulo ϖ engendrent Π^+/ϖ. Mais alors le sous-$\mathscr{O}_L[G]$-module W de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ engendré par $v_1, \dots, v_r$ est de type fini, et donc son complété ϖ-adique $\widehat{W}$ peut être choisi comme boule unité de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$. Par construction $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ envoie $\widehat{W}$ dans Π^+ et induit une surjection modulo ϖ. On en déduit, puisque tout est complet pour la topologie ϖ-adique, que $\widehat{W} \to \Pi^+$ est surjective, ce qui permet de conclure. $\square$

4. Représentations de type M

On va associer un certain nombre d'objets à un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module M satisfaisant les hypothèses du chap. 3 (en plus de la représentation $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ déjà introduite).

4.1. Déformations de Rham et vecteurs localement algébriques

Soit V_0 une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, absolument irréductible. Soient $\delta = \det V_0$, et $\mathscr{B}$ le bloc correspondant à la réduction de V_0. Alors V_0 correspond à un point $x \in X := \operatorname{Spec} R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]$, et la restriction de $T_{\mathscr{B}}^{\delta}$ à une boule ouverte B de l'espace rigide associé à X, contenant x et suffisamment petite, est la trace [8] d'une représentation $\rho_B : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}(B)^+)$. Alors $\mathscr{O}(B)^+ \cong \mathscr{O}_L[[T_1, T_2, T_3]]$ (mais il ne semble pas y avoir de choix naturel des coordonnées T_1, T_2, T_3).

Les techniques des n$^{\mathrm{os}}$ II.2.4 et II.3.1 de [**9**] fournissent un faisceau G-équivariant $U \mapsto D(\rho_B) \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et une $\mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}]$-représentation $\mathbf{\Pi}(\rho_B)$ de G telle que, pour tout $y \in U$, on ait $\mathbf{\Pi}(\rho_B)_y = \mathbf{\Pi}(\rho_y)$, et qui vit dans une suite exacte [9]

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\rho_B)^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D(\rho_B) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_B) \to 0$$

7. Par exemple, si $G = \mathbf{Z}_p$, l'inclusion $\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_p) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p)$ est d'image dense mais n'est pas bijective (et $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p)$ est admissible comme représentation de $\mathbf{Z}_p$, pas $\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_p)$).

8. D'après [**7**, prop. G], sur l'ouvert d'irréductibilité absolue U de X, on dispose d'une représentation à valeurs dans une algèbre d'Azumaya A sur $\mathscr{O}(U)$. Par ailleurs, d'après [**7**, cor. 2.23], le complété de $\mathscr{O}(U)$ en x, est l'anneau des déformations universelles de V_0 de déterminant fixé. Comme V_0 est absolument irréductible, cet anneau est isomorphe à $L[[T_1, T_2, T_3]]$; en particulier U est lisse en tout point. L'algèbre A se trivialise sur une extension finie étale de $\mathscr{O}(U)$ et, comme U est lisse en x, cette extension étale est triviale sur une petite boule autour de x.

9. $\mathbf{\Pi}(\rho_B)^* := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}(B)^+}(\mathbf{\Pi}(\rho_B), \mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}])$

Si E est un quotient de $\mathscr{O}(B)^+[\frac{1}{p}]$, de dimension finie sur L, alors $\rho_E := E\otimes\rho_B$ est une E-représentation de dimension 2, et $\mathbf{\Pi}(\rho_E) := E\otimes\mathbf{\Pi}(\rho_B)$ est une E-représentation de G, vérifiant $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(\rho_E)) = \rho_E$. En spécialisant la suite exacte ci-dessus et en utilisant les techniques de [**9**, chap. V] ou de [**11**, chap. V, VI], on obtient des suites exactes

$$0 \to \mathbf{\Pi}(\rho_E)^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D(\rho_E) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_E) \to 0$$
$$0 \to (\mathbf{\Pi}(\rho_E)^{\mathrm{an}})^* \otimes ((x|x|)^{-1}\delta) \to D_{\mathrm{rig}}(\rho_E) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{\Pi}(\rho_E)^{\mathrm{an}} \to 0$$

On peut appliquer ceci, en particulier, aux quotients E de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\frac{1}{p}]/\mathfrak{m}_x^n$, pour $n \in \mathbf{N}$. Les E-représentations $V = \rho_E$ que l'on obtient vérifient $\mathrm{End}_{E[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}V = E$ et, vues comme L-représentations, n'ont alors que V_0 comme composante de Jordan-Hölder.

Soit V comme ci-dessus (E est donc une algèbre locale de corps résiduel L ; on note $\mathfrak{m}_E$ son idéal maximal).

Théorème 4.1. — *$\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si V est de Rham à poids de Hodge-Tate non tous égaux.*

Remarque 4.2. — (i) Si $V = V_0$, ce résultat est prouvé dans [**9**, chap. VI] (avec des preuves simplifiées dans [**15, 10**]) ; si V est une extension de V_0 par V_0, il est prouvé dans [**16**].

(ii) Soit Π une L-représentation unitaire de G dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont isomorphes à Π_0. Supposons Π_0^{alg} irréductible et dense dans Π_0. Alors une récurrence immédiate (utilisant la densité de $(\Pi/\Pi_0)^{\mathrm{alg}}$ dans Π/Π_0 si Π^{alg} est dense dans Π) sur la longueur de Π montre que Π^{alg} est dense dans Π si et seulement si $\lg(\Pi^{\mathrm{alg}}) = \lg(\Pi)$, et que, si c'est le cas, $\lg(W^{\mathrm{alg}}) = \lg(W)$ pour tout sous-quotient W de Π.

