École Normale Supérieure de Lyon

Habilitation à diriger des recherches

Discipline : Section CNU 25, Mathématiques

THÉORIE DE HODGE ET REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES

Gabriel DOSPINESCU

Rapporteurs :

Christophe Breuil	Directeur de Recherche, C.N.R.S, Université Paris-Saclay
Toby Gee	Professeur, Imperial College, Londres
Peter Scholze	Professeur, Bonn University

Soutenance publique le 15 septembre 2022, devant le jury composé de :

Konstantin Ardakov	Professeur, Oxford University
Laurent Berger	Professeur, École Normale Supérieure de Lyon
Christophe Breuil	Directeur de Recherche, C.N.R.S, Université Paris-Saclay
Jean-François Dat	Professeur, Sorbonne Université
Frédéric Déglise	Directeur de Recherche, C.N.R.S, École Normale Supérieure de Lyon
Philippe Gille	Directeur de Recherche, C.N.R.S, Institut Camille Jordan Lyon
Ariane Mézard	Professeur, Sorbonne Université

THÉORIE DE HODGE ET REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES

par

Gabriel Dospinescu

Table des matières

1. Introduction

Dans ce texte nous présentons nos travaux sur le programme de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, d'une part des résultats structuraux concernant le "dual unitaire p-adique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$" **[D1]**, **[D2]**, **[D4]**, **[D5]** et d'autre part une réalisation géométrique d'une partie de cette correspondance dans la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld **[D7]**, **[D8]**, **[D14]**, analogue p-adique d'un résultat ℓ-adique bien connu, résultant des travaux de Langlands, Deligne, Carayol, Faltings et Fargues. Ces travaux sont une combinaison de théorie des représentations p-adiques de groupes p-adiques et de méthodes venant de la théorie de Hodge p-adique et du programme de Fontaine. Pour les appliquer à la tour de Drinfeld il est crucial de sortir du cadre "usuel" des variétés algébriques ou des variétés analytiques propres, ce qui offre un certain nombre de surprises **[D9]**, **[D11]**.

Nous avons regroupé nos travaux en quatre thèmes distincts (mais pas sans rapport) :

• l'étude des représentations p-adiques unitaires admissibles du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, continuation des travaux monumentaux **[26]** et **[61]** de Colmez et Paškūnas ;

• l'étude **[D1]**, **[D12]**, **[D13]** de l'influence du caractère infinitésimal sur une représentation p-adique, et la preuve du fait que beaucoup de représentations p-adiques naturelles possèdent des caractères infinitésimaux.

• des théorèmes de comparaison **[D9]**, **[D11]** en théorie de Hodge p-adique pour les variétés analytiques p-adiques de type Stein, et leurs applications **[D10]** à la description de la cohomologie étale p-adique des espaces symétriques de Drinfeld, analogue d'un théorème classique de Schneider et Stuhler.

• la preuve **[D7]** de la conjecture de Breuil et Strauch **[16]** et ses applications **[D8]**, **[D14]** à la description de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

2. Remerciements

Je remercie vivement les rapporteurs Christophe Breuil, Toby Gee et Peter Scholze d'avoir accepté de lire ce mémoire, avec une rapidité et un enthousiasme épatants. Je remercie Konstantin Ardakov, Laurent Berger, Christophe Breuil, Jean-François Dat, Frédéric Déglise, Philippe Gille et Ariane Mézard de me faire l'honneur de participer à mon jury. Les multiples conversations avec les rapporteurs et les membres du jury pendant ces dernières années (à l'exception des années covidesques...) m'ont beaucoup aidé dans ma recherche, et leurs travaux sont des sources inépuisables d'inspiration et d'admiration pour moi. Je voudrais tout particulièrement remercier Christophe Breuil pour son encouragement et son suivi attentif pendant ma collaboration avec Arthur-César Le Bras sur la conjecture de Breuil-Strauch, et pour toutes ses questions et remarques très pertinentes sur ce mémoire et sur certains de mes articles.

Il sera évident au lecteur combien les résultats exposés dans ce mémoire doivent à mes collaborateurs Arthur-César Le Bras, Pierre Colmez, Wiesława Nizioł, Vytautas Paškūnas et Benjamin Schraen. En dehors de leurs contributions mathématiques fondamentales, je leur remercie de m'avoir aidé à lutter contre ma procrastination et de m'avoir appris des tas de choses fascinantes, tout en éprouvant une remarquable résiliance devant mon caractère parfois difficile (les connaisseurs remarqueront la litote...). Frotter et limer ma cervelle contre celle de mes collaborateurs a été un plaisir et un honneur et j'espère que cela continuera longtemps. Je remercie tout particulièrement Pierre et Wiesia pour les quelques milliers de courriels et les centaines (voire milliers...) d'heures de conversations excitantes (et parfois déprimantes...), et pour leur optimisme débordant [(1)] faisant un parfait contraste avec le mien, Arthur-César Le Bras pour avoir partagé avec moi une des plus intenses périodes de recherche de ma vie, Vytautas Paškūnas et Benjamin Schraen pour des tas de discussions (parfois musclées...) autour des groupes p-adiques qui ne sont pas GL_2 (dont je refusais obstinément d'admettre l'existence...) et pour avoir parfois essayé de battre mon niveau de procrastination, chose difficile s'il en est.

Il y a bien d'autres mathématiciens auxquels je dois beaucoup, la liste suivante est loin d'être exhaustive. Je remercie Stefano Morra et Filippo Nuccio pour les discussions passionnantes et toujours enrichissantes et pour leur amitié indéfectible, en toute circonstance. Je remercie Laurent Fargues pour ses réponses à mes multiples questions (souvent stupides...) et pour son aide pendant toutes ces années. Une de ses remarques a été cruciale dans l'article avec Arthur sur la conjecture de Breuil-Strauch, et je voudrais le remercier pour son aide. Je remercie Lue Pan pour des échanges toujours très stimulants (en particulier une conversation avec Lue à Bloomington est à l'origine d'une bonne partie de ce mémoire ; qu'il en soit vivement remercié !), et je remercie Shanwen Wang, Ruochuan Liu, Yiwen Ding pour des multiples invitations à Shanghai et Pekin, endroits bien propices au p-adique... Merci à Eugen Hellmann, Ramla Abdellatif, Joaquin Rodrigues Jacinto, George Boxer, Vincent Pilloni, et bien d'autres collègues pour les joyeux moments passés ensemble à des conférences diverses et variées et pour les multiples discussions. Je remercie Gaëtan Chenevier pour m'avoir énormément appris pendant et

1. "Et où est le problème ?" est un leitmotiv de ces échanges ; le problème étant que parfois il y avait bien des problèmes...

après la thèse : ses articles sont pour moi un modèle d'élégance et de clarté, et les discussions avec lui sont toujours un plaisir. Merci aussi à Juan Esteban Rodriguez Camargo pour plein de discussions depuis deux ans, qui m'ont fait comprendre que je n'ai jamais vraiment compris la théorie de Sen...

Je remercie les collègues de notre département pour les discussions très enrichissantes, les membres de notre équipe pour les groupes de travail et les séminaires qui m'ont permis d'apprendre beaucoup de choses dont je me suis servi plus tard, et pour me rappeler régulièrement que le p-adique c'est fantastique (en particulier merci à Olivier Taibi et à Sophie Morel pour me faire comprendre à chaque fois à quel point ℓ est différent de p...). Je remercie vivement (et une deuxième fois !) Frédéric Déglise pour son aide précieuse dans la préparation de cette soutenance et Vincent Pilloni pour l'incroyable énergie et vivacité dont il a fait preuve au sein de notre équipe.

Je remercie enfin le C.N.R.S et l'E.N.S de Lyon pour les excellentes conditions de travail, et tout particulièrement Magalie et Virginia, qui m'ont énormément aidé ces dernières années et qui m'ont grandement simplifié la vie.

3. Représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans ce chapitre nous présentons des contributions (issues des collaborations [**D2**], [**D4**], [**D5**] avec Benjamin Schraen, Pierre Colmez et Vytautas Paškūnas) à la correspondance de Langlands locale p-adique pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, dont le point de départ est une série [**12**], [**13**], [**14**], [**15**] d'articles de Breuil. Certains des résultats présentés jouent un rôle crucial dans l'étude de la cohomologie de la tour de Drinfeld pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, et leurs preuves font un usage intensif de la plupart des constructions et résultats des trois articles [**25**], [**26**], resp. [**61**] de Colmez, resp. Paškūnas.

Pour toute la suite du chapitre on note $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et on fixe une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$. Soit $\mathscr{O}_L$ (resp. k_L) l'anneau des entiers de L (resp. son corps résiduel).

3.1. Représentations de Banach des groupes de Lie p-adiques. — La catégorie des L-représentations de Banach d'un groupe de Lie p-adique H possède trois sous-catégories naturelles

$$\mathrm{Rep}_L(H) \subset \mathrm{Ban}_L(H)^{\mathrm{unit}} \subset \mathrm{Ban}_L(H),$$

une L-représentation de Banach Π étant dans $\mathrm{Ban}_L(H)$ (resp. $\mathrm{Ban}_L(H)^{\mathrm{unit}}$, resp. $\mathrm{Rep}_L(H)$) si elle est admissible [**71**] (resp. admissible et unitaire (2), resp. admissible, unitaire et résiduellement de longueur finie (3)). On dispose :

• d'un foncteur "réduction modulo p" ou "fibre spéciale" $\Pi \mapsto \overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$ de $\mathrm{Rep}_L(H)$ vers la catégorie des $k_L[H]$-modules lisses, semi-simples, de longueur finie.

• d'un foncteur "passage aux vecteurs localement analytiques" (sauf mention explicite du contraire par "localement analytique" on entend "localement $\mathbf{Q}_p$-analytique") ou "fibre générique" $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$ de $\mathrm{Ban}_L(H)$ vers la catégorie des représentations localement analytiques admissibles (au sens de [**72**]) de H. L'espace Π^{la} est celui des vecteurs $v \in \Pi$ dont l'application orbite $o_v : H \to \Pi, h \mapsto h.v$ est localement analytique, muni de la topologie induite par l'injection $\Pi^{\mathrm{la}} \to \mathrm{LA}(H, \Pi)$ envoyant v sur o_v. Par un théorème fondamental de Schneider et Teitelbaum [**72**] Π^{la} est dense dans Π pour $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$ et le foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$ est exact sur $\mathrm{Ban}_L(H)$.

3.2. Le théorème de finitude pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Si H est un groupe de Lie p-adique, tout objet de $\mathrm{Rep}_L(H)$ est de longueur finie dans $\mathrm{Ban}_L(H)$, mais la réciproque n'est pas vraie en général : si H est compact les objets de $\mathrm{Rep}_L(H)$ sont de dimension finie sur L, mais $\mathrm{Ban}_L(H)$ peut contenir des objets de longueur finie et de dimension infinie sur L.

Le théorème de finitude suivant a été obtenu pour la première fois dans l'article [**61**] de Paškūnas, sous l'hypothèse $p > 3$ et par voie très détournée. La preuve donnée dans [**D5**], nettement plus simple que celle de [**61**] et qui marche pour tout p, remplace les résultats les plus délicats de loc.cit. par un usage astucieux du lemme de Schur [**D2**] et du théorème fondamental de Berger et Breuil [**5**] (voir aussi l'article fondateur [**24**] de Colmez), ainsi que des

2. i.e. il existe un $\mathscr{O}_L$-réseau ouvert, borné $\Pi_0 \subset \Pi$ stable par H et tel que $\dim_{k_L}(\Pi_0 \otimes_{\mathscr{O}_L} k_L)^K < \infty$ pour tout sous-groupe ouvert compact K de H.

3. i.e. Π possède un réseau Π_0 comme ci-dessus tel que $\Pi_0 \otimes_{\mathscr{O}_L} k_L$ soit un $k_L[H]$-module de longueur finie.

constructions astucieuses de Paškūnas. Certains principes généraux se dégagent des arguments utilisés dans [**D5**], mais comme il semble difficile d'éviter le recours au théorème de Berger-Breuil [**5**], il n'est pas clair si le théorème suivant est un miracle spécifique au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ou une manifestation d'un phénomène général [4].

Théorème 3.1. — *Tout objet de longueur finie de* $\mathrm{Ban}_L(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p))^{\mathrm{unit}}$ *est résiduellement de longueur finie.*

Soit B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dans G et soit ω la réduction modulo p du caractère $x \mapsto x|x|$ de $\mathbf{Q}_p^\times$. Si $\chi_1, \chi_2 : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ sont des caractères lisses, on note

$$\pi\{\chi_1, \chi_2\} := (\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1 \otimes \chi_2\omega^{-1}))^{\mathrm{ss}} \oplus (\mathrm{Ind}_B^G(\chi_2 \otimes \chi_1\omega^{-1}))^{\mathrm{ss}},$$

les induites étant lisses. On associe un entier $d(\pi) \in \{1, 2\}$ à tout $k_L[G]$-module lisse absolument irréductible π comme suit : si π est supersingulière on pose $d(\pi) = 1$, sinon $d(\pi)$ est la multiplicité de π dans l'unique représentation de la forme $\pi\{\chi_1, \chi_2\}$ contenant π. Plus explicitement, on a $d(\pi) = 2$ si et seulement si $p > 2$ et π est une tordue de $\mathrm{Ind}_B^G(1 \otimes \omega^{-1})$ ou bien $p = 2$ et π est une tordue de la triviale ou de la représentation de Steinberg. La classification des blocs pour les représentations lisses modulo p due à Paškūnas [**62**] (qui utilise le théorème de Berger-Breuil [**5**]) et le corollaire 3.14 de [**D2**] (une conséquence du lemme de Schur) ramènent la preuve du théorème de finitude à l'énoncé suivant.

Théorème 3.2. — *Soit* Π_0 *un* $\mathscr{O}_L$*-réseau ouvert, borné et stable par* G *dans une représentation absolument irréductible* $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G)^{\mathrm{unit}}$. *Tout* $k_L[G]$*-module lisse absolument irréductible* π *intervient comme sous-quotient de* $\Pi_0 \otimes_{\mathscr{O}_L} k_L$ *avec une multiplicité* $m(\pi) \leq d(\pi)$.

Dans un premier temps on interprète $m(\pi)$ comme une multiplicité en caractéristique 0. Pour cela, on fixe une envelope injective J de π dans la catégorie des représentations lisses localement admissibles [5] de G sur des $\mathscr{O}_L$-modules de torsion. Le dual de Pontryagin P de J est un $\mathscr{O}_L$-module compact, sans p-torsion et $\Pi(P) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}^{\mathrm{cont}}(P, L)$ est une L-représentation de Banach (non admissible !) de G, analogue local de la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires. On montre que $m(\pi) = \dim_L m(\Pi)$, où $m(\Pi) := \mathrm{Hom}_L^{\mathrm{cont}}(\Pi, \Pi(P))$. En posant $E = \mathrm{End}_G^{\mathrm{cont}}(P)$, on vérifie que $m(\Pi)$ est un $E[1/p]$-module à droite de type fini et simple, et que $\mathrm{End}_{E[1/p]}(m(\Pi)) \simeq \mathrm{End}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi)^{\mathrm{op}} = L$, la dernière égalité découlant du lemme de Schur [**D2**].

L'idée est alors de montrer que $E[1/p]$ est "presque commutatif". Plus précisément, appelons un anneau R n-commutatif si (en notant $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ)

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(2n)} = 0, \ \forall x_1, \ldots, x_{2n} \in R.$$

Un théorème classique d'Amitsur et Levitzski montre que $M_n(A)$ est n-commutatif si A est commutatif. Nous allons voir que $E[1/p]$ est $d(\pi)$-commutatif, qui, en vertu d'un théorème de Kaplansky sur les anneaux à identité polynômiale, permet de conclure que $\dim_L m(\Pi) \leq d(\pi)$.

4. Valable pour les $\mathbf{Q}_p$-points d'un groupe réductif déployé, par exemple.
5. i.e. qui sont la réunion de leurs sous-représentations admissibles et de type fini.

Pour montrer que $E[1/p]$ est $d(\pi)$-commutatif il suffit d'exhiber une famille d'idéaux $I_j \subset E[1/p]$ d'intersection nulle et telle que $E[1/p]/I_j$ soit $d(\pi)$-commutatif pour tout j. Soit $\mathrm{Alg}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations algébriques irréductibles de GL_2/L et soit $K := \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Pour $V \in \mathrm{Alg}(G)$ l'espace $X_V := \mathrm{Hom}_K(V, \Pi(P))$ est un $A_V := \mathrm{End}_G(c - \mathrm{Ind}_K^G V) \simeq L[t, z^{\pm 1}]$-module par réciprocité de Frobenius. On montre, en utilisant la densité des fonctions polynômiales dans celles continues et la projectivité de P en tant que $\mathscr{O}_L[[K]]$-module compact (un théorème d'Emerton et Paškūnas **[38]**), que la flèche naturelle

$$\bigoplus_{V \in \mathrm{Alg}(G)} X_V \otimes_L V \to \Pi(P)$$

est d'image dense donc si l'on pose $I_V = \mathrm{Ann}_{E[1/p]}(X_V)$ alors $\cap_{V \in \mathrm{Alg}(G)} I_V = 0$.

Le coeur de l'argument est la preuve du fait que chaque $E[1/p]/I_V$ est $d(\pi)$-commutatif. Des constructions astucieuses de Paškūnas montrent que

$$X_V^{\mathrm{lfin}} := \{x \in X_V |\ \mathrm{long}_{A_V}(A_V.x) < \infty\}$$

est dense dans X_V, ce qui fournit une injection de $E[1/p]/I_V$ dans $\mathrm{End}_{A_V}(X_V^{\mathrm{lfin}})$. Il suffit donc de voir que ce dernier est $d(\pi)$-commutatif. En utilisant la dualité de Matlis et le théorème d'Amitsur-Levitzki on se ramène à prouver l'inégalité

$$\sup_{\mathfrak{m} \in m-\mathrm{Spec}(A_V)} \dim_{k(\mathfrak{m})} X_V^{\mathrm{lfin}}[\mathfrak{m}] \leq d(\pi),$$

qui découle du théorème de Berger-Breuil **[5]** et de la compatibilité entre les correspondances de Langlands p-adique et modulo p pour les représentations cristallines due à Berger **[4]**. Le point crucial est que

$$X_V[\mathfrak{m}] \simeq \mathrm{Hom}_G((c - \mathrm{ind}_K^G V) \otimes_{A_V} k(\mathfrak{m}), \Pi(P))$$

et la dimension de cet espace est la multiplicité de π dans la réduction modulo $\mathfrak{m}_L$ du complété unitaire universel de $(c - \mathrm{ind}_K^G V) \otimes_{A_V} k(\mathfrak{m})$. Comme $(c - \mathrm{ind}_K^G V) \otimes_{A_V} k(\mathfrak{m})$ est le produit tensoriel d'une série principale non ramifiée et de V, il est bien compris par les travaux de Berger et Breuil sus-cités.