Démonstration. — La preuve du cas $V = V_0$ que l'on trouve dans [**10**] s'étend presque verbatim au cas n quelconque. Nous allons en esquisser les grandes lignes.

Le cas $V = V_0$ permet de supposer V_0 de Rham, à poids de Hodge-Tate $k_1 < k_2$. Soient $\Delta := D_{\mathrm{rig}}(V)$ et $\Delta_0 := D_{\mathrm{rig}}(V_0)$. Comme $\mathrm{End}\, V = E$, on a $\mathrm{End}\,\Delta = E$, ce qui permet d'adapter la preuve de [**10**, prop. 2.2] pour obtenir $A_1, A_2 \in E$ vérifiant $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$ (car $\det V = \delta$) et $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)\Delta \subset t\Delta$ (on a donc $A_i = k_i + P_i$ avec $P_i \in \mathfrak{m}_E$, si $i = 1, 2$). La preuve de [**10**, th. 2.15] montre que le module qui permet de décrire (au moins en tant que module sous l'action du borel) les vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$ est $(\Delta_{\mathrm{dif}}^-)^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$; plus précisément, en adaptant cette preuve, on montre que le $L_\infty[t]$-module $(\Delta_{\mathrm{dif}}^-)^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}}$ est de longueur $(k_2 - k_1)\lg(\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}})$. La preuve de [**10**, prop. 2.7] montre alors que $\lg_{L_\infty[t]}((\Delta_{\mathrm{dif}}^-)^{U(\mathfrak{g})\text{-fini}})$ est la longueur du quotient par le plus grand sous-$L_\infty[[t]]$-réseau N de Δ_{dif}^+ vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset tN$.

Il existe une base $e_{0,1}, e_{0,2}$ de $\Delta_{0,\mathrm{dif}}^+$ vérifiant $\nabla(e_{0,1}) = k_1 e_{0,1}$ et $\nabla e_{0,2} = k_2 e_{0,2}$. Les seuls sous-$L_\infty[[t]]$-modules d'indice fini de $\Delta_{0,\mathrm{dif}}^+$ vérifiant $(\nabla - k_1)(\nabla - k_2)N \subset tN$ sont $\Delta_{0,\mathrm{dif}}^+$ et le module $N_{0,\mathrm{dif}}$ engendré par $e_{0,2}$ et $t^{k_2-k_1}e_{0,1}$.

On peut relever $e_{0,1}, e_{0,2}$ en une base e_1, e_2 de Δ^+_{dif} vérifiant $\nabla(e_1) = A_1 e_1$ et $\nabla(e_2) = A_2 e_2 + Bt^{k_2-k_1} e_1$ avec $B \in L_\infty \otimes_L \mathfrak{m}_E$. La représentation V est de Rham si et seulement si $A_1 = k_1$, $A_2 = k_2$ et $B = 0$.

Posons $L_{E,\infty} := L_\infty \otimes E$. Les seuls sous-$L_{E,\infty}[[t]]$-modules d'indice fini de Δ^+_{dif} vérifiant $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N \subset (t, \mathfrak{m}_E)N$ sont les $N_{\mathrm{dif}} + \Lambda\Delta^+_{\mathrm{dif}}$, où N_{dif} est le module engendré par e_2 et $t^{k_2-k_1} e_1$ et Λ est un idéal de E. Parmi ceux-ci, le seul qui peut fournir des vecteurs localement algébriques de la bonne longueur est N_{dif}, i.e. $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\mathbf{\Pi}(V)$ si et seulement si $(\nabla - A_1)(\nabla - A_2)N_{\mathrm{dif}} \subset tN_{\mathrm{dif}}$. Cette dernière condition équivaut à $(\nabla - A_2)t^{k_2-k_1} e_1 \in tN_{\mathrm{dif}}$ et $(\nabla - A_2)e_2 \in tN_{\mathrm{dif}}$.

- La première des deux conditions équivaut à $A_1 - A_2 + k_2 - k_1 = 0$, et comme $A_1 + A_2 = k_1 + k_2$, cela équivaut à $A_1 = k_1$ et $A_2 = k_2$.
- La seconde équivaut à $B = 0$.

La conjonction des deux conditions équivaut donc à ce que V soit de Rham, ce qui permet de conclure. □

4.2. Déformations infinitésimales de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$

Soit M_{dR} le L-module de rang 2 défini par :

$$M_{\mathrm{dR}} := (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$$

Fixons $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ et soit $L_{\mathscr{L}}$ le corps de définition de $\mathscr{L}$. Choisissons une base e_1, e_2 de M_{dR} sur L, avec $e_1 \notin \mathscr{L}$. Alors il existe $z(\mathscr{L}) \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ tel que $\mathscr{L}$ soit la droite engendrée par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, et $L_{\mathscr{L}} = L(z(\mathscr{L}))$.

Si $n \geq 0$, soit $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, de rang 2 sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, défini par

$$M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M$$

en tant que $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet_{\mathscr{L},n}$ sur

$$(\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n})^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}}$$

étant définie par

$$\mathrm{Fil}^i_{\mathscr{L},n} = \begin{cases} (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes M_{\mathrm{dR}} & \text{si } i \leq -b, \\ (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \cdot (e_2 + (z(\mathscr{L}) + T)e_1) & \text{si } -b+1 \leq i \leq -a, \\ 0 & \text{si } i \geq -a+1. \end{cases}$$

Notons que le sous-module $T^k M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ est isomorphe à $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n-k}$ comme $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré (sur $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$ et donc a fortiori sur L).

Lemme 4.3. — *Si $n \geq 1$, alors :*

(i) *$M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$, vu comme $L_{\mathscr{L}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré, est faiblement admissible.*

(ii) *Les seuls sous-$L_{\mathscr{L}}$-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules filtrés faiblement admissibles de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ sont les $T^k M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$, pour $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer L par $L_{\mathscr{L}}$, et e_2 par $e_2 + z(\mathscr{L})e_1$, on peut supposer que $\mathscr{L}$ est définie sur L et que $z(\mathscr{L}) = 0$.

Les seuls sous-L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules de $M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n}$ sont les $\Lambda \otimes_L M$, où Λ est un sous-L-module de $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$. Comme la filtration n'a que deux crans, le (i) équivaut à ce que

$$\dim_L \big((\Lambda \otimes_L M_{\mathrm{dR}}) \cap \mathrm{Fil}^{-a}_{\mathscr{L},n} \big) \leq \dim_L \Lambda$$

pour tout Λ, et le (ii) à ce que les seuls Λ pour lesquels il y a égalité sont les $T^k(L[T]/T^{n+1-k})$. Comme $\mathrm{Fil}^{-a}_{\mathscr{L},n}$ est l'ensemble des $Pe_2 + TPe_1$, l'intersection ci-dessus est l'ensemble des $Pe_2 + TPe_1$ avec $P \in \Lambda$ et $TP \in \Lambda$. L'inégalité dans le (i) est donc une évidence et, s'il y a égalité, c'est que Λ est stable par $P \mapsto TP$, et donc est un idéal de $L[T]/T^{n+1-k}$, et donc de la forme $T^k(L[T]/T^{n+1-k})$, ce qui permet de conclure. □

Le (i) du lemme 4.3 fournit (grâce à **[14]**) une représentation

$$V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n} := \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(M^{[a,b]}_{\mathscr{L},n})$$

C'est une déformation à $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$ de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, qui est de Rham, dont la réduction modulo T^2 est non scindée (car la filtration n'est pas définie sur $L_{\mathscr{L}}$ modulo T^2), et dont, d'après le (ii) du lemme 4.3, les seuls sous-objets sont les $T^k V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ (isomorphe à $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n-k}$), pour $0 \leq k \leq n$.

Remarque 4.4. — (i) En adaptant les méthodes de **[8**, § 5.1], on peut construire une déformation de Rham de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans un voisinage p-adique, et pas juste dans un voisinage formel.

(ii) Le th. 5.4 et le lemme 5.3 ci-dessous donnent une construction d'une déformation au-dessus de tout l'espace des représentations de Rham de type (M, a, b).

Soit $\mathscr{B}$ le bloc correspondant à la réduction de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$. Alors $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ définit un point de $\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}[\frac{1}{p}]$; notons $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ le complété de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}[\frac{1}{p}]$ en l'idéal maximal correspondant à ce point (isomorphe à $L_{\mathscr{L}}[[T_1, T_2, T_3]]$), et $\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}$ son idéal maximal. On dispose d'une représentation $\widehat{\rho}_{\mathscr{L}} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\widehat{R}_{\mathscr{L}})$ universelle pour les déformations de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ aux $L_{\mathscr{L}}$-algèbres locales finies sur $L_{\mathscr{L}}$ de corps résiduel $L_{\mathscr{L}}$: si E est une telle algèbre et si $\rho_E : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour représentation résiduelle $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, alors il existe $\lambda : \widehat{R}_{\mathscr{L}} \to E$ tel que $\rho_E \cong E \otimes \widehat{\rho}_{\mathscr{L}}$. De plus, $\mathfrak{m}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{m}^2_{\mathscr{L}}$ est isomorphe au groupe des extensions de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ par $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ de déterminant δ (une telle extension est naturellement une $(L_{\mathscr{L}}[T]/T^2)$-représentation de dimension 2 et son déterminant est, a priori, à valeurs dans $L_{\mathscr{L}}[T]/T^2$).

On note $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ le quotient de $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ classifiant les représentations de Rham : on a $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} = \widehat{R}_{\mathscr{L}}/I$, où $I = \cap\, \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux de $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$ tels que $\widehat{R}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{a}$ soit de dimension finie sur $L_{\mathscr{L}}$ (ce qui équivaut à $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^n_{\mathscr{L}}$, pour $n \gg 0$), et $(\widehat{R}_{\mathscr{L}}/\mathfrak{a}) \otimes \widehat{\rho}_{\mathscr{L}}$ soit de Rham.

Proposition 4.5. — $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} \cong L_{\mathscr{L}}[[T]]$.

Démonstration. — Comme $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},2}$ est, à isomorphisme près, l'unique [**16**, prop. 7.17] extension non triviale de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ par $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$, de déterminant δ, qui est de Rham, il s'ensuit que $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ est un anneau local régulier de dimension 1, et donc est un quotient de $L_{\mathscr{L}}[[T]]$. Par ailleurs, l'existence de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$, pour tout n, fournit une suite compatible de morphismes $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}} \to L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, pour $n \in \mathbf{N}$. Le fait que $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},2}$ soit non scindée implique que cette flèche est surjective pour $n = 2$, et donc aussi pour tout n. Il s'ensuit que $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$ admet pour quotient $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, pour tout n. On en déduit le résultat. □

Remarque 4.6. — On déduit de la prop. 4.5 que $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est, à isomorphisme près, l'unique déformation de Rham de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ à $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$, de déterminant δ, dont le quotient par T^2 soit non scindé.