3.3. Les constructions magiques de Colmez. — Soit $\mathscr{E}$ le corps des séries de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une suite bornée dans L, qui tend vers 0 quand $n \to -\infty$. La catégorie $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$ est équivalente, grâce à un théorème fondamental de Fontaine **[45]**, à la catégorie $\mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ des L-représentations continues de dimension finie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. On note $D(V) \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ l'objet associé à $V \in \mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$. La dualité de Cartier $V \mapsto \check{V} := \mathrm{Hom}_L(V, L)(1)$ sur $\mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ induit une dualité de Cartier $D \mapsto \check{D}$ sur $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

Fixons maintenant un caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathscr{O}_L^\times$ du centre de G et notons $\mathrm{Rep}_L(G, \delta)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_L(G)$ des représentations dont δ est le caractère central. On doit à Colmez **[26]** la construction simple et miraculeuse (6) d'un foncteur exact contravariant

$$\mathbf{D} : \mathrm{Rep}_L(G,\delta) \to \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}),$$

s'annulant sur la sous-catégorie épaisse $\mathrm{Rep}_L(G,\delta)^{\mathrm{fin}}$ de $\mathrm{Rep}_L(G,\delta)$ formée d'objets de dimension finie sur L et induisant ainsi un foncteur exact

$$\mathbf{D} : \mathrm{Rep}_L(G,\delta)/\mathrm{Rep}_L(G,\delta)^{\mathrm{fin}} \to \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}).$$

Une construction nettement plus sophistiquée de Colmez (chapitre II de **[26]**) fournit un foncteur

$$\mathscr{F}_\delta : \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Sh}_G^{\mathrm{cont}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))$$

vers la catégorie des faisceaux G-équivariants de L-espaces vectoriels topologiques sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. On note $D \boxtimes_\delta U := \mathscr{F}_\delta(U)$ et $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 := H^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p), \mathscr{F}_\delta)$. La construction de $\mathscr{F}_\delta$ est franchement compliquée, mais la restriction de $\mathscr{F}_\delta$ à $\mathbf{Z}_p$ est assez simple, par exemple

$$D \boxtimes_\delta (i + p^k\mathbf{Z}_p) = (1+T)^i\varphi^k(D),\ i \in \mathbf{Z}_p, k \in \mathbf{Z}_{\geq 0},$$

les applications de transition étant aussi très explicites. Noter que D peut avoir un rang arbitraire sur $\mathscr{E}$ dans cette construction, mais on obtient des objets de $\mathrm{Rep}_L(G,\delta)$ seulement dans des situations exceptionnelles (7).

La preuve du théorème suivant est éparpillée façon puzzle (8) dans le long chapitre III de l'article **[D4]**. Elle repose pleinement sur les travaux **[25]** et **[26]** de Colmez, mais on trouve dans **[D4]** beaucoup d'arguments plus simples et plus généraux que ceux de **[26]**, et la généralité du théorème ci-dessous est indispensable pour les applications discutées plus loin dans ce chapitre.

Théorème 3.3. — *a) Le foncteur*

$$\mathbf{D} : \mathrm{Rep}_L(G,\delta)/\mathrm{Rep}_L(G,\delta)^{\mathrm{fin}} \to \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$$

est pleinement fidèle, son image essentielle $\mathscr{MF}_L(\delta)$ est stable par sous-quotients, et la dualité de Cartier $D \mapsto \check{D}$ transforme $\mathscr{MF}_L(\delta)$ en $\mathscr{MF}_L(\delta^{-1})$.

b) Il existe un foncteur

$$\Pi_\delta : \mathscr{MF}_L(\delta^{-1}) \to \mathrm{Rep}_L(G,\delta)$$

6. Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G,\delta)$ et soit Π_0 un $\mathscr{O}_L$-réseau ouvert, borné et G-stable de Π. On pose (le résultat ne dépend pas du choix de Π_0) $\mathbf{D}(\Pi) = (\varprojlim_n \mathbf{D}(\Pi_0/p^n\Pi_0))[1/p]$ les $\mathbf{D}(\Pi_0/p^n\Pi_0)$ étant définis comme suit. Puisque $\Pi_0/p^n\Pi_0$ est de longueur finie, il est engendré en tant que $\mathscr{O}_L[G]$-module par un sous $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]$-module $W_n \subset \Pi_0/p^n\Pi_0$ de type fini sur $\mathscr{O}_L$. Le semi-groupe $P^+ := \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p\setminus\{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \subset P := \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^\times & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ laisse stable

$$D^+_{W_n}(\Pi_0/p^n\Pi_0) := \left(\sum_{g\in P\setminus P^+} g.W_n\right)^\perp \subset (\Pi_0/p^n\Pi_0)^\vee,$$

ce qui permet de munir $D^+_{W_n}(\Pi_0/p^n\Pi_0)$ d'actions de φ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p) \simeq \mathbf{Z}_p^\times$, correspondant aux actions de $\left(\begin{smallmatrix}p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, ainsi que d'une structure de $\mathscr{O}_L[[T]] \simeq \mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$-module. On pose alors $\mathbf{D}(\Pi_0/p^n\Pi_0) = D^+_{W_n}(\Pi_0/p^n\Pi_0)[1/T]$.

7. Sinon la correspondance de Langlands locale p-adique aurait une drôle de tête !

8. Et pour une bonne raison : elle utilise la plupart des résultats des chapitres 2, 3, 4 de **[26]** et de l'article **[25]**.

et un isomorphisme naturel $\mathbf{D}(\Pi_\delta(D)) \simeq \check{D}$, *ainsi qu'une suite exacte naturelle de* G*-modules topologiques*

$$0 \to \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi_\delta(D) \to 0.$$

Les foncteurs $\mathbf{D}$ et $D \mapsto \Pi_\delta(\check{D})$ permettent d'étudier $\mathrm{Rep}_L(G, \delta)$ (à des morceaux de dimension finie près) en termes de (φ, Γ)-modules, pour lesquels on a beaucoup d'outils. Tous les résultats non formels portant sur $\mathrm{Rep}_L(G, \delta)$ dans ce chapitre sont démontrés via ce lien.

Remarque 3.4. — Un analogue surconvergent/localement analytique du résultat ci-dessus est établi dans les chapitres 5 et 6 de [**D4**], en adaptant et simplifiant les techniques de Colmez dans le chapitre 5 de [**26**]. Cela fournit une suite exacte analogue, dans laquelle D est remplacé par le (φ, Γ)-module D_{rig} sur l'anneau de Robba associé à D, et les représentations de Banach (resp. leurs duaux) sont remplacées par leurs vecteurs localement analytiques (resp. leurs duaux). L'avantage est que l'action de l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur tous ces objets est nettement plus simple que celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, comme il a été remarqué dans [**D1**].

Le résultat crucial suivant permet d'associer à toute L-représentation continue de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ un objet de $\mathrm{Rep}_L(G)$, en utilisant l'équivalence de Fontaine et les foncteurs Π_δ ci-dessus. Il a été démontré par Colmez dans [**26**], en adaptant un argument de Kisin [**56**], et les ingrédients importants sont la densité des points cristallins dans chaque composante irréductible de l'espace des déformations d'une représentation $\bar{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ et le théorème de Berger-Breuil [**5**]. Le seul cas qui n'était pas connu était celui de la représentation triviale pour $p = 2$, et il s'agit de notre seule contribution (partagée avec Colmez et Paškūnas) [**D6**] :

Théorème 3.5. — *Si* $\dim_{\mathscr{E}} D = 2$ *et si* $\delta_D = \chi_{\mathrm{cyc}}^{-1} \det D$, *alors* $D \in \mathscr{MF}_L(\delta_D^{-1})$.

On obtient la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (de Galois vers $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$) en posant, pour $V \in \mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ de dimension 2

$$\Pi(V) := \Pi_{\delta_{D(V)}}(D(V)) \in \mathrm{Rep}_L(G, \chi_{\mathrm{cyc}}^{-1} \det V).$$

On a donc $\mathbf{D}(\Pi(V)) = \check{D}(V)$.

3.4. Filtration par rayon d'analyticité. — On peut raffiner le foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$ en regardant la filtration par rayon d'analyticité. Soit H un groupe de Lie p-adique et soit K un sous-groupe ouvert de H qui est un pro-p groupe uniforme. Soit $(k_1, \ldots, k_d)$ un système minimal de générateurs topologiques de K et soit $(\Pi, ||\cdot||)$ une L-représentation de Banach de H. Pour $n \geq 1$ notons $\Pi_K^{(n)}$ l'espace des vecteurs $v \in \Pi$ pour lesquels [9]

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} p^{-|\alpha| r_n} (k_1 - 1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (k_d - 1)^{\alpha_d} v = 0,$$

que l'on munit de la norme

$$||v||_K^{(n)} := \sup_\alpha p^{|\alpha| r_n} ||(k_1 - 1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (k_d - 1)^{\alpha_d} v||.$$

9. En posant $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ et $r_n = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$.

En utilisant les techniques de Schneider-Teitelbaum **[72]** on montre dans le chapitre IV de **[D4]** que le sous-espace $\Pi_K^{(n)}$ de Π ne dépend pas du choix du système minimal de générateurs de K et que l'on obtient ainsi un foncteur exact $\Pi \mapsto \Pi_K^{(n)}$ de $\mathrm{Ban}_L(H)$ vers la catégorie des L-représentations de Banach (pas forcément admissibles !) de K. De plus, on a $\Pi_K^{(n+1)} = \Pi_{K^p}^{(n)}$ et (conséquence du théorème d'Amice) $\Pi^{\mathrm{la}} = \bigcup_{n\geq 1} \Pi_K^{(n)}$.

Soit $\mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_L(G)$ des représentations qui possèdent un caractère central. Le résultat technique suivant est le coeur de l'article **[D4]** (cf. th. VII.11 et sa preuve), il est crucial pour les résultats de pleine fidélité du paragraphe ci-dessous.

Théorème 3.6. — *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ et soit K un sous-groupe ouvert de G qui est un pro-p groupe uniforme.*

a) Pour tout n assez grand on a

$$\sum_{K^p \subset gKg^{-1}} g.\Pi_K^{(n)} = \Pi_K^{(n+1)}.$$

b) Soit $\Pi_{0,K}^{(n)}$ la boule unité du Banach $\Pi_K^{(n)}$ et soit Π_0 un $\mathscr{O}_L$-réseau ouvert, borné et G-stable de Π. Il existe une constante c telle que pour tout n assez grand on ait

$$p^c(\Pi_0 \cap \Pi^{\mathrm{la}}) \subset \sum_{g\in G} g.\Pi_{0,K}^{(n)} \subset \Pi_0 \cap \Pi^{\mathrm{la}}.$$

L'inclusion de $\sum_{K^p \subset gKg^{-1}} g.\Pi_K^{(n)}$ dans $\Pi_K^{(n+1)}$ est une conséquence formelle de la discussion ci-dessus, mais l'autre inclusion n'a rien d'évident [10]. De même, l'inclusion à droite dans b) est triviale, mais celle à gauche est assez subtile.

Le résultat suivant est un sous-produit de la preuve du théorème ci-dessus, et je ne sais pas le démontrer pour $D^\times$ à la place de G, avec D l'algèbre de quaternions non déployée sur $\mathbf{Q}_p$ (il est cependant facile de voir que b) est une conséquence de a)).

Corollaire 3.7. — *a) Soit K un sous-groupe ouvert pro-p uniforme de G et soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$. Pour n assez grand $\Pi_K^{(n)}$ est dense dans Π^{la}.*

b) Si $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ alors

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathrm{Lie}(G)}(\Pi_1^{\mathrm{la}}, \Pi_2^{\mathrm{la}}) = \varinjlim_{K} \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_K(\Pi_1^{\mathrm{la}}, \Pi_2^{\mathrm{la}}),$$

la limite inductive étant prise sur les sous-groupes ouverts K de G.

3.5. Pleine fidélité de $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$ et complétés unitaires universels. — Un des résultats principaux de **[D4]** est la pleine fidelité du foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$ de la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ vers celle des représentations localement analytiques admissibles de G. On ne peut pas espérer qu'un tel énoncé soit vrai pour un groupe de Lie p-adique quelconque H et pour la catégorie $\mathrm{Ban}_L(H)$: cela tombe en défaut trivialement pour le groupe $\mathbf{Z}_p$ et l'espace Π des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$, comme nous l'a fait remarquer Paškūnas.

---

10. Elle implique par exemple que Π^{la} est engendré comme $L[G]$-module abstrait par $\Pi_K^{(n)}$ pour n assez grand, un énoncé qui serait fort utile pour d'autres groupes que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$...

En fait [**D4**] montre un résultat nettement plus fort (et plus utile !) que la pleine fidélité de $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$. Si Π est une représentation continue d'un groupe de Lie p-adique H sur un L-espace vectoriel localement convexe, un *complété unitaire universel* de Π est (suivant Emerton [**36**]) une L-représentation de Banach unitaire $\hat{\Pi}$ de H munie d'un morphisme $\Pi \to \hat{\Pi}$ induisant une bijection $\mathrm{Hom}_H^{\mathrm{cont}}(\hat{\Pi}, X) \simeq \mathrm{Hom}_H^{\mathrm{cont}}(\Pi, X)$ pour toute L-représentation de Banach unitaire X de H (on ne demande pas que X ou $\hat{\Pi}$ soient admissibles). Bien que de nature fondamentale, la notion de complété universel ne se comporte pas vraiment bien :

• des représentations naturelles ne possèdent pas de complété unitaire universel, comme le montre l'espace $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ muni de l'action évidente par translation de $\mathbf{Z}_p$. Cet exemple montre qu'un isomorphisme du type $\widehat{\Pi^{\mathrm{la}}} = \Pi$ est illusoire en toute généralité, pour Π une L-représentation de Banach admissible d'un groupe de Lie p-adique, et donc le théorème ci-dessous n'est pas formel.

• si Π est une L-représentation localement analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, il n'y a pas de lien direct entre Π et les vecteurs localement analytiques de $\widehat{\Pi}$ (en supposant que ce dernier existe) : il peut arriver que $\widehat{\Pi}$ soit nul sans que Π le soit, ou bien que $\widehat{\Pi}$ soit non admissible ou, pire, que $\widehat{\Pi}$ soit non nul et admissible, et ses vecteurs localement analytiques contiennent strictement Π.

Le résultat ci-dessous a trouvé des applications inattendues dans l'étude de la cohomologie de la tour de Drinfeld en dimension 1. Il découle facilement du théorème 3.6 (et de la discussion qui le suit) et de l'observation suivante d'Emerton : si Π est une représentation continue de G sur un L-espace localement convexe, l'existence de $\hat{\Pi}$ est équivalente à celle d'un réseau [(11)] $\mathscr{L} \subset \Pi$ qui est ouvert dans Π, stable par G et minimal pour ces propriétés (i.e. si $\mathscr{L}'$ est un autre tel réseau, alors $\mathscr{L}'$ contient $p^k\mathscr{L}$ pour un certain k), et alors $\hat{\Pi} = \widehat{\mathscr{L}}[1/p]$, avec $\widehat{\mathscr{L}} = \varprojlim_n \mathscr{L}/p^n\mathscr{L}$.

Théorème 3.8. — *Tout* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ *est le complété unitaire universel de* Π^{la}.

Remarque 3.9. — a) Combiné au lemme de Schur [**D2**], le théorème montre que pour toute représentation absolument irréductible $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathrm{Lie}(G)$ agit par des scalaires sur Π^{la}. Ce résultat a été obtenu pour la première fois dans [**D1**]. La preuve de loc.cit. est nettement plus simple, mais passe encore par le lien avec les (φ, Γ)-modules. Avec Benjamin Schraen, je conjecture (voir [**D2**] pour une conjecture moins fine) que la flèche $\mathrm{End}_H^{\mathrm{cont}}(\Pi) \to \mathrm{End}_H^{\mathrm{cont}}(\Pi^{\mathrm{la}})$ est d'image dense (pour les topologies naturelles sur ces espaces) pour toute représentation de Banach admissible Π d'un groupe de Lie p-adique H(conjecture ouverte même pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$...).

b) Le théorème ci-dessus est équivalent au fait que pour tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ l'injection $\Pi^* \to (\Pi^{\mathrm{la}})^*$ déduite de la densité de Π^{la} dans Π identifie le dual topologique Π^* de Π à l'espace des vecteurs du L-Fréchet $(\Pi^{\mathrm{la}})^*$ dont la G-orbite est bornée. C'est sous cette forme que le résultat est utilisé dans les applications géométriques.

11. i.e. un sous $\mathscr{O}_L$-module $\mathscr{L}$ de Π qui engendre Π en tant que L-espace vectoriel ; on ne demande pas que $\mathscr{L}$ soit séparé p-adiquement.

3.6. Le "dual unitaire p-adique" de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — En composant le foncteur $\mathbf{D}$: $\mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}} \to \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, l'équivalence de Fontaine $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}) \simeq \mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$ et la dualité de Cartier, on obtient un foncteur (de Colmez) exact, covariant

$$\mathbf{V} : \mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}} \to \mathrm{Rep}_L(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$$

tel que $\mathbf{V}(\Pi(V)) \simeq V$ si $\dim_L V = 2$.

On dit qu'un objet $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G)^{\mathrm{unit}}$ est *supersingulier* (ou *non-ordinaire*) si Π est absolument irréductible (et donc dans $\mathrm{Rep}_L(G)^{\mathrm{cc}}$ par le théorème 3.1 et le lemme de Schur [**D2**]) et si Π n'est pas isomorphe à un sous-quotient (12) de l'induite parabolique continue d'un caractère unitaire du tore diagonal de G. Soit $\hat{G}_{\mathrm{ss}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations supersingulières dans $\mathrm{Ban}_L(G)^{\mathrm{unit}}$. Le résultat principal de [**D5**] s'énonce alors :

Théorème 3.10. — *a) Le foncteur* $\mathbf{V}$ *induit une bijection entre* $\hat{G}_{\mathrm{ss}}$ *et l'ensemble des classes d'isomorphisme de L-représentations continues, absolument irréductibles, de dimension* 2 *de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

b) Le foncteur $\mathbf{V}$ *est compatible avec la théorie du corps de classes local : si* ω_Π *est le caractère central de* $\Pi \in \hat{G}_{\mathrm{ss}}$*, alors*

$$\det \mathbf{V}(\Pi) = \chi_{\mathrm{cyc}} \cdot \omega_\Pi.$$

c) Un objet absolument irréductible Π *de* $\mathrm{Ban}_L(G)^{\mathrm{unit}}$ *est supersingulier si et seulement si, après avoir éventuellement remplacé L par une extension quadratique non ramifiée,* $\bar{\Pi}^{\mathrm{ss}}$ *est supersingulière ou bien isomorphe à* $\pi\{\chi_1, \chi_2\}$ *pour certains caractères lisses* $\chi_1, \chi_2 : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$.

La preuve de ce théorème est très détournée. Le théorème de finitude (plus précisément le th. 3.2) permet de montrer que $\dim \mathbf{V}(\Pi) \le 2$ pour $\Pi \in \hat{G}_{\mathrm{ss}}$. Le théorème 3.3 permet d'exclure le cas $\dim \mathbf{V}(\Pi) = 1$. La partie la plus difficile est alors la preuve du point b), une fois celle-ci acquise on peut faire tourner la machine du chapitre III de [**D4**] et déduire le point c). Pour se rendre compte que l'égalité $\det \mathbf{V}(\Pi) = \chi_{\mathrm{cyc}} \cdot \omega_\Pi$ n'a rien de trivial il suffit de rappeler que par construction $\mathbf{V}(\Pi)$ ne dépend que de la restriction de Π au sous-groupe mirabolique $P := \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^\times & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de G. Le point b) du théorème montre que l'on peut récupérer le caractère central de Π à partir de cette restriction, ce qui est pour le moins surprenant (13). On montre d'ailleurs dans [**D5**] que le théorème ci-dessus a pour conséquence le fait que $\mathrm{Hom}_P^{\mathrm{cont}}(\Pi_1, \Pi_2) = \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi_1, \Pi_2)$ pour $\Pi_1, \Pi_2 \in \hat{G}_{\mathrm{ss}}$. La même relation $\det \mathbf{V}(\Pi) = \chi_{\mathrm{cyc}} \cdot \omega_\Pi$ est le point clé pour montrer l'injectivité de $\mathbf{V}$ en restriction à $\hat{G}_{\mathrm{ss}}$, la surjectivité étant assurée par le théorème 3.5. En fait, l'énoncé essentiel que l'on démontre est le suivant : si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est absolument irréductible de rang 2, alors $\delta_D := \chi_{\mathrm{cyc}}^{-1} \det D$ est l'unique caractère unitaire δ pour lequel $D \in \mathscr{MF}(\delta^{-1})$. Quand D est triangulin cela se démontre par une analyse fine des vecteurs localement analytiques de $\Pi_\delta(D)$, suivant les techniques de [**27**], [**D1**] et [**D3**]. Les mêmes techniques permettent de traiter le cas d'un D non triangulin ayant au moins un poids de

12. Ces sous-quotients sont bien compris : ce sont des induites paraboliques, des caractères unitaires ou des tordues de la représentation de Steinberg continue.

13. Et totalement faux dans la théorie des représentations lisses : la théorie du modèle de Kirillov montre que toutes les supercuspidales de G ont "la même" restriction à P.

Hodge-Tate-Sen non nul, mais le cas restant demande des arguments diaboliquement astucieux (paragraphe 3.4 de [**D5**]). Voir les paragraphes 1.4 et 3.2 de [**D5**] pour un fil d'Ariane de la preuve.

4. Représentations p-adiques quasi-simples

Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus dans un projet en collaboration avec Benjamin Schraen et Vytautas Paškūnas [**D12, D13**], qui suggèrent que certains énoncés classiques de la théorie des représentations des groupes réels ont des analogues p-adiques. Ils montrent aussi que beaucoup de représentations p-adiques d'origine globale sont quasi-simples [14], et que pour des groupes très petits comme celui des unités d'une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}_p$ la quasi-simplicité d'une représentation de Banach admissible entraîne des propriétés de finitude assez fortes.

4.1. Une conjecture locale. — Le point a) du théorème suivant tombe en défaut [15] si l'on supprime l'hypothèse d'unitarité des représentations et le point b) est l'un des théorèmes profonds de la théorie "abstraite" des représentations pour les groupes réels.

Théorème 4.1. — *Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbf{R}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ et soit $\widehat{G(\mathbf{R})}$ le dual unitaire [16] de $G(\mathbf{R})$.*

a) (Segal) Il existe une application

$$\widehat{G(\mathbf{R})} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}-\mathrm{alg}}(Z(\mathfrak{g}), \mathbf{C}), \ \pi \mapsto \chi_\pi$$

telle que $X.v = \chi_\pi(X)v$ pour tous $X \in Z(\mathfrak{g})$, $\pi \in \widehat{G(\mathbf{R})}$ et $v \in \pi^{\mathrm{la}}$.

b) (Harish-Chandra) Les fibres de l'application $\pi \mapsto \chi_\pi$ sont finies.

Soit maintenant G un groupe réductif connexe sur $\mathbf{Q}_p$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, soit L une extension finie assez grande de $\mathbf{Q}_p$ et soit $Z(\mathfrak{g})_L = Z(U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{Q}_p} L))$. On dit qu'une L-représentation de Banach Π de $G(\mathbf{Q}_p)$ est *quasi-simple* si $Z(\mathfrak{g})_L$ agit par des scalaires sur Π^{la} et alors on appelle le morphisme $\chi_\pi : Z(\mathfrak{g})_L \to L$ qui s'en déduit [17] le *caractère infinitésimal de* Π. Soit $\widehat{G(\mathbf{Q}_p)}_L$ le "dual unitaire p-adique de $G(\mathbf{Q}_p)$", i.e. l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets absolument irréductibles de $\mathrm{Ban}_L(G(\mathbf{Q}_p))^{\mathrm{unit}}$. Dans une collaboration avec Benjamin Schraen [**D2**] nous avons conjecturé l'analogue p-adique suivant du théorème ci-dessus [18].

Conjecture 4.2. — *Tout $\Pi \in \widehat{G(\mathbf{Q}_p)}_L$ est quasi-simple et les fibres de l'application "caractère infinitésimal"*

$$\widehat{G(\mathbf{Q}_p)}_L \to \mathrm{Hom}_{L-\mathrm{alg}}(Z(\mathfrak{g})_L, L)$$

sont les L-points d'un espace rigide analytique.

14. i.e. leurs vecteurs localement analytiques possèdent un caractère infinitésimal.
15. Il n'est pas si facile de construire des contre-exemples...
16. L'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbf{R})$.
17. On a donc $X.v = \chi_\pi(X)v$ pour tous $X \in Z(\mathfrak{g})_L$ et $v \in \Pi^{\mathrm{la}}$.
18. La deuxième assertion de la conjecture ci-dessous n'y figure pas, mais on a le droit d'être optimiste...

Cette conjecture est plutôt optimiste car le théorème suivant (résultat principal de [**D1**]) est le seul résultat tangible (en dehors du cas des tores).

Théorème 4.3. — *La conjecture est vraie pour* $G = \mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}_p$.

Il est assez frustrant de ne pas disposer d'une preuve "directe" de ce théorème, ne reposant pas sur la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Une preuve utilisant les (φ, Γ)-modules se trouve dans [**D1**], nous en donnons une autre (avec quelques soucis pour $p \leq 3$) dans [**D12**], en utilisant des méthodes globales mais aussi des résultats locaux de Tung [**76**], [**77**] (eux-mêmes reposant sur ceux de Berger-Breuil [**5**], Colmez [**26**] et Paškūnas [**61**]...).

4.2. Une conjecture globale. — Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbf{Q}$, de centre Z et soit K_∞ un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{R})$. Pour tout sous-groupe ouvert compact K_f de $G(\mathbf{A}_f)$ notons $\tilde{Y}(K_f) = G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/Z(\mathbf{R})^0 K_\infty^0 K_f$. Soit $K_f^p = \prod_{\ell \neq p} K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact assez petit de $G(\mathbf{A}_f^p)$ et notons

$$\tilde{H}^i = \tilde{H}^i(K_f^p) = \varprojlim_n \varinjlim_{K_p} H^i(\tilde{Y}(K_f^p K_p), \mathscr{O}_L/p^n)$$

les groupes de cohomologie complétée associés, les K_p parcourant les sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathbf{Q}_p)$.

Soit S un ensemble fini de nombres premiers, contenant p et tel que G soit non ramifié sur $\mathbf{Q}_\ell$ et K_ℓ soit hyperspécial pour $\ell \notin S$. L'algèbre

$$\mathbf{T}^{\mathrm{univ}} = \bigotimes_{\ell \notin S} \mathscr{H}_\ell, \ \mathscr{H}_\ell := \mathscr{O}_L[K_\ell \backslash G(\mathbf{Q}_\ell)/K_\ell]$$

agit par des opérateurs de Hecke sur chaque $\tilde{H}^i$ et on peut (suivant Emerton [**41**]) construire [(19)] une algèbre profinie $\mathbf{T}$, complétion d'un certain quotient de $\mathbf{T}^{\mathrm{univ}}$, qui agit encore sur chaque $\tilde{H}^i$ et qui n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux ouverts (cependant il n'est pas connu si $\mathbf{T}$ est noethérienne). Une forme faible de la conjecture principale de [**D12**] est :

Conjecture 4.4. — *Soit* $i \geq 0$ *et soit* $x : \mathbf{T}[1/p] \to L'$ *un morphisme continu de* L*-algèbres, avec* L' *une extension finie de* L*. La* $G(\mathbf{Q}_p)$*-représentation de Banach* $(\tilde{H}^i \otimes_{\mathscr{O}_L} L)[\ker(x)]$ *est quasi-simple.*

Nous ne disposons à ce jour d'aucune méthode "abstraite" pour montrer l'existence d'un caractère infinitésimal, sauf si Π^{la} est absolument irréductible (on peut alors appliquer le lemme de Schur localement analytique de [**D2**]), condition qui n'est pas facile à vérifier en pratique. Un des buts de [**D12**] est de préciser le caractère infinitésimal conjectural de $(\tilde{H}^i \otimes_{\mathscr{O}_L} L)[\ker(x)]$, et de démontrer la conjecture dans certains cas accéssibles, par "prolongement analytique".

---

19. Précisément $\mathbf{T}$ est l'adhérence de l'image de $\mathbf{T}^{\mathrm{univ}}$ dans le $\mathscr{O}_L$-module profini $\prod_{K_p} \prod_M \prod_i \mathrm{End}_{\mathscr{O}_L}(H^i(\tilde{Y}(K_f^p K_p), \tilde{\mathscr{M}}))$, le produit étant pris sur les sous-groupes ouverts compacts K_p de $G(\mathbf{Q}_p)$, les représentations continues de K_p/Λ_p sur des $\mathscr{O}_L$-modules de longueur finie M et les $i \geq 0$, Λ_p étant l'adhérence de $Z(\mathbf{Q}) \cap K_f^p K_p K_\infty^0 Z(\mathbf{R})^0$ dans K_p et $\tilde{\mathscr{M}}$ étant le système local associé à M.

4.3. Caractères infinitésimaux et paramètres galoisiens locaux. — La majeure partie de [**D12**] est consacrée à un analogue p-adique d'une construction classique (qui remonte à Langlands) dans la théorie des groupes réels, associant à un paramètre de Langlands un caractère infinitésimal.

Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbf{Q}_p$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, déployé sur une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$. Le groupe dual $\hat{G}$ de G, défini sur $\mathbf{Z}$, est muni d'une action $\mu_G : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{Aut}(\hat{G})$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et on note $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\ker(\mu_G)$ et ${}^L G_f = \hat{G} \rtimes \Gamma$. Soit X un espace rigide analytique sur $\mathbf{Q}_p$ et soit [20] $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \hat{G}(\mathscr{O}(X)) \rtimes \Gamma$ une représentation continue admissible, i.e. telle que la flèche induite $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \hat{G}(\mathscr{O}(X)) \rtimes \Gamma \to \Gamma$ soit la projection naturelle. Dans [**D12**] on associe à ρ un "caractère infinitésimal" $\zeta_\rho \in \mathrm{Hom}_{L-\mathrm{alg}}(Z(\mathfrak{g})_L, \mathscr{O}(X))$ et on montre que cette construction est compatible [21] avec la conjecture globale de Buzzard et Gee [**17**] concernant l'existence de représentations galoisiennes pour les représentations automorphes C-algébriques. Pour que cela ait un sens il faudrait avoir une construction $\rho \mapsto \zeta_\rho^C$ analogue pour les représentations à valeurs dans le C-groupe de G (au lieu du L-groupe de G, comme ci-dessus), et c'est ce qui est fait dans [**D12**], mais par souci de simplicité nous n'entrons pas dans les détails techniques assez pénibles.

Pour donner une brève idée de la construction de ζ_ρ, regardons d'abord le cas d'une représentation continue $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(L)$. Pour lui associer un morphisme de L-algèbres $\zeta_\rho : Z(\mathfrak{g})_L \to L$ il suffit, par l'isomorphisme d'Harish-Chandra, de fournir n éléments de L. Ces éléments sont simplement les coefficients du polynôme caractéristique de l'opérateur de Sen de ρ, donc ζ_ρ encode les poids de Hodge-Tate-Sen de ρ. La construction pour un groupe général G est un peu plus compliquée, mais semblable. Pour simplifier supposons que $X = \mathrm{Sp}(A)$ est affinoïde. Soit E une extension finie galoisienne qui déploie G et prenons un plongement $\tau : E \to L$. Une combinaison de l'isomorphisme d'Harish-Chandra et du théorème de restriction de Chevalley fournit un isomorphisme (qui dépend de τ) $\kappa_\tau : Z(\mathfrak{g})_L \simeq S(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\widehat{G}}$, $S(\widehat{\mathfrak{g}}^*)$ étant l'anneau des fonctions polynômiales sur $\widehat{\mathfrak{g}}$. Le formalisme tannakien combiné avec la théorie de Sen en familles [**6**] permet d'attacher à ρ un "opérateur de Sen" $\Theta_{\mathrm{Sen},\rho} \in (\mathbf{C}_p \widehat{\otimes} A) \otimes_L \mathfrak{g}$, et le théorème d'Ax-Sen-Tate combiné à des propriétés de rationalité des isomorphismes d'Harish-Chandra et Chevalley montre que l'application $S(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\widehat{G}} \to \mathbf{C}_p \widehat{\otimes} A$ d'évaluation en $\Theta_{\mathrm{Sen},\rho}$ est en fait à valeurs dans $E \otimes A$. En composant l'application ainsi obtenue avec $E \otimes A \to A, x \otimes a \mapsto \tau(x)a$ on obtient une flèche $\theta_\tau : S(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\widehat{G}} \to A$, et on pose alors $\zeta_\rho = \theta_\tau \circ \kappa_\tau$. On montre que cette construction ne dépend pas du choix de τ.

Revenons maintenant au contexte de la conjecture 4.4. En étant encore plus optimiste que Buzzard et Gee, on peut espérer que pour tout morphisme continu de L-algèbres $x : \mathbf{T}[1/p] \to L'$ (avec L'/L finie) on peut construire une représentation continue admissible $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q},S} \to {}^C G_f(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ telle que pour $\ell \notin S$ le semi-simplifié de $\rho(\mathrm{Frob}_\ell)$ est compatible avec le morphisme $x_\ell : \mathscr{H}_\ell \to$

20. Il est possible de travailler dans une plus grande généralité, et c'est ce qui est fait dans [**D12**].

21. i.e. pour une représentation automorphe C-algébrique π on peut relier les caractères infinitésimaux associés par [**D12**] aux restrictions de ρ_π ("la" représentation galoisienne associée à π par la conjecture de Buzzard-Gee) aux places divisant p et les caractères infinitésimaux des composantes infinies de π ; voir la prop. 5.15 de [**D12**] pour l'énoncé exact.

$\mathbf{T} \to \overline{\mathbf{Q}}_p$ induit par x, via la correspondance de Satake pour les C-groupes de Zhu [**82**] (voir la conjecture 9.31 de [**D12**] pour les détails). Un tel ρ n'a aucune raison d'être unique, mais on montre que tous les ρ comme ci-dessus ont le même caractère infinitésimal ζ_ρ^C, que l'on notera donc ζ_x^C. On raffine alors la conjecture 4.4 comme suit :

Conjecture 4.5. — *$Z(\mathfrak{g})_L$ agit sur $(\tilde{H}^i \otimes_{\mathscr{O}_L} L)[\ker(x)]$ par ζ_x^C.*

4.4. La stratégie de [D12] et ses applications. — Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbf{Q}_p$, déployé sur une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, et soit $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G(\mathbf{Q}_p))$. L'idée de [**D12**] est la suivante : pour montrer que Π est quasi-simple, il suffit de trouver une famille Π_X de représentations de Banach admissibles de $G(\mathbf{Q}_p)$ contenant Π, paramétrée par un espace rigide analytique X, telle que "beaucoup" de membres Π_x de cette famille possèdent "beaucoup" de vecteurs sur lesquels $Z(\mathfrak{g})_L$ agit par des caractères, qui "varient analytiquement avec x".