4.3. Déformations infinitésimales de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$

En appliquant les constructions du § 4.1 à $V = V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$, on construit une représentation

$$\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n} := \mathbf{\Pi}(V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n})$$

Remarque 4.7. — (i) Il résulte du th. 4.1 que $(\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n})^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ et on déduit du (ii) de la rem. 4.2 que

$$(\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n})^{\mathrm{alg}} \cong (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$$

En effet, les deux membres ont même longueur d'après la rem. 4.2, sont des $L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}$-modules, et T^n induit un isomorphisme de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}/T$ sur $T^n\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ (tous les deux isomorphes à $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$). Si on choisit $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to (\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n})^{\mathrm{alg}}$ tel que la composée avec la projection sur $(\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}/T)^{\mathrm{alg}}$ soit non nul (possible, d'après la rem. 4.2), alors l'application naturelle $(L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1}) \otimes \mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to (\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n})^{\mathrm{alg}}$ est injective (car injective sur T^n d'après ce qui précède) et donc un isomorphisme pour des raisons de longueur.

(ii) En fait, si $\lambda \in (L_{\mathscr{L}}[T]/T^{n+1})$ est inversible, alors $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est déjà dense dans $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ car les seuls sous-objets stricts de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ sont les $T^k\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ (cela se voit en appliquant le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et en utilisant le fait que les seuls sous-objets stricts de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ sont les $T^kV^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$, cf. lemme 4.3 et définition de $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$), et $\lambda \cdot \mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ n'est inclus dans aucun. Il résulte donc de la prop. 3.2 que $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$ est un quotient de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$.

Proposition 4.8. — *Si Π est une représentation unitaire de G, de caractère central δ, munie d'un morphisme $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ d'image dense, et si les composantes de Jordan-Hölder de Π sont $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ avec multiplicité n, alors $\Pi \cong \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n}$.*

Démonstration. — D'après [**28**, cor. 6.16], la catégorie des représentations unitaires de longueur finie, dont toutes les composantes de Jordan-Hölder sont $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ est équivalence à la catégorie des $\widehat{R}_{\mathscr{L}}$-modules. On peut décrire le foncteur réalisant cette équivalence par la théorie de Gabriel [**21**]. Soit $J_{\mathscr{L}}$ l'enveloppe injective de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans la catégorie des limites inductives de représentations unitaires de G. Alors $\mathrm{End}\, J_{\mathscr{L}} = \widehat{R}_{\mathscr{L}}$ d'après [**28**, cor. 6.16] et comme le bloc de $\Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}}$ dans la catégorie des représentations unitaires de G n'a qu'un élément, on a

$$\Pi \cong (\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*) \otimes_{\widehat{R}_{\mathscr{L}}} J^*_{\mathscr{L}})^*$$

L'hypothèse selon laquelle $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est d'image dense implique a fortiori que Π^{alg} est dense dans Π. Il en résulte, d'après le th. 4.1 et la définition de $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$, que $\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*)$ est en fait un $\widehat{R}_{\mathscr{L},\mathrm{dR}}$-module. La prop. 4.5 implique alors que

$$\mathrm{Hom}(J^*_{\mathscr{L}}, \Pi^*) \cong \oplus_i L_{\mathscr{L}}[[T]]/T^{n_i} \quad \text{et} \quad \Pi \cong \oplus_{i\in I} \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L},n_i}$$

où I est un ensemble fini. On conclut en remarquant que l'hypothèse selon laquelle $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M) \to \Pi$ est d'image dense implique que I n'a qu'un seul élément : en effet, cette hypothèse permet de déduire que $\mathrm{Hom}_G(\Pi, \Pi^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}})$ est de dimension au plus 1, mais d'autre part cet espace est de dimension au moins $|I|$. $\square$

5. Complétion $\mathscr{B}$-adique et anneaux de Kisin

5.1. Les $R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$-modules $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$ et $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$

Notons $I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$ le complété $\mathscr{B}$-adique de $I_M(\sigma^+)$ (cf. § 3). On définit alors le complété $\mathscr{B}$-adique de $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ par :

$$\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) := L \otimes_{\mathscr{O}_L} I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$$

(le résultat ne dépend pas du choix de σ^+). Posons

$$\delta = \delta^{[a,b]}_M, \quad I^+ := I_M(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$$

Alors I^+ est une limite projective d'objets Π_i de $\mathrm{Tors}^{\delta}_{\mathscr{B}}\, G$. On a donc une action de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ sur I^+ et sur $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M)$. Par fonctorialité, cela fournit une action de $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ sur $\rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$. Cette action coïncide avec l'action naturelle de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$, via l'isomorphisme du th. 1.7.

On note $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ le quotient à travers lequel $Z^{\delta}_{\mathscr{B}}$ agit sur I^+ (notons que $R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}$ est sans p-torsion puisque I^+ l'est, cf. cor. 2.11), et on pose

$$R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} := R^{[a,b],+}_{M,\mathscr{B}}[\tfrac{1}{p}]$$

Remarque 5.1. — On verra plus loin que $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur un ouvert strict $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de la droite projective analytique $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$, et donc est très loin d'être réduit à L. Or $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ agit fidèlement sur $\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$, ce qui contraste avec le fait que $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) = L$ (prop. 3.1).