Plus précisément, donnons-nous un sous-groupe ouvert compact K de $G(\mathbf{Q}_p)$ et une $\mathscr{O}_L$-algèbre locale noethérienne complète R, de même corps résiduel que L, ainsi qu'un $R[[K]]$-module de type fini M. On voit M comme un $R[[K]]$-module compact et on pose $\Pi_X = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathscr{O}_L}(M, L)$ (un espace de Banach pour la norme sup), où $X = \mathrm{Spf}(R)^{\mathrm{rig}}$. Chaque point $x \in X$ (correspondant à un idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $R[1/p]$) donne naissance à $\Pi_X[\mathfrak{m}_x] \in \mathrm{Ban}_{k(x)}(K)$. Soit $\mathrm{Irr}_G(L)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations algébriques irréductibles de G_L. Vue comme $G(\mathbf{Q}_p)$-représentation, chaque $V \in \mathrm{Irr}_G(L)$ possède un caractère infinitésimal ζ_V. Soit R_V le quotient de R qui agit de manière fidèle sur le $R[1/p]$-module de type fini $M(V) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_K(V, \Pi)^*$ (Z^* étant, comme partout dans ce mémoire, le L-dual topologique de Z).

Théorème 4.6. — *Supposons que R_V est réduit pour tout $V \in \mathrm{Irr}_G(L)$ et qu'il existe*

- *un morphisme de L-algèbres $\chi : Z(\mathfrak{g})_L \to \mathscr{O}(X)$ tel que pour tous $x \in m-\mathrm{Spec}(R_V[1/p])$ et $V \in \mathrm{Irr}_G(L)$ la spécialisation $\chi_x : Z(\mathfrak{g})_L \to k(x)$ de χ en x est ζ_V.*
- *une suite M-regulière $y_1, \dots, y_h$ dans l'idéal maximal de R telle que $M/(y_1, \dots, y_h)M$ soit un $\mathscr{O}_L[[K]]$-module projectif de type fini.*

Alors $\Pi[\mathfrak{m}_x]$ est quasi-simple, de caractère infinitésimal χ_x pour tout $x \in X$.

Soit $D(K, L)$ la L-algèbre des distributions localement analytiques sur K à valeurs dans L et soit $\Pi^{R-\mathrm{la}} \subset \Pi^{\mathrm{la}}$ le L-dual topologique de $(\mathscr{O}(X)\widehat{\otimes}_L D(K, L)) \otimes_{R[[K]]} M$. On vérifie facilement que $\Pi^{R-\mathrm{la}}[\mathfrak{m}_x] = \Pi[\mathfrak{m}_x]^{\mathrm{la}}$ pour tout $x \in m-\mathrm{Spec}(R[1/p])$. Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que $1 \otimes D - \chi(D) \otimes 1 \in \mathscr{O}(X)\widehat{\otimes}_L D(K, L)$ tue $\Pi^{R-\mathrm{la}}$ pour tout $D \in Z(\mathfrak{g})_L$, et il suffit de voir que les deux injections naturelles

$$\bigoplus_{V \in \mathrm{Irr}_G(L)} \mathrm{Hom}_K(V, \Pi^{R-\mathrm{la}}) \otimes_L V \to \Pi^{R-\mathrm{la}}$$

et

$$\bigoplus_{x \in m-\mathrm{Spec}(R_V[1/p])} \mathrm{Hom}_K(V, \Pi^{R-\mathrm{la}}[\mathfrak{m}_x]) \otimes_L V \to \mathrm{Hom}_K(V, \Pi^{R-\mathrm{la}}) \otimes_L V$$

sont d'image dense, puisque par hypothèse $1 \otimes D - \chi(D) \otimes 1$ tue l'image de la seconde injection. C'est dans la preuve de la densité des images des applications ci-dessus que les hypothèses du théorème entrent en jeu (voir l'introduction de **[D12]** ou le th. 8.5 de loc.cit. pour plus de détails).

Le théorème 4.6 n'est utile que si l'on dispose d'objets R, M et χ comme dans son énoncé. Dans des situations globales on peut construire de tels objets en utilisant les représentations galoisiennes associées aux formes automorphes, M étant le dual d'un groupe de cohomologie complétée ou un "module patché", comme ceux introduits par Caraiani, Emerton, Gee, Geraghty, Paškūnas et Shin dans **[18]**. Pour vérifier les hypothèses on a besoin de résultats de compatibilité local-global (faible) en p. Dans un certain nombre de situations on peut vérifier les hypothèses et obtenir par exemple l'énoncé suivant, dont le flou artistique est, on l'espère, compensé par sa lisibilité relative. Nous renvoyons le lecteur au paragraphes 9.7-9.10 de **[D12]** pour les "vrais" énoncés (voir aussi le th. 1.4. de loc.cit. et la discussion qui le précède pour un énoncé plus précis et plus général).

Théorème 4.7. — *La conjecture 4.5 est vraie pour les courbes de Shimura sur un corps totalement réel, pour les groupes unitaires définis sur un corps totalement réel et pour les variétés de Shimura unitaires compactes étudiées par Caraiani et Scholze dans* **[19]***, si l'on localise la cohomologie complétée en un idéal maximal faiblement non Eisenstein de* $\mathbf{T}$.

Le théorème 4.6 permet aussi de montrer que les représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$ construites à partir des "modules patchés" dans **[18]** sont quasi-simples, et leur caractère infinitésimal s'obtient en appliquant la construction $\rho \mapsto \zeta_\rho$ à la représentation locale ρ, en particulier il ne dépend pas des choix globaux faits dans la construction du "module patché".

Plus précisément, soit F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, soit $K = \mathrm{GL}_n(\mathscr{O}_F) \subset G := \mathrm{GL}_n(F)$, et supposons que p ne divise pas $2n$. Soit $\rho^\square : \mathscr{G}_F \to \mathrm{GL}_n(R^\square_{\bar\rho})$ la déformation universelle (encadrée) d'une représentation continue $\bar\rho : \mathscr{G}_F \to \mathrm{GL}_n(k_L)$. En utilisant des formes automorphes sur des groupes unitaires définis, les six auteurs mentionnés ci-dessus introduisent :

• une $R^\square_{\bar\rho}$-algèbre plate R_∞. On note $\rho : \mathscr{G}_F \to \mathrm{GL}_n(R_\infty)$ la représentation obtenue par changement de base de $\rho^\square$.

• un $R_\infty[[K]]$-module compact M_∞ muni d'une structure compatible de $R_\infty[G]$-module. Soit $\Pi_\infty = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathscr{O}_L}(M_\infty, L)$.

Fixons un idéal maximal y de $R_\infty[1/p]$ et notons x son image dans $m-\mathrm{Spec}(R^\square_{\bar\rho}[1/p])$. On obtient une représentation galoisienne $\rho_x : \mathscr{G}_F \to \mathrm{GL}_n(k(x))$, à laquelle on peut associer (par un argument de torsion, cf. le lemme 5.12 de **[D12]**) une représentation ρ_x^C à valeurs dans le C-groupe de GL_n.

Théorème 4.8. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *la* $\mathbf{Q}_p$*-algèbre de Lie de* $G = \mathrm{GL}_n(F)$*. La* $k(y)$*-représentation unitaire admissible* $\Pi_\infty[\mathfrak{m}_y]$ *de* G *est quasi-simple, de caractère infinitésimal* $\zeta^C_{\rho^C_x}$.

À son tour, le théorème ci-dessus combiné à des résultats de Tung **[76, 77]** (qui reposent de manière cruciale sur le foncteur de Colmez **[26]** et les résultats de Berger et Breuil **[5]**) et Paškūnas **[61]** permet retrouver [22] le théorème 4.3.

22. La situation est un peu plus compliquée que cela quand p est petit, cf. la remarque 9.30 de **[D12]**.

Une autre application importante du théorème 4.6 est le résultat suivant, établi dans [**D13**]. Supposons que $p > 2$ et notons D l'algèbre de quaternions non déployée sur $\mathbf{Q}_p$. En utilisant la cohomologie de l'espace de Lubin-Tate de niveau infini, Scholze [**70**] a défini un foncteur JL de la catégorie des $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$-modules lisses admissibles (sur des $\mathscr{O}_L$-modules de torsion) vers celle des $\mathscr{O}_L[D^\times]$-modules lisses admissibles. Ce foncteur s'étend naturellement en un foncteur

$$\mathrm{JL} : \mathrm{Ban}_L(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p))^{\mathrm{unit}} \to \mathrm{Ban}_L(D^\times)^{\mathrm{unit}}.$$

Voir la discussion qui précède le th. 3.10 pour l'ensemble $\widehat{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}_{\mathrm{ss}}$.

Théorème 4.9. — *Pour tout* $\Pi \in \widehat{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}_{\mathrm{ss}}$ *la représentation* $\mathrm{JL}(\Pi)$ *est quasi-simple et possède "le même" caractère infinitésimal que* Π.

Nous verrons ci-dessous des conséquences assez surprenantes du théorème.

4.5. Dimension de Gelfand-Kirillov et caractères infinitésimaux. — Soit H un groupe de Lie p-adique et soit π un $k_L[H]$-module lisse admissible. La dimension de Gelfand-Kirillov $d(\pi)$ de π est un entier dans $[0, \dim H]$ mesurant la taille des invariants de π par les sous-groupes ouverts compacts de H : si K un sous-groupe ouvert de H qui est un pro-p groupe uniforme et si K_n est le sous-groupe fermé de K engendré par les k^{p^n}, $k \in K$, il existe des réels $a, b > 0$ tels que

$$b \cdot p^{nd(\pi)} \leq \dim_{k_L} \pi^{K_n} \leq a \cdot p^{nd(\pi)}, \ \forall n \geq 1.$$

Si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$, on définit sa dimension de Gelfand-Kirillov $d(\Pi)$ en choisissant K comme ci-dessus et un $\mathscr{O}_L$-réseau ouvert, borné Θ de Π stable par K, et en posant $d(\Pi) = d(\Theta \otimes_{\mathscr{O}_L} k_L)$ (cela ne dépend pas des choix faits ci-dessus).

Le théorème suivant est un des résultats principaux de l'article [**D13**].

Théorème 4.10. — *Supposons que* G *est un sous-groupe ouvert compact de* $\mathscr{G}(\mathbf{Q}_p)$*, où* $\mathscr{G}$ *est un groupe réductif connexe sur* $\mathbf{Q}_p$*. Si* $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G)$ *est quasi-simple, alors* $d(\Pi) < \dim \mathscr{N}$*, où* $\mathscr{N}$ *est le cône nilpotent dans* $\mathrm{Lie}(\mathscr{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_p})$.

Il n'est pas impossible que la borne optimale dans le théorème soit en fait $\frac{1}{2} \dim \mathscr{N}$, i.e. la dimension de la variété des drapeaux pour $\mathscr{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$, mais démontrer un tel résultat semble hors de portée même pour $\mathscr{G} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_{p^2}/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{GL}_2)$. Notons que l'inégalité large dans le théorème est *beaucoup* plus simple à démontrer, tout le point du théorème est que cette borne n'est jamais atteinte (l'analogue de cette assertion pour les représentations localement analytiques quasi-simples est totalement faux !). La preuve repose sur des résultats fins d'Ardakov et Wadsley [**3**], [**1**], [**2**] concernant les modules de Verma affinoïdes et un analogue p-adique du plongement de Conze (une jolie application de la théorie de la localisation d'Ardakov-Wadsley).

En rang 1, le théorème ci-dessus fournit des résultats surprenants :

Corollaire 4.11. — *Soit* D *une algèbre de quaternions sur* $\mathbf{Q}_p$ *(on admet* $D = M_2(\mathbf{Q}_p)$*), et soit* $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(D^\times)$ *quasi-simple. Soit* K *un sous-groupe ouvert de* $D^\times$ *qui est uniforme pro-p.*

a) Si le caractère infinitésimal de Π *n'est pas algébrique, alors* Π *est un* K*-module topologique de longueur finie.*

b) Le K-module topologique[23] $\Pi_K^{(n)}$ *est de longueur finie pour tout $n \geq 1$.*

Remarque 4.12. — Soit D l'algèbre de quaternions non déployée sur $\mathbf{Q}_p$.

a) Grâce au théorème 4.9 on fabrique des représentations de Banach admissibles, de dimension infinie et de longueur finie de $D^\times$. Un tel phénomène est bien entendu impossible modulo p !

b) En appliquant (via le th. 4.7) le corollaire 6.3 de [**D13**] (qui est une version du corollaire ci-dessus pour $D = M_2(\mathbf{Q}_p)$, K étant remplacé par G) aux espaces Hecke-propres dans la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires on obtient une preuve du fait que ces espaces sont des représentations de Banach de longueur finie, qui *n'utilise pas* la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ni la classification des représentations lisses irréductibles modulo p de ce groupe, contrairement à la preuve d'Emerton [**37**]. Le prix à payer est que l'on obtient beaucoup moins d'information que dans loc.cit.

c) Les auteurs de [**D13**] ont échoué pendant plusieurs années à trouver une réponse à la question naturelle suivante : que se passe-t-il si le caractère infinitésimal de Π est algébrique dans le point a) du corollaire ci-dessus ? Supposons d'abord que $D = M_2(\mathbf{Q}_p)$ et que Π est unitaire, avec un caractère central, et bien entendu quasi-simple. Dans ce cas on peut montrer (voir le cor. 6.3 de [**D13**]) que Π est résiduellement de longueur finie en tant que G-module topologique, en particulier de longueur finie comme G-module topologique. Un résultat (travail en cours) de Dotto permet alors de montrer que si Π est générique (en un sens que l'on peut préciser mais que l'on ne fera pas ici), alors ou bien Π possède des vecteurs localement algébriques (à twist près) ou bien Π est un K-module topologique de longueur finie. La situation est nettement moins bien comprise quand D est une algèbre à division. Par exemple, les auteurs ne savent pas répondre à la question basique suivante (qui est en fait liée au point a) du corollaire ci-dessus) : peut-on trouver $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(D^\times)$ quasi-simple et de longueur infinie ? Par exemple, est-il possible de trouver une telle représentation dont l'espace des vecteurs lisses est de dimension infinie ? La question est un peu subtile : si l'on remplace $D^\times$ par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (qui a "la même" algèbre de Lie), on trouve facilement des telles représentations (utiliser des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associées à des représentations de de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, par exemple), mais si l'on remplace $D^\times$ par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et que l'on demande en plus que Π soit unitaire et à caractère central, la réponse devient négative, toujours par le corollaire 6.3 de [**D13**].

En combinant les théorèmes 4.10 et et 4.3 on obtient le joli énoncé suivant, qui dit que les théorèmes 4.3 et 3.1 sont quasiment équivalents, expliquant probablement pourquoi une preuve "directe" du théorème 4.3 se fait attendre, malgré la simplicité de l'énoncé.

Théorème 4.13. — *Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G)^{\mathrm{unit}}$ possède un caractère central, alors $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ si et seulement si Π^{la} est tué par un idéal de codimension finie de $Z(\mathrm{Lie}(G))_L$.*

23. Voir le paragraphe 3.4 pour la définition.

5. Théorie de Hodge et variétés Stein p-adiques

On présente dans ce chapitre les résultats obtenus dans les articles [**D9**], [**D10**] et [**D11**], en collaboration avec Pierre Colmez et Wiesława Nizioł, qui étudient les théorèmes de comparaison en théorie de Hodge p-adique pour les variétés analytiques p-adiques de type Stein. Ils ont été motivés par le désir de comprendre la cohomologie étale p-adique des revêtements du demi-plan de Drinfeld, mais ont évidemment un intérêt propre. Les résultats des chapitres 3 et 4 de [**D9**] ont été raffinés et étendus dans les travaux ultérieurs de Colmez et Nizioł [**31**], [**32**], [**33**], nous allons nous concentrer sur [**D10**] et [**D11**], ainsi que sur les chapitres 5 et 6 de [**D9**], qui étudient l'exemple crucial des espaces symétriques de Drinfeld.

5.1. Cohomologies étale et pro-étale. — Soit C une extension algébriquement close et complète de $\mathbf{Q}_p$ et soit X une variété rigide analytique lisse sur C. On pose

$$H^*_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}_p):=H^*(\mathrm{Rlim}_n R\Gamma(X_{\text{ét}},\mathbf{Z}/p^n)),\ \ H^*_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_p):=H^*_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}_p)\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p.$$

On a alors une suite exacte

$$0\to \mathrm{R}^1\mathrm{lim}_n H^{i-1}(X_{\text{ét}},\mathbf{Z}/p^n)\to H^i_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}_p)\to \varprojlim_n H^i(X_{\text{ét}},\mathbf{Z}/p^n)\to 0.$$

Sur le site pro-étale $X_{\text{proét}}$ de X on dispose d'un faisceau $\widehat{\mathbf{Z}}_p:=\varprojlim_n \mathbf{Z}/p^n$ de $\mathbf{Z}_p$-modules et on note

$$H^*_{\text{proét}}(X,\mathbf{Z}_p):=H^*(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbf{Z}}_p),\quad H^*_{\text{proét}}(X,\mathbf{Q}_p):=H^*(X_{\text{proét}},\widehat{\mathbf{Z}}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p)$$

Scholze a montré (prop. 8.2 de [**68**]) que la flèche naturelle $H^*_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}_p)\to H^*_{\text{proét}}(X,\mathbf{Z}_p)$ est un isomorphisme. Le morphisme naturel $H^*_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_p)\to H^*_{\text{proét}}(X,\mathbf{Q}_p)$ est donc un isomorphisme si X est quasi-compact et quasi-séparé, mais très loin d'être un isomorphisme sans cette hypothèse. Le point est que dans le calcul de la cohomologie pro-étale à coefficients $\mathbf{Q}_p$ on inverse p localement sur chaque ouvert affinoïde, mais quand on calcule la cohomologie étale à coefficients $\mathbf{Q}_p$ on doit travailler avec des coefficients entiers sur chaque ouvert affinoïde, et inverser p seulement à la fin : donc pour la cohomologie pro-étale et pour un espace non quasi-compact les classes de cohomologie auront souvent des dénominateurs en p non bornés, alors que ceux des classes de cohomologie étale sont bornés (par définition).