On peut envisager les choses de la manière suivante (et il est probable que la théorie de Dotto-Emerton-Gee [**17, 18**] rende cette vision correcte). Tous les objets ci-dessus « vivent sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ », i.e. $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ est un faisceau sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$ est le localisé-complété de $\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ en l'ouvert $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$. Alors $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M)$ est un fibré en droites sur $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$, qui est trivial ce qui explique que $\mathrm{End}_{L[G]}\widehat{\mathrm{LL}}^{[a,b]}(M) = L$ (sections globales constantes).

Posons
$$\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} := \mathbf{V}(\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M))$$
Alors $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b],+}$ agit, par fonctorialité de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$, sur $\mathbf{V}(I^+)$ et $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ agit sur $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$.

Lemme 5.2. — *$\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est de type fini sur $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$.*

Démonstration. — $I_M(\sigma^+)$ est un facteur direct de $I(\sigma^+)$ et donc I^+ est un facteur direct de $I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}$. Il suffit donc de prouver que $\mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$. On a $k_L \otimes \mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}) = \mathbf{V}(k_L \otimes I(\sigma^+)_{\mathscr{B}}) = \mathbf{V}(I(k_L \otimes \sigma^+)_{\mathscr{B}})$ (les morphismes de transitions entre les objets entrant dans la définition des complétés $\mathscr{B}$-adiques sont surjectifs, et donc les $\mathrm{R}^1 \lim$ s'annulent). Maintenant $I(k_L \otimes \sigma^+)$ est une extension successive finie d'induites compactes $I(W)$, où les W sont de la forme $W_{r,\chi}$, et le cor. 2.8 implique que $k_L \otimes \mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$ est de type fini sur $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$. Il en est donc de même de $\mathbf{V}(I(\sigma^+)_{\mathscr{B}})$. □

5.2. Spécialisation en un point de $\mathrm{Spec}\, R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$

On note $U_{M,\mathscr{B}}$ l'ensemble des $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ tels que $\Pi_{M,\mathscr{L}} \in \mathrm{Ban}_{\mathscr{B}}^{\delta} G$; c'est aussi l'ensemble des $\mathscr{L}$ tels que $V_{M,\mathscr{L}}$ ait pour réduction $\rho_{\mathscr{B}}$. Comme nous le verrons, $U_{M,\mathscr{B}}$ est l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de la droite projective $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$. Soient
$$X = \mathrm{Spec}\, R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}[\tfrac{1}{p}], \quad X_M = \mathrm{Spec}\, R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$$
On note aussi X^{an} et X_M^{an} les espaces analytiques associés à X et X_M : X^{an} est de dimension 3 et, comme nous le verrons, X_M^{an} est de dimension 1 (isomorphe à l'ouvert $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$).

On note $\mathrm{Ban}^{\delta} G$ la catégorie des $L[G]$-banachs unitaires de caractère central δ, de longueur finie. On note $\mathrm{Ban}_{\mathscr{B}}^{\delta} G$ la sous-catégorie de $\mathrm{Ban}^{\delta} G$ des Π dont la réduction est un objet de $\mathrm{Tors}_{\mathscr{B}}^{\delta}$. D'après Paškūnas [**25**], tout objet Π de $\mathrm{Ban}_{\mathscr{B}}^{\delta} G$ a une décomposition $\Pi = \oplus_x \Pi_x$, où la somme porte sur $x \in X$ fermé, $\Pi_x = 0$ sauf pour un nombre fini de x et toutes les composantes de Jordan-Hölder de Π_x sont élément du bloc $\mathscr{B}_x$

de $\mathrm{Ban}^\delta G$ correspondant à x (si le pseudo-caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ correspondant à x est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\mathscr{B}_x$ a un unique élément, si ce pseudo-caractère est $\chi_1 \oplus \chi_2$, ce bloc est constitué des composantes de Jordan-Hölder des induites continues de $\chi_1 \otimes \chi_2\varepsilon^{-1}$ et $\chi_2 \otimes \chi_1\varepsilon^{-1}$ – ces représentations sont toutes les deux irréductibles sauf si $\chi_2 = \chi_1\varepsilon^{\pm 1}$).

Si $x \in X_M$, notons $\mathfrak{m}_x$, l'idéal maximal de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ qui lui est associé, et L_x le corps résiduel $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}/\mathfrak{m}_x$.

Lemme 5.3. — (i) *Si $x \in X_M$, il existe $\mathscr{L}(x) \in U_{M,\mathscr{B}}$ tel que*

$$L_x \otimes_{R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}} \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M) \cong \Pi_{M,\mathscr{L}(x)}, \quad L_x \otimes_{R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}} \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} \cong V_{M,\mathscr{L}(x)}$$

(ii) *Plus généralement, si $n \geq 0$, alors*

$$(R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \otimes_{R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}} \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M) \cong \Pi_{M,\mathscr{L}(x),n}, \quad (R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}/\mathfrak{m}_x^{n+1}) \otimes_{R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}} \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} \cong V_{M,\mathscr{L}(x),n}$$

(iii) *$x \mapsto \mathscr{L}(x)$ est une bijection de X_M sur $U_{M,\mathscr{B}}$.*

Démonstration. — Par construction, $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ est dense dans $\Pi_x = L_x \otimes \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$. Donc le bloc de $\mathrm{Ban}_{\mathscr{B}}^\delta G$ correspondant à x contient un unique $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $\mathscr{L}(x) \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})(L_x)$. Comme $V_{M,\mathscr{L}(x)}$ est irréductible, ce bloc est réduit à $\Pi_{M,\mathscr{L}(x)}$, et on peut déduire les (i) et (ii) de la prop. 4.8.