5.2. Le charme discret d'une boule ouverte. — On commence par un exemple simple mais instructif de pathologie qui peut intervenir quand on quitte le monde merveilleux des variétés propres. Considérons la boule unité ouverte $D=\{|z|<1\}$ sur une extension algébriquement close et complète C de $\mathbf{Q}_p$. Sa cohomologie de de Rham est nulle en degré strictement positif, et il en est de même de celles étales et pro-étales ℓ-adiques pour $\ell\neq p$, cependant :

Proposition 5.1. — *On a $H^2_{\text{proét}}(D,\mathbf{Q}_p(1))=0$ et un isomorphisme naturel*

$$\exp:\mathscr{O}(D)/C\simeq H^1_{\text{proét}}(D,\mathbf{Q}_p(1)).$$

La théorie de Kummer et l'annulation de $H^2_{\text{ét}}(D, \mathbf{G}_m)$ (un résultat de Berkovich) fournissent un isomorphisme [24]

$$H^2_{\text{ét}}(D, \mathbf{Z}_p(1)) \simeq \widehat{\text{Pic}(D)}$$

et une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(D)^* \widehat{\otimes} \mathbf{Z}_p \to H^1_{\text{ét}}(D, \mathbf{Z}_p(1)) \to T_p(\text{Pic}(D)) \to 0.$$

Le remarquable résultat suivant suggère qu'il se passe quelque chose de mystérieux :

Théorème 5.2. — *(Lazard)* $\text{Pic}(D) = 0$ *si et seulement si* C *est sphériquement complet.*

Ce résultat ne suffit pas pour conclure que $H^2_{\text{ét}}(D, \mathbf{Z}_p(1)) \neq 0$ quand C n'est pas sphériquement complet, mais des techniques (bien astucieuses) semblables à celles de Lazard fournissent le résultat suivant (cf. appendice A de [**D11**]).

Théorème 5.3. — *Si* C *n'est pas sphériquement complet, alors* $\text{Pic}(D)$ *est sans torsion et n'est pas* p*-divisible.*

Corollaire 5.4. — *a) On a des isomorphismes naturels*

$$H^1_{\text{ét}}(D, \mathbf{Z}_p(1)) \simeq 1 + T\mathscr{O}_C[[T]], \;\; H^1_{\text{ét}}(D, \mu_{p^n}) \simeq (1 + T\mathscr{O}_C[[T]]) \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

b) C *est non sphériquement complet si et seulement si* $H^2_{\text{ét}}(D, \mathbf{Z}_p(1))$ *est non nul, et dans ce cas* $H^2_{\text{ét}}(D, \mathbf{Z}_p(1))$ *est sans torsion et la flèche naturelle* $H^2_{\text{ét}}(D, \mathbf{Q}_p(1)) \to H^2_{\text{proét}}(D, \mathbf{Q}_p(1))$ *n'est pas injective.*

5.3. Cohomologie des courbes. — On suppose pour simplifier que $p > 2$ dans ce paragraphe et [25] que l'extension algébriquement close et complète C de $\mathbf{Q}_p$ vérifie $v_p(C^*) = \mathbf{Q}$. Soit k_C le corps résiduel de C, $\mathscr{O}_{\breve{C}} = W(k_C)$ et $\breve{C} = \mathscr{O}_{\breve{C}}[1/p]$.

5.3.1. Cohomologie d'un affinoïde lisse de dimension 1. — Soit X un affinoïde lisse sur C, connexe et de dimension 1. Il est bien connu que le C-espace vectoriel topologique $H^1_{\text{dR}}(X) := \Omega^1(X)/d\mathscr{O}(X)$ est de dimension infinie et non séparé. Soit $H^1_{\text{dR}}(X)^{\text{sep}}$ son séparé, i.e. le quotient de $H^1_{\text{dR}}(X)$ par l'adhérence de $\{0\}$. Le résultat suivant, dont la preuve occupe une bonne partie de [**D11**], montre que $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p(1))$ est contrôlé par un espace de Banach-Colmez relié à $H^1_{\text{dR}}(X)^{\text{sep}}$ et par le groupe

$$\mathscr{O}(X)^{**} = \{f \in \mathscr{O}(X)^* |\; ||f - 1||_{\text{sp}} < 1\},$$

où $||g||_{\text{sp}} = \lim_{n\to\infty} ||g^n||^{1/n}$ est la norme spectrale de $g \in \mathscr{O}(X)$ ($||\cdot||$ étant une norme sur l'algèbre affinoïde $\mathscr{O}(X)$). Notons que $\mathscr{O}(X)^{**}$ n'est pas p-adiquement complet en général [26], ce qui explique la complétion intervenant dans l'énoncé (dans l'énoncé ci-dessous $\mathbf{Q}_p \widehat{\otimes} \mathscr{O}(X)^{**}$ désigne $\widehat{\mathscr{O}(X)^{**}}[1/p]$, la complétion étant p-adique) :

24. La complétion est p-adique.
25. Tous les résultats ci-dessous ont des variantes pour $p = 2$. L'hypothèse sur C n'est pas vraiment cruciale.
26. C'est déjà le cas si $\mathscr{O}(X) = C\langle T\rangle$ (i.e. X est une boule fermée), regarder par exemple $\prod_{n\geq 1}(1+p^{1/p^n}T)^{p^n}$.

Théorème 5.5. — *Le C-espace vectoriel $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^{\mathrm{sep}}$ est de dimension finie et il existe un (φ,N)-module $H^1_{\mathrm{HK}}(X)^{\mathrm{sep}}$ sur $\breve{C}$ muni d'un isomorphisme fonctoriel*

$$\iota_{\mathrm{HK}} : C\otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(X)^{\mathrm{sep}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X)^{\mathrm{sep}},$$

ainsi qu'un diagramme commutatif fonctoriel d'espaces de Banach, la ligne du haut étant exacte et toutes les flèches étant d'image fermée

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Q}_p \widehat{\otimes} \mathscr{O}(X)^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\breve{C}} H^1_{\mathrm{HK}}(X)^{\mathrm{sep}})^{N=0,\varphi=p} \arrow[r] \arrow[d, "\theta\otimes\iota_{\mathrm{HK}}"] & 0 . \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{Q}_p \widehat{\otimes} \mathscr{O}(X)^{**} \arrow[r, "\mathrm{dlog}"] & \Omega^1(X) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{dR}}(X)^{\mathrm{sep}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Remarque 5.6. — a) On établit aussi dans [**D11**] des versions (presque) entières du théorème 5.5. L'énoncé exact étant un peu technique, nous renvoyons le lecteur au th. 6.30 et à la prop. 6.26 de [**D11**] pour plus de détails, et au paragraphe suivant pour une version exacte quand X possède un modèle formel à bonne réduction.

b) Berkovich a montré que $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_p(1))=0$.

La preuve de ce théorème occupe les chapitres 4, 5 et 6 de [**D11**]. L'idée est d'utiliser une "décomposition en pantalons" de X et des principes local-global pour réduire les calculs au cas (le plus délicat) d'un affinoïde à bonne réduction et au calcul de la cohomologie étale et syntomique d'une couronne et d'un "cercle fantôme". Donner un sens à ces recollements n'est pas évident et fait l'objet des chapitres 3 et 6 de [**D11**], en particulier on y introduit une notion de *schéma adoque* (interpolation entre adique et ad-hoc...) permettant de justifier certains énoncés de ce type. Les principes local-global peuvent être vus comme des variations sur les travaux de l'école de Harbater.

5.3.2. Pantalons p-adiques. — Pour étudier la cohomologie des courbes analytiques p-adiques on introduit dans [**D11**] une "décomposition en pantalons" similaire à celle des surfaces de Riemann.

Soit X une courbe analytique lisse sur C, connexe et supposons que $\mathfrak{X}$ est un modèle formel p-adique semi-stable de X, de fibre spéciale $\mathfrak{X}_0 = k_C\otimes_{\mathscr{O}_C}\mathfrak{X}$. Soit $(C_s)_{s\in S}$ la famille des composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_0$ et supposons que $|S|\geq 2$, que les C_s sont des courbes lisses et que deux d'entre elles s'intersectent en au plus un point. Soit $(P_a)_{a\in A}$ l'ensemble des points singuliers de $\mathfrak{X}_0$. Soit Γ le graphe obtenu à partir du graphe dual (S,A) de $\mathfrak{X}_0$ en ajoutant des arêtes de longueur 0^+ aux sommets correspondant aux composantes irréductibles non propres, une par point manquant.

Pour $s\in S$ on note $\mathring{C}_s$ la courbe C_s privée de ses intersections avec les autres composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_0$. Soit X_s le tube de $\mathring{C}_s$ dans X, et soit [27]

$$\mathfrak{X}_s = \mathrm{Spf}(\mathscr{O}^+(X_s))$$

27. $\mathscr{O}^+(Z)$ est l'anneau des fonctions de norme spectrale ≤ 1 sur Z.

le *short de* $\mathfrak{X}$ *en* s. Pour $a \in A$ on note X_a le tube de P_a dans X, une couronne ouverte et

$$\mathfrak{X}_a = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},P_a}) = \mathrm{Spf}(\mathscr{O}^+(X_a))$$

la *jambe de* $\mathfrak{X}$ *en* a. Il existe $\mu(a) \in \mathbf{Q}_{>0}$ (largeur de a) tel que $\mathfrak{X}_a \simeq \mathrm{Spf}\left(\frac{\mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]}{T_1T_2-p^{\mu(a)}}\right)$.

Soit $I = A \coprod S$ et $I_2 = \{(a,s) | \, a \in A, P_a \in C_s\}$ et, pour $(a,s) \in I_2$ notons $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},(a,s)}$ le complété du localisé de l'anneau $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},P_a}$ par rapport à son idéal premier induit par s. Par exemple, si s correspond à la composante $T_1 = 0$ de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}_a$ via l'isomorphisme $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},P_a} \simeq \mathscr{O}_C[[T_1,T_2]]/(T_1T_2 - p^{\mu(a)})$, alors $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},(a,s)}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_C[[T_2]]\langle 1/T_2\rangle$, complété p-adique de $\mathscr{O}_C[[T_2]][1/T_2]$. On note

$$\mathfrak{X}_{(a,s)} := \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},(a,s)})$$

le "cercle fantôme" en $(a,s) \in I_2$. Moralement $\mathfrak{X}_{(a,s)}$ est $\mathfrak{X}_a \cap \mathfrak{X}_s$. Les $\mathfrak{X}_{(a,s)}$ permettent de penser à X comme un recollement d'affinoïdes à bonne réduction (les X_s) et de couronnes ouvertes (les X_a), le long de "cercles fantôme".

Supposons maintenant que X est un affinoïde lisse sur C, de dimension 1, connexe. Par le théorème de réduction semi-stable on peut trouver un modèle $\mathfrak{X}$ comme ci-dessus. Les étapes de la preuve du théorème 5.5 sont les suivantes :

• on définit des espaces de symboles $\mathrm{Symb}_p(Z)$ pour $Z \in \{X, X_i, \mathfrak{X}_{(a,s)}\}$ et on montre (lemme 6.1 et prop. 6.2 de [**D11**]) un principe local-global, i.e. une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbf{Z}_p(1)) \to \mathrm{Symb}_p(X) \to \ker(\prod_{i\in I} \mathrm{Symb}_p(X_i) \to \prod_{(a,s)\in I_2} \mathrm{Symb}_p(\mathfrak{X}_{(a,s)})) \to 0,$$

$H^1(\Gamma, \mathbf{Z}_p(1))$ étant la cohomologie de l'espace topologique Γ (introduit à la fin du second paragraphe de la sous-section 5.3.2) à coefficients dans $\mathbf{Z}_p(1)$. Par exemple, $\mathrm{Symb}_p(Z) = \mathbf{Z}_p\widehat{\otimes}\mathscr{O}(Z)[1/p]^\times$ si $Z \in \{X_a, \mathfrak{X}_{(a,s)}\}$, le cas d'un short X_s sera discuté dans le paragraphe suivant et la définition de $\mathrm{Symb}_p(X)$ est analogue à celle de $\mathrm{Symb}_p(X_s)$. La suite exacte de Kummer induit un isomorphisme naturel pour $Z \in \{X, X_i\}$

$$r_{\text{ét}} : \mathrm{Symb}_p(Z) \simeq H^1_{\text{ét}}(Z, \mathbf{Z}_p(1)).$$

• on construit des espaces de cohomologie syntomique $H^1_{\text{syn}}(Z, \mathbf{Z}_p(1))$ pour Z comme ci-dessus, ainsi qu'un régulateur syntomique

$$r_{\text{syn}} : \mathrm{Symb}_p(Z) \to H^1_{\text{syn}}(Z, \mathbf{Z}_p(1)),$$

et on montre que c'est un isomorphisme (c'est la partie difficile), en établissant un principe local-global pour la cohomologie syntomique et en montrant que r_{syn} est un isomorphisme pour $Z \in \{X_i, \mathfrak{X}_{(a,s)}\}$. Le cas des X_a et $\mathfrak{X}_{(a,s)}$ se traite à la main, mais demande des manipulations assez fines avec les anneaux de Fontaine (chapitre 4 de [**D11**]), le cas des shorts X_s est la partie la plus délicate de [**D11**].

• on étudie (chapitre 6 de [**D11**]) les groupes $H^1_{\text{syn}}(X, \mathbf{Z}_p(1))$, ce qui revient à exprimer la cohomologie cristalline absolue (sur $\mathbf{Z}_p$) de $\mathfrak{X} \otimes \mathscr{O}_C/p$ en termes d'anneaux de Fontaine et de cohomologie de Hyodo-Kato.

Dans le paragraphe suivant nous allons décrire plus précisément ces objets quand $Z = X_s$, en renvoyant le lecteur au chapitre 6 de [**D11**] pour les globalisations (qui sont assez formelles à l'exception du th. 6.14 de loc.cit) et au chapitre 4 pour le cas d'une jambe et d'un "cercle fantôme".

5.3.3. Cohomologies d'un short. — Soit $s \in S$ et soit $\mathscr{Y}$ le short $\mathfrak{X}_s$, un schéma formel affine formellement lisse sur $\mathscr{O}_C$. Soit $Y = X_s$ la fibre générique de $\mathscr{Y}$, un affinoïde à bonne réduction. Nous allons considérablement raffiner le théorème 5.5 dans ce cas.

Notons $C(Y) = \mathrm{Frac}(\mathscr{O}(Y))$, $C_n(Y)^* = (C(Y)^*)^{p^n}$ et

$$\mathrm{Symb}_p(Y) := \frac{\{(u_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} C(Y)^* |\ \mathrm{Div}(u_n) \in p^n \mathrm{Div}(Y),\ u_{n+1}/u_n \in C_n(Y)^*\}}{\prod_{n\geq 1} C_n(Y)^*}.$$

La théorie de Kummer fournit un isomorphisme naturel

$$r_{\text{ét}} : \mathrm{Symb}_p(Y) \simeq H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}_p(1)).$$

Pour définir les groupes de cohomologie syntomique de $\mathscr{Y}$ on commence par choisir un $\mathscr{O}_{\breve{C}}$-schéma formel affine et lisse $\breve{\mathscr{Y}}$ tel que $\mathscr{Y} = \mathscr{O}_C \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \breve{\mathscr{Y}}$, ainsi qu'un relèvement du Frobenius φ à $\breve{\mathscr{Y}}$. En posant

$$\tilde{\mathscr{Y}} = A_{\mathrm{cris}} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} \breve{\mathscr{Y}},\ F^1\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}}) = \ker(\theta : \mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}}) \to \mathscr{O}(\mathscr{Y})),\ \Omega^1(\tilde{\mathscr{Y}}) = \Omega^{1,\mathrm{cont}}_{\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}})/A_{\mathrm{cris}}},$$

les $H^i_{\mathrm{syn}}(\mathscr{Y}, 1)$ sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\mathrm{Syn}(\mathscr{Y}, 1) :=\ F^1\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{d, 1-\frac{\varphi}{p}} \Omega^1(\tilde{\mathscr{Y}}) \oplus \mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{(1-\frac{\varphi}{p})-d} \Omega^1(\tilde{\mathscr{Y}})\ .$$

Pour définir le régulateur syntomique

$$r_{\mathrm{syn}} : \mathrm{Symb}_p(Y) \to H^1_{\mathrm{syn}}(\mathscr{Y}, 1)$$

partons d'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ dans $C(Y)^*$ telle que $u_{n+1}/u_n \in C_n(Y)^*$ pour tout n et posons [28]

$$r_{\mathrm{syn}}([(u_n)_{n\geq 1}]) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{d\tilde{u}_n}{\tilde{u}_n}, \frac{1}{p} \log \frac{\varphi(\tilde{u}_n)}{\tilde{u}_n^p} \right) \right],$$

pour des relèvements bien choisis [29] $\tilde{u}_n \in \mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}}))^*$ de u_n. On vérifie que cela définit bien une application de $\mathrm{Symb}_p(Y)$ dans $H^1_{\mathrm{syn}}(\mathscr{Y}, 1)$.

On voit facilement que $H^1_{\mathrm{syn}}(\mathscr{Y}, 1)$ se surjecte sur $H^1_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathscr{Y}})^{\varphi=p}$, où $H^1_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathscr{Y}}) = \Omega^1(\tilde{\mathscr{Y}})/d\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}})$, et le noyau est p-isomorphe à $\mathscr{O}(Y)/\mathscr{O}_C$. Cependant cette description n'est pas très utile car $H^1_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathscr{Y}})^{\varphi=p}$ est assez compliqué. Si $Z \in \{\mathscr{Y}, \breve{\mathscr{Y}}, \tilde{\mathscr{Y}}\}$ notons $H^1_{\mathrm{dR}}(Z)^{\mathrm{sep}}$ le quotient de $H^1_{\mathrm{dR}}(Z)$ par l'adhérence de son sous-groupe de torsion. Le résultat le plus délicat du chapitre 5 de [**D11**] (prop. 5.27, th. 5.29 et cor. 5.30) est :

28. On note $[(u_n)_{n\geq 1}]$ l'image de $(u_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathrm{Symb}_p(Y)$ et de même pour le terme à droite.

29. Le lemme 5.22 de [**D11**] montre que l'on peut factoriser $u_n = u_{0,n} v_n a_n^{p^n}$ avec $u_{0,n} \in \breve{C}(\breve{\mathscr{Y}})^*$, $v_n \in \mathscr{O}(\mathscr{Y})^*$ et $a_n \in C(Y)^*$. On choisit des relèvements $\tilde{v}_n$ et $\tilde{a}_n$ à $\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}})^*$ et $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}(\tilde{\mathscr{Y}}))^*$ et on pose $\tilde{u}_n = u_{0,n} \tilde{v}_n \tilde{a}_n^{p^n}$.

Théorème 5.7. — *a) L'application* r_{syn} *est un isomorphisme.*

b) La surjection $H^1_{\mathrm{syn}}(\mathscr{Y},1) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathscr{Y}})^{\varphi=p}$ *induit une surjection* $H^1_{\mathrm{syn}}(\mathscr{Y},1) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$*, dont le noyau est isomorphe à* $\mathscr{O}(Y)^{**}\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_p$*.*

c) On a des isomorphismes naturels de $\mathbf{Z}_p$*-modules libres de type fini*

$$(H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \simeq (A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \simeq (H^1_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathscr{Y}}))^{\varphi=p}.$$

En combinant ces résultats on obtient un énoncé bien plus appétissant :

Corollaire 5.8. — *On a une suite exacte*

$$0 \to \mathscr{O}(Y)^{**}\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_p \to H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(Y,\mathbf{Z}_p(1)) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p} \to 0,$$

le terme à droite étant un $\mathbf{Z}_p$*-module libre de type fini naturellement isomorphe à* $(A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathscr{O}_{\breve{C}}} H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$*, et le terme à gauche étant par définition le complété p-adique de* $\mathscr{O}(Y)^{**}$*.*

Il est possible de démontrer le corollaire ci-dessus directement, sans passer par la cohomologie syntomique (voir le paragraphe 5.4 de [**D11**]). En effet, en suivant les constructions ci-dessus on voit que la flèche $H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(Y,\mathbf{Z}_p(1)) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}$ est celle induite par l'identification $H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(Y,\mathbf{Z}_p(1)) \simeq \mathrm{Symb}_p(Y)$ et par la flèche

$$R : \mathrm{Symb}_p(Y) \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p},\ R([(u_n)_{n\geq 1}]) = \lim_{n\to\infty} \frac{d\theta_0(\tilde{u}_n)}{\theta_0(\tilde{u}_n)},$$

où $\theta_0 : A_{\mathrm{cris}} \to \mathscr{O}_{\breve{C}}$ est le morphisme usuel. Il n'est pas difficile de voir que R est nulle sur $\mathscr{O}(Y)^{**}\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_p$, ce qui fournit une flèche

$$R : \frac{\mathrm{Symb}_p(Y)}{\mathscr{O}(Y)^{**}\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_p} \to (H^1_{\mathrm{dR}}(\breve{\mathscr{Y}})^{\mathrm{sep}})^{\varphi=p}.$$

On montre ensuite que les deux termes sont des $\mathbf{Z}_p$-modules libres de type fini et que la réduction modulo p de cette flèche est un isomorphisme en utilisant l'opérateur de Cartier et une décomposition (due à Raynaud) du faisceau des formes différentielles sur une courbe lisse en caractéristique p. Dans les deux approches un point crucial est une description de $\mathrm{Pic}(Y)$ due à van der Put [**78**], qui permet de montrer que

$$\mathrm{Pic}(Y) \simeq \mathrm{Pic}(\mathscr{Y} \otimes_{\mathscr{O}_C} k_C).$$

5.3.4. Cohomologie(s) d'une courbe Stein. — Supposons maintenant que X est une courbe Stein (toujours lisse et connexe), autrement dit X n'est pas propre et X n'a pas de bord, par exemple une courbe obtenue en retirant un nombre fini de disques fermés d'une courbe propre et lisse, ou un revêtement fini étale du demi-plan de Drinfeld. Une telle courbe est une réunion croissante stricte d'affinoïdes, ce qui permet d'obtenir le résultat suivant (notons cependant que les objets $H^1_{\mathrm{HK}}(X)$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ qui y interviennent sont typiquement de dimension finie, contrairement aux deux résultats ci-dessus) :

Théorème 5.9. — *Si X est une courbe Stein lisse sur C et connexe on a un diagramme commutatif fonctoriel d'espaces de Fréchet*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{O}(X)/C \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H^1_{\text{proét}}(X, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{B}^+_{\text{st}} \widehat{\otimes} H^1_{\text{HK}}(X))^{N=0, \varphi=p} \arrow[r] \arrow[d, "\theta\otimes\iota_{\text{HK}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}(X)/C \arrow[r, "d"] & \Omega^1(X) \arrow[r] & H^1_{\text{dR}}(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont exactes, toutes les flèches sont d'image fermée et l'on a un isomorphisme d'espaces de Fréchet

$$\iota_{\text{HK}} : C \widehat{\otimes}_{\breve{C}} H^1_{\text{HK}}(X) \cong H^1_{\text{dR}}(X).$$

Remarque 5.10. — a) Les méthodes syntomiques [**28, 75**] fournissent aussi un diagramme commutatif identique quand X est un affinoïde. La différence est que le (φ, N)-module $H^1_{\text{HK}}(X)$ est de dimension infinie et non séparé et la flèche $\mathscr{O}(X) \to \mathbf{Q}_p \widehat{\otimes} \mathscr{O}(X)^{**}$ faisant commuter le diagramme évident est $f \mapsto \exp(f)$, mais l'image de $\mathscr{O}(X)$ par $f \mapsto \exp(f)$ est $\mathbf{Q}_p \otimes \mathscr{O}(X)^{**}$, qui est dense dans $\mathbf{Q}_p \widehat{\otimes} \mathscr{O}(X)^{**}$ mais ne lui est pas égal en général.

b) Les méthodes utilisées pour démontrer les résultats ci-dessus permettent aussi de montrer que $H^2_{\text{proét}}(X, \mathbf{Q}_p) = 0$ pour une courbe Stein X. Contrairement au cas d'un affinoïde, $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p)$ est non nul en général (par exemple la boule ouverte pour C non sphériquement complet), et obtenir une réponse satisfaisante à la question suivante reste le plus bel échec de la théorie présentée ci-dessus : pour quelles courbes Stein X a-t-on $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p) = 0$? Nous allons voir que le demi-plan de Drinfeld est un exemple, mais déjà le cas du premier revêtement de cet espace (voir le chapitre suivant) est fort mystérieux. Après avoir trouvé plusieurs "preuves" de la nullité et ensuite de la non nullité de $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_p)$, je ne sais pas vraiment que dire...

c) On dispose aussi d'un résultat similaire pour les cohomologies d'un affinoïde surconvergent (chapitre 7 de [**D11**]).

Supposons toujours que X est une courbe Stein lisse sur C, connexe, et soit $\mathscr{X}$ un modèle formel semi-stable de X comme au début de la section 5.3.2. Soient $(C_s)_{s\in S}$ les composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathfrak{X}_0$ et soit $\overline{C}_s$ la compactification lisse de C_s. Soit Γ le "complété" du graphe dual de $\mathfrak{X}_0$ comme dans loc.cit. On montre aussi le très utile résultat suivant (th. 0.15 de [**D11**]).

Théorème 5.11. — *L'espace $H^1_{\text{HK}}(X)$ possède une filtration stable par φ dont les quotients succéssifs sont $H^1(\Gamma, \breve{C})$, $\prod_{s\in S} H^1_{\text{rig}}(\overline{C}_s)$ et $H^1_c(\Gamma, \breve{C})^*(-1)$.*

On peut aussi donner une recette combinatoire décrivant la monodromie N (remarque 1.6 de [**D11**]). En utilisant cette décomposition de la cohomologie de Hyodo-Kato et une décomposition analogue pour la cohomologie ℓ-adique (avec $\ell \neq p$) on montre dans la section 8.3 de [**D11**] (th. 8.11 et 8.12) que $H^1_{\text{HK}}(X)$ et $H^1_{\text{proét}}(X, \mathbf{Q}_\ell(1))$ sont isomorphes (il faut choisir un plongement de $\mathbf{Q}_\ell$ dans C pour donner un sens à cela), de manière compatible avec l'action des automorphismes de X, et aussi avec l'action du groupe de Weil-Deligne de K si X est défini sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$.

5.4. Le diagramme fondamental en dimension arbitraire. — Soit K un corps de caractéristique 0, muni d'une valuation discrète pour laquelle il est complet et dont le corps résiduel k est parfait, de caractéristisque p. Soit $F = \mathrm{Frac}(W(k))$, $C = \widehat{\overline{K}}$ et $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Soit $\mathscr{O}_K^0$ le schéma $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$ ou le schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_K)$ muni de la log-structure induite par $\mathbf{N} \to \mathscr{O}_K, 1 \mapsto 0$. Les schémas formels ci-dessous seront tous p-adiques, localement de type fini sur $\mathscr{O}_K$ et équidimensionnels.

Dans [**47**] Grosse-Klönne associe à tout log-schéma Y log-lisse sur k^0 un complexe (de cohomologie d'Hyodo-Kato surconvergente) $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y)$ de F-espaces vectoriels, muni d'un Frobenius φ et d'un opérateur de monodromie N tels que $N\varphi = p\varphi N$. Si Y est un k-schéma semistable muni de la log-structure induite, on dispose d'une suite spectrale de poids pour la cohomologie ainsi définie, ce qui permet de calculer $H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$ à partir des groupes de cohomologie rigide des diverses intersections des composantes irréductibles de Y, en particulier si Y est quasi-compact alors les $H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$ sont de dimension finie sur F. De plus, Grosse-Klönne a montré un isomorphisme de Hyodo-Kato dans ce contexte, *sans hypothèse de propreté* : si X est un schéma formel faible, semistable sur $\mathscr{O}_K$, de fibre spéciale Y alors on dispose d'un quasi-isomorphisme naturel (30), X_K étant l'"espace dagger" associé à X

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y) \otimes_F K \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K).$$

On peut (chap. 3 de [**D9**]) munir ces objets de topologies localement convexes, $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y)$ devient ainsi un complexe de F-espaces vectoriels localement convexes et l'isomorphisme de Hydo-Kato est strict.

Nous dirons qu'un $\mathscr{O}_K$-schéma formel faible X est *Stein semi-stable* si

- X est à réduction semi-stable (31).
- l'"espace dagger" associé X_K est Stein.
- la fibre spéciale Y de X peut s'écrire $Y = \cup_{s\in\mathbf{N}} Y_s = \cup_{s\in\mathbf{N}} U_s$ pour une suite (Y_s) (resp. (U_s)) de sous-schémas fermés (resp. ouverts) tels que $Y_s \subset U_s \subset Y_{s+1}$, chaque Y_s est une réunion finie de composantes irréductibles de Y et les tubes des U_s dans X_K forment un recouvrement Stein de X_K. Cette condition est automatique si X_K est une courbe. La preuve du résultat suivant occupe les chapitres 3 et 4 de [**D9**] :

Théorème 5.12. — *Soit X un schéma formel faible qui est Stein semi-stable sur $\mathscr{O}_K$, de fibre spéciale Y. Pour tout $r \geq 0$ on dispose d'un diagramme commutatif $\mathscr{G}_K$-équivariant d'espaces de Fréchet, dont les lignes sont exactes et dont les flèches verticales ont des images fermées*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{r-1}(X_C)/\ker d \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^r_{\text{proét}}(X_C, \mathbf{Q}_p(r)) \arrow[r] \arrow[d] & (H^r_{\mathrm{HK}}(Y)\widehat{\otimes}_F \mathbf{B}^+_{\mathrm{st}})^{N=0,\phi=p^r} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}\otimes\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{r-1}(X_C)/\ker d \arrow[r, "d"] & \Omega^r(X_C)^{d=0} \arrow[r, "\mathrm{can}"] & H^r_{\mathrm{dR}}(X_C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le noyau des flèches verticales au milieu et à droite s'identifie à $(H^r_{\mathrm{HK}}(Y)\widehat{\otimes}_F \mathbf{B}^+_{\mathrm{st}})^{N=0,\phi=p^{r-1}}$.

30. Mais qui dépend du choix d'une uniformisante de $\mathscr{O}_K$, comme dans la théorie classique...

31. i.e. localement pour la topologie de Zariski X possède des morphismes étales vers $\mathrm{Spwf}(\mathscr{O}_K[T_1,\dots,T_n]/(T_1\dots T_r - \varpi))$ pour une uniformisante ϖ de $\mathscr{O}_K$.

Exemple 5.13. — a) Pour l'espace affine analytique $\mathbf{A}_C^{d,\mathrm{ad}}$ on obtient

$$H^r_{\mathrm{proét}}(\mathbf{A}_C^{d,\mathrm{ad}}, \mathbf{Q}_p(r)) \simeq \Omega^{r-1}(\mathbf{A}_C^{d,\mathrm{ad}})/\ker(d),$$

qu'il convient de comparer avec l'annulation [**7**], [**30**] de $H^r_{\text{ét}}(\mathbf{A}_C^{d,\mathrm{ad}}, \mathbf{Q}_p(r))$. Voir aussi [**30**] et [**58**] pour des arguments différents.

b) Pour le tore analytique $\mathbb{G}^d_{m,C} := \mathbb{G}^{d,\mathrm{ad}}_{m,C}$ on obtient une suite exacte

$$0 \to \Omega^{r-1}(\mathbb{G}^d_{m,C})/\ker d \to H^r_{\mathrm{proét}}(\mathbb{G}^d_{m,C}, \mathbf{Q}_p(r)) \to \wedge^r \mathbf{Q}_p^d \to 0,$$

à comparer avec l'isomorphisme $H^r_{\text{ét}}(\mathbb{G}^d_{m,C}, \mathbf{Q}_p(r)) \simeq \wedge^r \mathbf{Q}_p^d$.

c) En dimension 1 on retrouve le théorème 5.9.

Remarque 5.14. — Ce diagramme est très différent de son analogue pour X_K propre : quand X_K est propre le terme $\Omega^{r-1}(X_C)/\ker d$ est nul, et la suite exacte haute devient plutôt

$$0 \to H^r_{\mathrm{proét}}(X_C, \mathbf{Q}_p(r)) \to (H^r_{\mathrm{HK}}(Y)\widehat{\otimes}_F \mathbf{B}^+_{\mathrm{st}})^{N=0,\phi=p^r} \to (H^r_{\mathrm{dR}}(X_K)\widehat{\otimes}_K \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})/\mathrm{Fil}^r \to 0,$$

et tous les espaces qui interviennent sont de dimension finie.

5.5. Cohomologie des espaces de Drinfeld. —

5.5.1. L'analogue p-adique du théorème de Schneider-Stuhler. — Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soit C le complété d'une clôture algébrique de K. L'espace symétrique de Drinfeld de dimension d sur K est la variété rigide analytique sur K

$$\mathbb{H}^d_K = \mathbb{P}^d_K \setminus \bigcup_{H \in \mathscr{H}} H,$$

où $\mathscr{H}$ est l'ensemble des hyperplans K-rationnels dans K^{d+1}. Posons $\mathbb{H}^d_C = \mathbb{H}^d_K \otimes_K C$.

Le groupe $G := \mathrm{GL}_{d+1}(K)$ agit naturellement sur $\mathbb{H}^d_K$. Soit B le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures et soit $\Delta = \{1, \dots, d\}$ l'ensemble des racines simples associées. Pour toute partie J de Δ on dispose d'un parabolique standard P_J de G et, pour tout groupe abélien A, d'un $A[G]$-module

$$\mathrm{Sp}_J(A) = \frac{\mathrm{LC}(G/P_J, A)}{\sum_{i \in \Delta \setminus J} \mathrm{LC}(G/P_{J \cup \{i\}}, A)},$$

LC signifiant localement constante. Par exemple, $\mathrm{Sp}_\Delta(A) = A$ avec action triviale de G, et $\mathrm{Sp}_\varnothing(A)$ est la représentation de Steinberg usuelle à coefficients dans A. Pour tout entier $r \geq 0$ on note

$$\mathrm{Sp}_r(A) := \mathrm{Sp}_{\{1,\dots,d-r\}}(A),$$

avec la convention que le terme à droite est nul si $d > r$. Le morphisme naturel $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}_r(A)$ est un isomorphisme.

La plupart des résultats décrits dans les paragraphes ci-dessus ont été motivés par le désir d'avoir un analogue p-adique du théorème classique suivant de Schneider et Stuhler [**66**]. Pour le démontrer, Schneider et Stuhler utilisent un découpage de l'espace de Drinfeld en morceaux qui sont des fibrations en boules ouvertes au-dessus d'espaces projectifs, et l'ingrédient principal qui permet de gagner la bataille avec la combinatoire qui en découle est la propriété d'homotopie de la cohomologie étale ℓ-adique et de la cohomologie de de Rham : $H^*(X) = H^*(X \times B)$ si B est une boule ouverte et si X est un espace rigide analytique lisse sur $\mathbf{Q}_p$. Cette propriété est totalement mise en défaut quand $\ell = p$, la cohomologie étale p-adique de B étant très compliquée. On munit $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K)$ de l'action triviale de $\mathscr{G}_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Théorème 5.15. — *(Schneider-Stuhler) Il existe des isomorphismes de $G \times \mathscr{G}_K$-modules topologiques pour $\ell \neq p$*

$$H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Z}_\ell(i)) \simeq \mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}_\ell)^*, \ H^i_{\text{proét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_\ell(i)) \simeq \mathrm{Sp}_i(\mathbf{Q}_\ell)^*, \ H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K) \simeq \mathrm{Sp}_i(K)^*.$$

Le théorème suivant est le résultat principal de [**D10**] et d'une bonne partie de [**D9**]. On dispose maintenant de deux autres preuves du résultat pour la cohomologie pro-étale p-adique : une par Sascha Orlik [**59**] et l'autre par Guido Bosco [**11**], cette dernière preuve montrant que l'on dispose bien d'un analogue de la propriété d'homotopie de la cohomologie pro-étale p-adique, mais pour les faisceaux $\mathbf{B}_e$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, ce qui permet de faire fonctionner la stratégie de Schneider et Stuhler pour calculer les cohomologies de ces faisceaux, et conclure via la suite exacte fondamentale. Ces preuves alternatives ne permettent pas d'obtenir le résultat pour la cohomologie étale p-adique.

Théorème 5.16. — *a) Il existe une suite exacte de $G \times \mathscr{G}_K$-espaces de Fréchet*

$$0 \to \Omega^{i-1}(\mathbb{H}^d_C)/\ker d \to H^i_{\text{proét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i)) \to \mathrm{Sp}_i(\mathbf{Q}_p)^* \to 0.$$

b) Il existe des isomorphismes $G \times \mathscr{G}_K$-équivariants de $\mathbf{Z}_p$-modules topologiques

$$\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \simeq H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(i)).$$

En particulier on dispose d'un isomorphisme naturel $\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \simeq H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Z}_p(i))$.

c) La flèche $H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i)) \to H^i_{\text{proét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i))$ est injective et identifie $H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i))$ avec l'espace des $v \in H^i_{\text{proét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i))$ dont la G-orbite est bornée.