Enfin, le (iii) est une conséquence de ce qui précède et de ce que $\mathscr{L} \mapsto V_{M,\mathscr{L}}$ est injective. □

5.3. La propriété universelle de $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$

Théorème 5.4. — (i) *$\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est localement libre sur X_M, de rang 2.*

(ii) *X_M est lisse, réduit, purement de dimension 1.*

Démonstration. — Posons, pour simplifier, $R := R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$, $\rho := \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$. Alors R agit fidèlement sur $\mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$ et donc aussi sur ρ car $\mathbf{V}$ ne tue que les représentations de dimension finie, et aucun des blocs qui apparaissent n'en contient.

Notons $\widehat{\rho}_x$ le complété du localisé de ρ en x. Comme ρ est de type fini sur R, on a une injection R-linéaire $\rho \hookrightarrow \prod_x \widehat{\rho}_x$, et comme R agit fidèlement sur ρ, il agit fidèlement sur $\prod_x \widehat{\rho}_x$. Il résulte du (ii) du lemme 5.3 que $\widehat{\rho}_x$ est libre de rang 2 sur $L_x[[T_x]]$ (car $V_{M,\mathscr{L}(x),n}$ est libre de rang 2 sur $L_x[T_x]/T_x^{n+1}$), et comme ρ_x est irréductible, on a $\mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\widehat{\rho}_x) \cong L_x[[T_x]]$. On en déduit une injection d'anneaux $R \hookrightarrow \prod_x L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que R est réduit.

Comme ρ_x est de rang 2, pour tout x (lemme 5.3 (i)), et que ρ est de type fini sur R, cela implique que ρ est localement libre, de rang 2, sur X_M. On en déduit, en utilisant ce qui précède, que le complété $\widehat{R}_x$ de l'anneau local de X_M en x est $L_x[[T_x]]$, ce qui prouve que X_M est lisse, purement de dimension 1. □

Il résulte de [**4**, § 5.3] que l'application $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ ci-dessus est la restriction aux points classiques d'une application analytique $X_M^{\mathrm{an}} \to \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$. L'ensemble $U_{M,\mathscr{B}}$ ci-dessus est donc l'ensemble des points classiques d'un ouvert analytique $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ de $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})^{\mathrm{an}}$, et $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ identifie X_M^{an} à $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ et $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ à l'anneau des fonctions analytiques bornées sur $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$. Comme $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un quotient de $R_{\mathscr{B}}^{\mathrm{ps},\delta}$ qui est de type fini, $U_{M,\mathscr{B}}^{\mathrm{an}}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et comme un ouvert analytique connexe de $\mathbf{P}^1$ est un disque ouvert privé d'un nombre fini de disques fermés, on en déduit les résultats suivants.

Corollaire 5.5. — (i) *$R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un produit fini d'anneaux principaux.*

(ii) *$\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est libre sur $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$, de rang 2.*

Corollaire 5.6. — $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} = \mathrm{End}_G\, \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$.

Démonstration. — L'inclusion $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} \subset \mathrm{End}_G\, \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$ est immédiate ; montrons l'inclusion dans l'autre sens. Soit donc $\alpha \in \mathrm{End}_G\, \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$. Alors α commute à l'action de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ puisque puisque $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un quotient de $Z_{\mathscr{B}}^{\delta}$ qui est le centre de la catégorie. Donc $\mathbf{V}(\alpha) \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}\, \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ commute aussi à l'action de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ et puisque $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est un $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$-module libre de rang 2, et toutes les spécialisations de $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ sont irréductibles, on en déduit que $\mathbf{V}(\alpha) \in \mathrm{M}_2(R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]})$ et que l'image de $\mathbf{V}(\alpha)$ mod $\mathfrak{m}_x$ est une homothétie pour tout $x \in X_M$. Donc $\mathbf{V}(\alpha)$ est une homothétie, i.e. $\mathbf{V}(\alpha) \in R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$.

On peut donc voir $\alpha - \mathbf{V}(\alpha)$ comme un élément de $\mathrm{End}_G\, \mathrm{LL}_{\mathscr{B}}^{[a,b]}(M)$, et on a $\mathbf{V}(\alpha - \mathbf{V}(\alpha)) = 0$, et donc $\alpha - \mathbf{V}(\alpha) = 0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 5.7. — *Si E est un quotient de $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ de degré fini sur L, alors $E \otimes \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de réduction*[10] *$\rho_{\mathscr{B}}^{\oplus[L:E]}$, potentiellement semi-stable à poids a et b, dont le D_{pst} est $E \otimes M$.*

Démonstration. — Cela résulte du (ii) du lemme 5.3 et du théorème des restes chinois. $\square$

Réciproquement, on a le résultat suivant qui montre que $\rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$ est universelle pour ces propriétés.