De manière équivalente le point c) affirme que le dual de $H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i))$ est le complété unitaire universel du dual de $H^i_{\text{proét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Q}_p(i))$.

La preuve est une combinaison du théorème 5.12, de l'irréductibilité [**50**] des représentations $\mathrm{Sp}_i(k_L)$ et de la théorie de Hodge p-adique à la Bhatt-Morrow-Scholze [**8**], [**9**], et les deux ingrédients suivants permettent de faire fonctionner ce mélange :

• une re-interprétation de l'isomorphisme de Schneider-Stuhler par Iovita et Spiess [**54**], suffisamment souple pour s'adapter aux cohomologies p-adiques.

• un résultat difficile d'acyclicité de Grosse-Klönne [**48**], [**49**].

5.5.2. Transformée de Poisson et l'astuce de Iovita-Spiess. — Schneider et Stuhler ont montré dans [**66**] l'existence d'un isomorphisme G-équivariant entre $\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z})$ et l'espace F_i des fonctions localement constantes $f : \mathscr{H}^{i+1} \to \mathbf{Z}$ vérifiant :

• si $H_0, \dots, H_i \in \mathscr{H}$ ont des équations linéairement dépendantes, alors $f(H_0, \dots, H_i) = 0$.

• pour tous $H_0, \dots, H_{i+1} \in \mathscr{H}$ on a

$$f(H_1, \dots, H_{i+1}) - f(H_0, H_2, \dots, H_{i+1}) + \dots + (-1)^{i+1} f(H_0, \dots, H_i) = 0.$$

Si A est un groupe abélien on obtient ainsi une surjection G-équivariante

$$D(\mathscr{H}^{i+1}, A) := \mathrm{Hom}(\mathrm{LC}(\mathscr{H}^{i+1}, \mathbf{Z}), A) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}), A) \qquad (1),$$

et donc des surjections $D(\mathscr{H}^{i+1}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \to \mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*$ et $D(\mathscr{H}^{i+1}, K) \to \mathrm{Sp}_i(K)^*$.

Iovita et Spiess [**54**] ont utilisé les observations ci-dessus pour rendre les isomorphismes de Schneider-Stuhler (th. 5.15) explicites (ce n'était pas du tout le cas dans [**66**]). Leur argument est utilisé dans [**D9**] et [**D10**] pour d'autres cohomologies p-adiques. Expliquons rapidement le cas de la cohomologie de de Rham. Considérons l'application d'intégration

$$\iota : D(\mathscr{H}^{i+1}, K) \to H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K),\ \mu \mapsto \int_{\mathscr{H}^{i+1}} [(H_0, \dots, H_i)] d\mu(H_0, \dots, H_i),$$

où

$$[(H_0, \dots, H_i)] := \left[\mathrm{dlog}\frac{\ell_{H_1}}{\ell_{H_0}} \wedge \dots \wedge \mathrm{dlog}\frac{\ell_{H_i}}{\ell_{H_0}}\right] \in H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K) \simeq \Omega^i(\mathbb{H}^d_K)^{d=0}/d\Omega^{i-1}(\mathbb{H}^d_K),$$

$\ell_H = 0$ étant une équation unimodulaire de $H \in \mathscr{H}$ ($[(H_0, \dots, H_i)]$ ne dépend pas du choix des ℓ_{H_i}). Donner un sens à l'intégrale n'est pas totalement trivial puisque la fonction que l'on intègre n'est pas localement constante, mais on s'en sort en remarquant que cette fonction est localement constante en restriction à chaque ouvert du recouvrement Stein standard de $\mathbb{H}^d_K$. Les symboles $[(H_0, \dots, H_i)]$ vérifient les relations apparaissant dans la définition de l'espace F_i, ce qui fait que ι se factorise par le quotient $\mathrm{Sp}_i(K)^*$ de $D(\mathscr{H}^{i+1}, K)$. Iovita et Spiess montrent alors que la flèche qui s'en déduit est exactement l'isomorphisme entre $\mathrm{Sp}_i(K)^*$ et $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K)$ construit par Schneider et Stuhler, en particulier c'est bien un isomorphisme [32]. Le même argument s'applique aux cohomologies étale et pro-étale ℓ-adiques avec $\ell \neq p$, en utilisant un analogue des symboles $[(H_0, \dots, H_i)]$ fourni par la théorie de Kummer. Il s'applique aussi à la cohomologie de Hyodo-Kato (car on dispose d'une théorie des classes de Chern, cf. appendice de [**D9**]) et, combiné avec l'isomorphisme de Hyodo-Kato et ce qui précède, fournit un isomorphisme G-équivariant $\iota : \mathrm{Sp}_i(F)^* \simeq H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$, Y étant la fibre spéciale du modèle semi-stable de Deligne de $\mathbb{H}^d_K$ et $F = W(k_K)[1/p]$ (voir par exemple le paragraphe 6.1 de [**47**]). Combiné avec le théorème 5.12, cela montre [33] le point a) du théorème 5.16.

La méthode de Iovita-Spiess s'applique aussi en cohomologie étale p-adique, mais il faut se fatiguer un peu plus pour construire les applications d'intégration de symboles

$$r_{\text{ét},n} : \mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(i)),\ \mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Z}_p(i)),$$

car la topologie de $H^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_C, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(i))$ est à priori compliquée [34]. Cependant, il n'est plus du tout clair comment faire marcher les arguments ci-dessus pour montrer que les applications d'intégration sont des isomorphismes : ce qui précède utilise de manière cruciale que l'on dispose à priori du théorème de Schneider-Stuhler, or ici on veut précisément démontrer son

32. Il ne semble pas facile de démontrer directement cela, sans passer par les arguments de Schneider et Stuhler.

33. Il faut aussi savoir que $N = 0$ sur $H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$, mais cela découle de la relation $N\varphi = p\varphi N$ et du fait qu'une puissance convenable non nulle de φ est scalaire, cf. [**47**].

34. Elle n'est pas discrète, et si l'on passe par le recouvrement Stein standard de $\mathbb{H}^d_C$ on a des soucis avec les $R^1\lim$...

analogue p-adique ! Le contenu principal du théorème 5.16 est le fait que ces flèches sont bien des isomorphismes, et les idées permettant de le prouver seront présentées dans les paragraphes suivants.

5.5.3. Cohomologie de de Rham du modèle formel de l'espace de Drinfeld. — Le théorème ci-dessous, une version entière du théorème de Schneider-Stuhler pour la cohomologie de de Rham, est le résultat le plus délicat du chapitre 6 de [**D9**] (cf. th. 6.28 de loc.cit.) et il joue un rôle crucial dans la preuve du théorème 5.16. Rappelons qu'une construction classique de Deligne fournit un modèle formel semi-stable G-équivariant $\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}$ de $\mathbb{H}^d_K$, dont la géométrie est plutôt explicite, mais assez compliquée pour $d > 1$. Ainsi $\mathfrak{X} := \mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_C$ est un modèle formel de $X := \mathbb{H}^d_C$. Soit Y la fibre spéciale de $\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}$. On munit $\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}$ et $\mathfrak{X}$ de leur log-structure canonique et on munit Y de la log-structure induite, qui sera prise en compte dans les faisceaux de formes différentielles et les cohomologies associées.

Théorème 5.17. — *La flèche naturelle $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})[1/p] \to H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K) \simeq \mathrm{Sp}_i(K)^*$ est injective et induit un isomorphisme G-équivariant $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}) \simeq \mathrm{Sp}_i(\mathscr{O}_K)^*$ et une identification de $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})[1/p]$ avec l'espace des vecteurs dans $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K)$ dont la G-orbite est bornée.*

L'argument donné dans le chapitre 6 de [**D9**] est un peu emberlificoté, et on peut se demander s'il n'y a pas une preuve plus simple. Les deux ingrédients techniques principaux sont dûs à Grosse-Klönne [**50**], [**48**], [**49**] et résumés dans :

Théorème 5.18. — *(Grosse-Klönne)*
a) On a $H^i(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}, \Omega^j_{\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}}) = 0$ pour $i > 0, j \geq 0$ et $d = 0$ sur $H^0(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}, \Omega^i_{\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}})$. En particulier $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}) \simeq H^0(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}, \Omega^i_{\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}})$.
b) Le $k_K[G]$-module $\mathrm{Sp}_i(k_K)$ est irréductible.

L'injectivité de la flèche $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})[1/p] \to H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K)$ est la partie la plus pénible de la preuve du théorème 5.17. Par le théorème ci-dessus il s'agit de voir qu'une forme non nulle $\omega \in H^0(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}, \Omega^i_{\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}})$ ne peut pas être exacte en fibre générique, mais nous n'avons pas trouvé un argument direct montrant cela. À la place, nous utilisons une comparaison entre l'isomorphisme de Hyodo-Kato de Grosse-Klönne et une version de l'isomorphisme originel de Hyodo-Kato [**52**] (cf. aussi appendice de [**D9**]) pour les variétés semi-stables non propres

$$H^{i,b}_{\mathrm{HK}}(Y) \otimes_F K \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})[1/p].$$

La différence entre $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y)$ et $\mathrm{R}\Gamma^b_{\mathrm{HK}}(Y)$ est que dans le premier complexe on inverse p localement, alors que dans le second on travaille en niveau entier localement, et on inverse p à la fin. Ces deux isomorphismes de Hyodo-Kato sont compatibles (cf. appendice de [**D9**]) et ramènent l'injectivité de $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})[1/p] \to H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K)$ à celle de $H^{i,b}_{\mathrm{HK}}(Y) \to H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$, qui est démontrée dans la proposition 6.27 de [**D9**]. L'avantage est que $H^{i,b}_{\mathrm{HK}}(Y)$ se décrit en termes de complexes de de Rham-Witt (logarithmiques) et donc on a plus de moyens pour dévisser ces objets, via la théorie de l'opérateur de Cartier. Ces dévissages seraient inextricables sans l'ordinarité de Y, i.e. $H^i_{\text{ét}}(Y, B^j) = 0$ pour $i, j \geq 0$, où $B^j = d(\Omega^{j-1}_Y) \subset \Omega^j_Y$, qui se déduit (lemme 6.13 de [**D9**]) du fait que $H^i_{\text{ét}}(Y, \Omega^j_Y) = 0$ pour $i > 0, j \geq 0$ et $d = 0$ sur $H^0_{\text{ét}}(Y, \Omega^j_Y)$, conséquence du théorème d'acyclicité de Grosse-Klönne ci-dessus. L'aboutissement de ces dévissages est le résultat suivant, qui est une version d'un théorème classique de Bloch-Kato [**10**] pour les variétés propres, lisses sur k_K et ordinaires :

Théorème 5.19. — *Soit* $\overline{Y} = Y \otimes_{k_K} \overline{\mathbf{F}}_p$.

a) $H^0(\overline{Y}, \Omega^j_{\log})$ *est un* $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel profini,* $H^0(\overline{Y}, W\Omega^j_{\log})$ *est un* $\mathbf{Z}_p$*-module profini et on a des isomorphismes topologiques naturels*

$$H^0(\overline{Y}, \Omega^j_{\log})\widehat{\otimes}_{\mathbf{F}_p}\overline{\mathbf{F}}_p \simeq H^0(\overline{Y}, \Omega^j),\ \ H^0(\overline{Y}, W\Omega^j_{\log})\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}W(\overline{\mathbf{F}}_p) \simeq H^0(\overline{Y}, W\Omega^j).$$

b) Les groupes $H^i(\overline{Y}, \Omega^j_{\log})$*,* $H^i(\overline{Y}, W\Omega^j_{\log})$*,* $H^i(\overline{Y}, \Omega^j)$ *et* $H^i(\overline{Y}, W\Omega^j)$ *sont nuls pour* $i > 0$*.*

Remarque 5.20. — Tout se passe donc comme si Y était propre et (log-) lisse, ordinaire. Pour ces variétés Bloch et Kato ont montré [**10**] des théorèmes de comparaison étale-de Rham entiers très simples, et donc on pourrait espérer obtenir un tel théorème de comparaison pour $\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}$, ce qui fournirait une preuve simple du théorème 5.16. Malheureusement, l'examen de la preuve du théorème de comparaison de Bloch et Kato montre que la quasi-compacité des variétés joue un rôle crucial, et donc ne peut pas être facilement adaptée à notre situation. Cependant, en combinant le théorème ci-dessus avec le théorème 5.16, on voit que l'intuition est correcte et que les théorèmes de comparaison entiers de type Bloch-Kato pour Y sont vrais !

En utilisant le théorème 5.19 on obtient

$$H^{i,b}_{\mathrm{HK}}(Y) \simeq H^i_{\text{ét}}(Y, W\Omega^\bullet_Y)[1/p] \simeq H^0_{\text{ét}}(Y, W\Omega^i_Y)[1/p].$$

Ce dernier groupe se plonge dans le groupe analogue pour le lieu lisse Y_{tr} de Y, qui peut se comprendre à partir des composantes irréductibles de Y. Ces composantes sont toutes isomorphes à une variété propre et (log-)lisse C, qui possède les mêmes propriétés d'acyclicité que Y. En utilisant tout ceci on obtient enfin l'injectivité de la flèche $H^{i,b}_{\mathrm{HK}}(Y) \to H^i_{\mathrm{HK}}(Y)$ et donc celle de $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})[1/p] \to H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K)$.

Pour conclure l'esquisse de la preuve du théorème 5.17 expliquons pourquoi la flèche d'intégration $\mathrm{Sp}_i(\mathscr{O}_K)^* \to H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K}) \simeq \Omega^i(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})$ est un isomorphisme. Il suffit de vérifier cela modulo l'idéal maximal de K. Or la réduction modulo $\mathfrak{m}_K$ de cette flèche est non nulle (calcul explicite), et il suffit de voir que $\Omega^i(Y) \simeq \mathrm{Sp}_i(k_K)^*$ pour conclure (en utilisant l'irréductibilité de $\mathrm{Sp}_i(k_K)$ comme G-module lisse). Mais on vient de voir que $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{X}_{\mathscr{O}_K})$ s'identifie à un réseau compact et G-stable de $H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K) \simeq \mathrm{Sp}_i(K)^*$. L'irréductibilité de $\mathrm{Sp}_i(k_K)$ permet de montrer que les réseaux G-stables de $\mathrm{Sp}_i(K)$ sont rigides (ils sont homothètiques à $\mathrm{Sp}_i(\mathscr{O}_K)$), d'où le résultat.

5.5.4. La touche finale : A_{inf}*-cohomologie.* — Les remarquables théorèmes de comparaison en théorie de Hodge p-adique entière de Bhatt, Morrow et Scholze [**8**], [**9**], étendus au cas semi-stable par Česnavičius et Koshikawa [**22**] permettent d'utiliser le théorème 5.17 pour finir la preuve du théorème 5.16.

Soit $A_{\mathrm{inf}} = W(\mathscr{O}_C^\flat)$ l'anneau de Fontaine usuel, muni de son Frobenius φ et de l'application de Fontaine $\theta : A_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$. Le choix d'une base de $\mathbf{Z}_p(1)$ fournit un élément $\varepsilon = (1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots) \in \mathscr{O}_C^\flat$ et des éléments $\xi = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1}$ et $\tilde{\xi} = \frac{[\varepsilon^p]-1}{[\varepsilon]-1}$ de A_{inf}, qui engendrent les noyaux des morphismes

θ et $\tilde{\theta} := \theta \circ \varphi^{-1}$ respectivement. Grâce aux travaux sus-cités, on dispose d'une $A_{\rm inf}$-algèbre commutative $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ dans $D(\mathfrak{X}_{\rm ét})$ et d'une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre commutative $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}}$ dans $D(\mathfrak{X}_{\rm ét})$ (catégorie dérivée de celle des faisceaux étales sur $\mathfrak{X}$) avec les propriétés suivantes :

• on dispose d'isomorphismes naturels de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X},\rm ét}$-modules

$$H^i(\tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}}) \simeq \Omega^i_{\mathfrak{X}/\mathscr{O}_C}\{-i\},$$

où $\{-i\}$ désigne le twist de Breuil-Kisin, une version du twist de Tate.

• il existe des quasi-isomorphismes naturels

$$A\Omega_{\mathfrak{X}} \otimes^L_{A_{\rm inf},\tilde{\theta}} \mathscr{O}_C \simeq \tilde{\Omega}_{\mathfrak{X}},\ \ A\Omega_{\mathfrak{X}} \otimes^L_{A_{\rm inf},\theta} \mathscr{O}_C \simeq \Omega^\bullet_{\mathfrak{X}/\mathscr{O}_C}.$$

• le complexe $\tau_{\leq i} A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}$ est muni d'un endomorphisme (pas $A_{\rm inf}$-linéaire !) $1-\varphi^{-1}$ et on peut calculer la cohomologie étale p-adique de X comme suit [(35)] : si $\nu : X_{\rm proét} \to \mathfrak{X}_{\rm ét}$ est la projection du site proétale de X sur le site étale de $\mathfrak{X}$, on dispose d'un quasi-isomorphisme canonique

$$\tau_{\leq i} R\nu_* \widehat{\mathbb{Z}}_p(i) \simeq \tau_{\leq i}(\tau_{\leq i} A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})^{\varphi^{-1}=1},$$

les "points fixes" $\varphi^{-1}=1$ étant le "noyau" (au sens homotopique) de $1-\varphi^{-1}$.