Théorème 5.8. — *Si E est une L-algèbre commutative de dimension d, et si $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ a pour réduction $\rho_{\mathscr{B}}^{\oplus d}$ et déterminant δ, est potentiellement semi-stable à poids a et b, et si $D_{\mathrm{pst}}(\rho) = E \otimes M$, alors il existe un morphisme $R_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]} \to E$ tel que $\rho = E \otimes \rho_{M,\mathscr{B}}^{[a,b]}$.*

10. Par définition, c'est la semi-simplifiée de $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Lambda$ (vue comme k_L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), où Λ est n'importe quel $\mathscr{O}_L$-réseau stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Démonstration. — Si E est un corps, alors ρ est de la forme $E \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $x \in U_{M,\mathscr{B}}$, et comme $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)} = L_x \otimes \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$, on obtient le résultat dans ce cas.

Si $E = E_0[I]/T^k$, où E_0 est un corps, alors $\rho_i := (T^i E/T^{i+1}E) \otimes_E \rho$ est de la forme $E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$, avec $x \in U_{M,\mathscr{B}}$ indépendant de i. L'extension

$$0 \to \rho_i \to (T^{i-1}E/T^{i+1}E) \otimes_E \rho \to \rho_{i-1} \to 0$$

de $E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x)}$ par elle-même est indépendante de i car la multiplication par T sur ρ induit un isomorphisme permettant de passer de i à $i+1$. Comme le groupe des extensions de Rham est de dimension 1, il y a deux cas possibles :

– toutes ces extensions sont triviales et $\rho = E \otimes_{E_0} \rho_0$, et on conclut comme ci-dessus.

– ces extensions sont non triviales et $\rho = E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$, et on déduit le résultat dans ce cas de ce que $V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k} = (R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}/\mathfrak{m}_x^k) \otimes \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}}$.

Si E est un quotient de $E_0[T_1, \dots, T_r]/(T_1, \dots, T_r)^k$, en raisonnant comme ci-dessus et en utilisant de nouveau que le groupe des extensions de Rham est de dimension 1, on prouve que $\rho = E \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$ ou bien $\rho = E \otimes_{E'} \rho'$, avec E' quotient de E de la forme $E_0[I]/T^k$ et $\rho' \cong E_0 \otimes_{L_x} V^{[a,b]}_{M,\mathscr{L}(x),k}$.

Le cas général s'en déduit en décomposant E comme un produit d'algèbres quotients de $E_0[T_1, \dots, T_r]/(T_1, \dots, T_r)^k$. $\square$

5.4. Applications à la conjecture de Breuil-Mézard

Dans l'énoncé géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard **[6, 20]**, au lieu de fixer le D_{pst}, on fixe seulement la restriction à l'inertie et le déterminant, ce qui fournit a priori deux D_{pst} possibles puisqu'on peut tordre par le caractère non ramifié μ_{-1} d'ordre 2 (rien n'empêche que ces deux D_{pst} soient, en fait, isomorphes). Le résultat est, qu'au lieu de considérer le sous-objet $\mathrm{LL}^{[a,b]}(M)$ de $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ (cf. § 3), on considère à la place $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma_M^{[a,b]}$ en entier.

On pose donc

$$\begin{aligned} M' &= M \quad &\text{ou}\quad & M' = M \oplus (M \otimes \mu_{-1}) \\ \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') &= \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \quad &\text{ou}\quad & \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') = \mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \oplus (\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M) \otimes \mu_{-1}) \\ R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \quad &\text{ou}\quad & R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = R^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \times R^{[a,b]}_{M\otimes\mu_{-1},\mathscr{B}} \\ \rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} &= \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \quad &\text{ou}\quad & \rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = \rho^{[a,b]}_{M,\mathscr{B}} \oplus \rho^{[a,b]}_{M\otimes\mu_{-1},\mathscr{B}} \end{aligned}$$

suivant que $M = M \otimes \mu_{-1}$ ou que $M \neq M \otimes \mu_{-1}$.

Si σ est une k_L-représentation irréductible de K, on note $m_M^{[a,b]}(\sigma)$ la multiplicité de σ dans la réduction de $\sigma_M^{[a,b]}$. L'énoncé suivant est une forme de la version géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard.

Proposition 5.9. — *Les réductions de* $\mathrm{LL}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M')$ *et* $\rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$ *se décomposent sous la forme*

$$\overline{\mathrm{LL}}^{[a,b]}_{\mathscr{B}}(M') = \oplus_\sigma m^{[a,b]}_M(\sigma) I(\sigma)_{\mathscr{B}}$$
$$\overline{\rho}^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = \oplus_\sigma m^{[a,b]}_M(\sigma) \mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$$

Démonstration. — Le premier énoncé est une conséquence du cor. 2.3. Le second s'en déduit via la fonctorialité de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$. □

Remarque 5.10. — Si $\mathscr{B}$ n'est pas un bloc supersingulier, $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$ est de rang 1 sur un quotient de $R^{\mathrm{ps},\delta}_{\mathscr{B}}$, mais ce dernier agit par un pseudo-caractère de dimension 2 (cf. th. 1.7), pas de dimension 1.

La conjecture de Breuil-Mézard (version [11] géométrique **[20]**) postule une décomposition analogue pour les supports des objets ci-dessus, vus comme faisceaux sur $\mathrm{Spec}\, Z^\delta_{\mathscr{B}}$.

On note $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}$ le quotient à travers lequel $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ agit sur $I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ (cet anneau dépend a priori de σ, mais nous ne l'indiquons pas sur la notation). Alors $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}$ s'injecte dans $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$ et on a $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}[\frac{1}{\varpi}]$. Comme $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$ est de dimension 1 puisque c'est un produit d'anneaux principaux, on en déduit que $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi$ est de dimension 1 par platitude de $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}$ sur $\mathscr{O}_L$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi$. Notons encore $\mathfrak{p}$ l'image inverse de $\mathfrak{p}$ dans $Z^\delta_{\mathscr{B}}$; c'est un idéal premier de $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ et $Z^\delta_{\mathscr{B}}/\mathfrak{p}$ est de dimension 1. La conjecture de Breuil-Mézard postule une formule pour la longueur du localisé $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)_{\mathfrak{p}}$ comme $(Z^\delta_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$-module (on note $\ell_{\mathfrak{p}}(M)$ la longueur d'un $(Z^\delta_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$-module). On la déduit du résultat suivant (le membre de gauche se calcule en utilisant la prop. 5.9) :

Proposition 5.11. — *Si* $\mathfrak{p}$ *est comme ci-dessus,*

$$\ell_{\mathfrak{p}}(\overline{\rho}^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}) = 2\ell_{\mathfrak{p}}((R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)_{\mathfrak{p}})$$

Démonstration. — Les longueurs ne changent pas par complétion. Notons donc Z le complété de $(Z^\delta_{\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique, R celui de $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}})_{\mathfrak{p}}$, et V celui de $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$.

Alors R/ϖ est un corps local de dimension 1 – c'est le corps des fractions de $(R^{[a,b],+}_{M',\mathscr{B}}/\varpi)/\mathfrak{p}$ – et donc R est un anneau de valuation discrete dont $R[\frac{1}{\varpi}]$ est le corps des fractions. Comme $\mathbf{V}(I(\sigma)_{\mathscr{B}})$ est sans ϖ-torsion puisque $I(\sigma)_{\mathscr{B}}$ l'est (cor. 2.11), on en déduit que V est un module libre sur R, de rang 2 puisque $\rho^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} I(\sigma)_{\mathscr{B}}$

11. Il semble y avoir une certaine latitude dans l'énoncé de la conjecture : par exemple, on peut prendre des anneaux de déformations de représentations galoisiennes, ou de représentations encadrées ; la version que nous obtenons utilise des anneaux de déformations de pseudo-caractères – le th. 1.7 identifie $Z^\delta_{\mathscr{B}}$ à un tel anneau.

est libre de rang 2 sur $R^{[a,b]}_{M',\mathscr{B}}$. Il s'ensuit que V/ϖ est libre de rang 2 sur R/ϖ ; d'où le résultat. □

Références

[1] L. Barthel, R. Livné, Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

[2] L. Barthel, R. Livné, Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case, J. Number Theory **55** (1995), 1–27.

[3] L. Berger, Central characters for smooth irreducible modular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **128** (2012), 1–6.

[4] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque **319** (2008), 303–337.

[5] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I, Compos. Math. **138** (2003), 165–188.

[6] C. Breuil, A. Mézard, Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $\ell = p$, avec un appendice par G. Henniart, Duke Math. J. **115** (2002), 205–310.

[7] G. Chenevier, The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings, *Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011, Automorphic forms and Galois representations, vol. 1*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **414** (2014), 221–285.

[8] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

[9] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[10] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. EMS **21** (2019) 797–838.

[11] P. Colmez, G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra & Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[12] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld, arXiv :2204.11214 [math.NT], preprint 2022.

[13] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.

[14] P. Colmez, J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

[15] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[16] G. Dospinescu, Extensions de Représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques, Compos. Math. **151** (2015), 1462–1498.

[17] A. Dotto, M. Emerton, T. Gee, Localization of smooth p-power torsion representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, arXiv :2207.04671 [math.NT]

[18] A. Dotto, M. Emerton, T. Gee, A categorical p-adic Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en préparation.

[19] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2009 !

[20] M. Emerton, T. Gee, A geometric perspective on the Breuil-Mézard conjecture, J. Inst. Math. Jussieu **13** (2014), 183–223.

[21] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. SMF **90** (1962), 323–448.

[22] Y. Hu, F. Tan, The Breuil-Mézard conjecture for non-scalar split residual representations, Ann. ENS **48** (2015), 1383–1421.

[23] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings, J. AMS **21** (2008), 513–546.

[24] M. Kisin, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, J. AMS **22** (2009), 641–690.

[25] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor, Publ. IHES **118** (2013), 1–191.

[26] V. Paškūnas, Blocks for mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Automorphic forms and Galois representations*, Vol. 2, 231–247, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 415, Cambridge Univ. Press, 2014.

[27] V. Paškūnas, On the Breuil-Mézard conjecture, Duke Math. J. **164** (2015), 297–359.

[28] V. Paškūnas, S.-N. Tung, Finiteness properties of the category of mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Forum Math. Sigma **9** (2021), e80, 39 pp.

[29] S. Rozensztajn, On the locus of 2-dimensional crystalline representations with a given reduction modulo p, Algebra & Number Theory **14** (2020) 643–700.

[30] P. Scholze, On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Ann. ENS **51** (2018), 811–863.

[31] C. Wang-Erickson, Algebraic families of Galois representations and potentially semi-stable pseudodeformation rings, Math. Ann. **371** (2018), 1615–1681.

---

24 avril 2023

Pierre Colmez, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr

Wiesława Nizioł, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : wieslawa.niziol@imj-prg.fr