On obtient en particulier une suite exacte $G\times\mathscr{G}_K$-équivariante (le faisceau pro-étale $\widehat{\mathbf{Z}}_p(i)$ étant par définition le twist de Tate de la limite inverse des faisceaux $\mathbf{Z}/p^n$; par définition $H^*_{\rm proét}(X,\mathbf{Z}_p(i))$ est $H^*_{\rm proét}(X,\widehat{\mathbf{Z}}_p(i))$)

$$0\to \frac{H^{i-1}(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})}{1-\varphi^{-1}} \to H^i_{\rm proét}(X,\widehat{\mathbf{Z}}_p(i)) \simeq H^i_{\rm ét}(X,\mathbf{Z}_p(i)) \to H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})^{\varphi^{-1}=1}\to 0,$$

ce qui nous ramène à comprendre $H^*(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}))$ en tant que $A_{\rm inf}$-module topologique muni d'actions de $G\times\mathscr{G}_K$ et de l'opérateur $1-\varphi^{-1}$. Le morphisme $r_{\rm ét} : {\rm Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^i_{\rm ét}(X,\mathbf{Z}_p(i))$ construit par la méthode de Iovita-Spiess combiné avec la projection fournie par la suite exacte précédente induisent un morphisme $A_{\rm inf}$-linéaire

$$A_{\rm inf}\otimes_{\mathbf{Z}_p} {\rm Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}).$$

Le théorème 5.16 est alors une conséquence du résultat plus fin suivant [**D10**] :

Théorème 5.21. — *Le morphisme $A_{\rm inf}\otimes_{\mathbf{Z}_p} {\rm Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}))$ se prolonge en un isomorphisme de $A_{\rm inf}$-modules topologiques, compatible avec les actions de $G\times\mathscr{G}_K$ et $1-\varphi^{-1}$*

$$r_{\rm inf} : A_{\rm inf}\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}{\rm Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \simeq H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}).$$

L'existence du prolongement (cor. 4.13 de loc.cit.) n'est pas immédiate à cause des subtilités topologiques, mais n'est pas le point le plus délicat de la preuve. Pour montrer que $r_{\rm inf}$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})$ est sans $\tilde{\xi}$-torsion et que $r_{\rm inf}$ est un isomorphisme modulo $\tilde{\xi}$. La raison est que $H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})$ est $\tilde{\xi}$-adiquement complet (au sens dérivé), une propriété non triviale du complexe $A\Omega_{\mathfrak{X}}$, qui se transfère aux groupes

35. Dans [**9**] on suppose que $\mathfrak{X}$ est lisse, mais comme il a été remarqué dans [**D10**] la preuve n'utilise même pas le fait que $\mathfrak{X}$ soit semistable.

$H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})$, et que l'on dispose d'un lemme de Nakayama dans ce contexte. Ensuite, $r_{\rm inf}$ modulo $\tilde{\xi}$ s'identifie à une application

$$\mathscr{O}_C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\})/\tilde{\xi} \to H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\} \otimes^L_{A_{\rm inf},\tilde{\theta}} \mathscr{O}_C),$$

la deuxième flèche étant injective pour des raisons formelles. D'autre part, une version entière de la suite spectrale de Hodge-Tate

$$E_2^{u,v} = H^u(\mathfrak{X}, H^v(A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}/\tilde{\xi})) \Rightarrow H^{u+v}(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}/\tilde{\xi}),$$

combinée avec l'isomorphisme $H^v(A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\}/\tilde{\xi}) \simeq \Omega^v_{\mathfrak{X}/\mathscr{O}_C}\{i-v\}$ et le théorème d'acyclicité de Grosse-Klönne montre que $H^i(\mathfrak{X}, A\Omega_{\mathfrak{X}}\{i\} \otimes^L_{A_{\rm inf},\tilde{\theta}} \mathscr{O}_C)$ est isomorphe à $H^0(\mathfrak{X}, \Omega^i_{\mathfrak{X}/\mathscr{O}_C})$. La flèche $\mathscr{O}_C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^0(\mathfrak{X}, \Omega^i_{\mathfrak{X}/\mathscr{O}_C})$ qui s'en déduit n'est rien d'autre que la flèche d'intégration des symboles à la Iovita-Spiess (36). Enfin, la flèche $\mathscr{O}_C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\mathrm{Sp}_i(\mathbf{Z}_p)^* \to H^0(\mathfrak{X}, \Omega^i_{\mathfrak{X}/\mathscr{O}_C})$ est un isomorphisme, conséquence des théorèmes 5.17 et 5.18. Ceci permet de conclure.

6. Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld

Ce chapitre résume le contenu des articles [**D7**], resp. [**D8**] et [**D14**], en collaboration avec Arthur-César Le Bras, resp. avec Pierre Colmez et Wiesława Nizioł. Dans le premier article on démontre une conjecture de Breuil et Strauch [**16**], que l'on utilise dans les deux autres pour établir un analogue p-adique d'un théorème classique (37), décrivant la cohomologie ℓ-adique de la tour de Drinfeld en dimension 1 à partir des correspondances de Jacquet-Langlands et Langlands locales pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le résultat ℓ-adique est connu pour $\mathrm{GL}_n(F)$, avec F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, nos résultats s'appliquent uniquement à la tour pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais nous faisons quelques pas timides vers le groupe $\mathrm{GL}_2(F)$, qui montrent que la situation est beaucoup plus mystérieuse en p-adique qu'en ℓ-adique.

On fixe une extension finie F de $\mathbf{Q}_p$ et une uniformisante ϖ de F. On note C le complété d'une clôture algébrique $\bar{F}$ de F et on note $\breve{F}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de F dans C . On fixe aussi une algèbre de quaternions D non déployée sur F et on note $G = \mathrm{GL}_2(F)$ et $\check{G} = D^\times$. On note $\mathscr{O}_D$ l'ordre maximal de D et ϖ_D une uniformisante. Le corps des coefficients L sera une extension finie, assez grande, de F.

6.1. La tour de Drinfeld en dimension 1. — Ce paragraphe est préliminaire et introduit un certain nombre d'acteurs et de notations. Le groupe $G = \mathrm{GL}_2(F)$ agit naturellement sur le demi-plan de Drinfeld $\Omega_{\rm Dr,F} = \mathbf{P}^{1,\rm ad}_F \setminus \mathbf{P}^1(F)$. Dans un papier monumental [**34**] Drinfeld a construit une tour $(\breve{\mathscr{M}}_n)_{n\geq 0}$ de revêtements étales G-équivariants de $\breve{\Omega}_{\rm Dr} := \Omega_{\rm Dr,F} \otimes_F \breve{F}$, de groupe de Galois $\check{G}$. Le point crucial est que $\breve{\mathscr{M}}_0 := \breve{\Omega}_{\rm Dr} \times \mathbf{Z}$ est la fibre générique d'un schéma formel G-équivariant (38) sur $\mathscr{O}_{\breve{F}}$, classifiant les déformations par quasi-isogénies $\mathscr{O}_D$-équivariantes d'un $\mathscr{O}_D$-module formel spécial de dimension 1 et hauteur 4 sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. On dispose

36. C'est le point le plus pénible de [**D10**], il faut suivre attentivement toutes les constructions de Bhatt, Morrow et Scholze et les combiner avec une compatibilité en fibre générique (lemme 3.24 de [**67**]) due à Scholze.
37. Découlant d'une combinaison de travaux de Langlands, Deligne, Carayol, Faltings et Fargues.
38. Le groupe G agit aussi sur $\mathbf{Z}$, $g \in G$ agissant par décalage par $-v_\varpi(\det g)$.

donc d'un groupe p-divisible rigide universel X^{un} sur $\breve{\mathscr{M}}_0$ et on peut poser $\breve{\mathscr{M}}_n = X^{\mathrm{un}}[\varpi_D^n] \setminus X^{\mathrm{un}}[\varpi_D^{n-1}]$. Notons $\mathscr{M}_n = \breve{\mathscr{M}}_n \otimes_{\breve{F}} C$.

On dispose d'une donnée de descente à la Weil sur chaque étage de la tour, qui n'est pas effective, mais le devient une fois que l'on prend le quotient par l'action du groupe engendré par $\varpi \in Z(G)$. On note $\mathscr{M}_{n,F}^{\varpi}$ le F-espace rigide analytique qui s'en déduit et on note $\mathscr{M}_n^{\varpi} := C \otimes_F \mathscr{M}_{n,F}^{\varpi}$. L'action de $G \times \check{G}$ sur $\breve{\mathscr{M}}_n$ en induit une sur $\mathscr{M}_{n,F}^{\varpi}$. En pratique toute question raisonnable concernant la cohomologie de $\mathscr{M}_n$ se ramène (en utilisant des torsions par des caractères) à celle de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$. La cohomologie de $\mathscr{M}_0^{\varpi}$ étant essentiellement celle du demi-plan p-adique $\breve{\Omega}_{\mathrm{Dr}} \otimes_{\breve{F}} C = \mathbb{H}_C^1$, elle est bien comprise par le théorème 5.16 (qui est facile en dimension 1, cf. le chapitre 1 de [**D8**]). Nous allons donc nous concentrer sur les niveaux $n \geq 1$, et nous allons négliger toute contribution venant du niveau 0 de la tour, à torsion par un caractère près.

On fixe donc par la suite $n \geq 1$. L'action de $D^{\times}$ sur $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ se factorise par le groupe fini $H_n := D^{\times}/\varpi^{\mathbf{Z}}(1 + \varpi_D^n \mathscr{O}_D)$. On suppose que L est assez grand pour que les L-représentations irréductibles de H_n soient absolument irréductibles. Les correspondances de Jacquet-Langlands et Langlands locales "classiques" associent à toute L-représentation irréductible ρ de H_n une série discrète $\mathrm{LL}(\rho)$ de G et une L-représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(\rho)$ de dimension 2. Par une recette de Fontaine la donnée de $\mathrm{WD}(\rho)$ équivaut à celle d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F))$-module $M(\rho)$, de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. On note $\Phi N_{n,\varpi}^{\mathrm{sc}}$ l'ensemble des $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-modules obtenus à partir des $\rho \in \mathrm{Irr}_L(H_n)$ pour lesquelles $\mathrm{LL}(\rho)$ est supercuspidale (ce qui équivaut à $\dim \rho > 1$). Pour $M \in \Phi N_{n,\varpi}^{\mathrm{sc}}$ on note $\mathrm{JL}(M) \in \mathrm{Irr}_L(H_n)$ la représentation donnant naissance à M et $\mathrm{LL}(M) = \mathrm{LL}(\mathrm{JL}(M))$ (c'est donc une L-représentation de G). Enfin, si X est un $L[H_n]$-module et $M \in \Phi N_{n,\varpi}^{\mathrm{sc}}$ on pose

$$X[M] := \mathrm{Hom}_{D^{\times}}(\mathrm{JL}(M), X).$$

Si H^* est une cohomologie p-adique à coefficients dans L, les espaces $H^*(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ pour $M \in \Phi N_{n,\varpi}^{\mathrm{sc}}$ arbitraire contiennent l'information sur la cohomologie de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ qui ne vient pas du niveau 0, à des twists près.

6.2. Cohomologies "rationnelles". —

6.2.1. Cohomologies de Hyodo-Kato et de Rham. — On ne fait aucune hypothèse sur F dans ce paragraphe. On fixe $n \geq 1$ et $M \in \Phi N_{n,\varpi}^{\mathrm{sc}}$, et on note

$$\breve{M} = \breve{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M, \quad M_{\mathrm{dR}} = (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\mathscr{G}_F}, \quad X_{\mathrm{st}}^+(M) = (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{N=0,\varphi=p}.$$

Alors M_{dR} est un $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F$-module libre de rang 2 et $X_{\mathrm{st}}^+(M)$ est un espace de Banach-Colmez. Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, la théorie de Grosse-Klönne construit un $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module de Fréchet $H_{\mathrm{HK}}^1(\mathscr{M}_n^{\varpi})$ sur $\breve{\mathbf{Q}}_p$ muni d'un isomorphisme de Hyodo-Kato

$$\iota_{\mathrm{HK}} : C \widehat{\otimes}_{\breve{\mathbf{Q}}_p} H_{\mathrm{HK}}^1(\mathscr{M}_n^{\varpi}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{dR}}^1(\mathscr{M}_n^{\varpi}).$$

Théorème 6.1. — *Il existe un diagramme commutatif naturel de $G\times\mathscr{G}_F$-fréchets*

$$\begin{tikzcd} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \breve{M}\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[d] \\ H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \arrow[r, "\sim"] & C\widehat{\otimes}_F M_{\mathrm{dR}}\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \end{tikzcd}$$

la flèche à droite étant induite par l'identification $M_{\mathrm{dR}}\otimes_F C = M\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} C = \breve{M}\otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} C$. La flèche horizontale haute est φ-équivariante.

Si $F=\mathbf{Q}_p$ et $n=1$ on peut démontrer le théorème directement [**16**], [**60**] en utilisant la description explicite d'un modèle semistable de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$. Pour $F=\mathbf{Q}_p$ et n quelconque une telle description de la cohomologie de de Rham a été obtenue pour la première fois dans [**D7**], par un argument assez acrobatique, en utilisant en particulier la correspondance de Langlands locale p-adique. Le théorème ci-dessus est obtenu dans [**D8**]. La preuve la plus simple est probablement celle obtenue en utilisant la discussion qui suit le théorème 5.11 et la théorie de Lubin-Tate non abélienne [**20**], [**21**]. L'approche de [**D8**] utilise aussi la théorie de Lubin-Tate non abélienne, mais d'une manière très différente. On y commence par la preuve de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{LL}(M)^*, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M])\simeq \breve{M},$$

en combinant le théorème d'uniformisation p-adique de Cerednik-Drinfeld et les théorèmes de compatibilité local-global pour les courbes de Shimura de Carayol [**20**] et Saito [**65**]. Ce genre d'argument (une version p-adique de son analogue ℓ-adique bien connu) avait déjà été utilisé dans [**D7**]. La partie difficile consiste à montrer qu'il n'y a rien d'autre dans $H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$. En passant à la cohomologie de de Rham (via l'isomorphisme de Hyodo-Kato) et en utilisant la dualité, il s'agit de voir que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ est $\mathrm{LL}(M)$-isotypique. Puisque l'on sait déjà qu'il s'agit d'un G-module lisse qui contient assez de copies de $\mathrm{LL}(M)$, il suffit de voir que la dimension des invariants de $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ par des sous-groupes ouverts compacts assez petits de G est celle attendue. Pour cela on établit un théorème de comparaison avec la cohomologie de la tour de Lubin-Tate, l'avantage de cette tour étant que les groupes de cohomologie de de Rham à chaque étage sont de dimension finie, et cette dimension est celle de la cohomologie ℓ-adique, connue par la théorie de Lubin-Tate non abélienne. Plus précisément, soit $(\breve{\mathrm{LT}}_j)_{j\geq 0}$ la tour de Lubin-Tate pour $\mathrm{GL}_2(F)$, i.e. $\breve{\mathrm{LT}}_j$ est la fibre générique du $\mathscr{O}_{\breve{F}}$-schéma formel classifiant les déformations par quasi-isogénies, avec structures de niveau $1+\varpi_F^j M_2(\mathscr{O}_F)$, de l'unique $\mathscr{O}_F$-module formel de dimension 1 et de F-hauteur 2 sur $\overline{\mathbf{F}}_p$, et soit $\mathrm{LT}_j=\breve{\mathrm{LT}}_j\otimes_{\breve{F}} C$. La tour $(\mathrm{LT}_j)_{j\geq 0}$ possède une action de $G\times D^{\times}$, $D^{\times}$ agissant sur chaque étage, mais G seulement sur la tour toute entière. On démontre alors dans [**D8**] le résultat suivant :

Théorème 6.2. — *On dispose d'un isomorphisme naturel de $C[G\times D^{\times}]$-modules lisses, admissibles en tant que G-modules lisses*

$$\varinjlim_j H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}_j)\simeq \varinjlim_n H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n).$$

L'ingrédient principal est l'isomorphisme de Faltings [**42**], raffiné par Fargues [**43**] et puis par Scholze et Weinstein [**69**] en un isomorphisme $G \times D^{\times}$-équivariant d'espaces perfectoïdes

$$\mathscr{M}_\infty := \varprojlim_n \mathscr{M}_n \simeq \mathrm{LT}_\infty := \varprojlim_j \mathrm{LT}_j,$$

la limite inverse étant prise ici au sens des diamants. Soit $\mathscr{M}_\infty^{\varpi}$ (resp. $\mathrm{LT}_\infty^{\varpi}$) le quotient de $\mathscr{M}_\infty$ (resp LT_∞) par l'action du groupe engendré par ϖ, vu comme élément du centre de G. L'isomorphisme $\mathscr{M}_\infty \simeq \mathrm{LT}_\infty$ induit un isomorphisme $\mathscr{M}_\infty^{\varpi} \simeq \mathrm{LT}_\infty^{\varpi}$. Soit G_j (resp. $\check{G}_n$) le sous-groupe de congruence de niveau j (resp. n) de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F)$ (resp. $\mathscr{O}_D^{\times}$). Soit $X = \mathrm{LT}_j^{\varpi}$ (resp. $\mathscr{M}_n^{\varpi}$), $\hat{X} = \mathrm{LT}_\infty^{\varpi}$ (resp. $\hat{X} = \mathscr{M}_\infty^{\varpi}$) et $K = G_j$ (resp. $\check{G}_n$) et regardons les "fonctions au bord de $\hat{X}$" $\mathscr{O}(\partial \hat{X}) = \varinjlim_U \mathscr{O}(\hat{X} \setminus U)$, la limite inductive étant prise sur les domaines rationnels U de $\hat{X}$. On définit de même $\mathscr{O}(\partial X)$ et on pose $H_c^1(\hat{X}, \mathscr{O}) = \mathscr{O}(\partial \hat{X})/\mathscr{O}(\hat{X})$ (pareil avec X). Un argument de descente pour le K-torseur pro-étale $\hat{X} \to X$ permet de montrer (en exploitant à souhait des résultats de Scholze [**68**] et Weinstein [**80**]) que $H_c^1(\hat{X}, \mathscr{O})^K \simeq H_c^1(X, \mathscr{O})$. Posons $K' = \check{G}_n$ si $K = G_j$ et $K' = G_j$ si $K = \check{G}_n$. La dualité de Serre pour les espaces Stein fournit une suite exacte

$$0 \to H^1_{\mathrm{dR,c}}(X) \to H^1_c(X, \mathscr{O}) \to \mathscr{O}(X)^* \to H^0_{\mathrm{dR}}(X)^* \to 0,$$

et on montre que $\mathscr{O}(X)^*$ n'a pas de K'-invariants non nuls (cela utilise l'action infinitésimale et l'application des périodes de Gross-Hopkins), ce qui montre que

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^{G_j} \simeq H^1_c(\mathscr{M}_n^{\varpi}, \mathscr{O})^{G_j} \simeq H^1_c(\mathscr{M}_\infty^{\varpi}, \mathscr{O})^{G_j \times \check{G}_n} \simeq$$

$$H^1_c(\mathrm{LT}_\infty^{\varpi}, \mathscr{O})^{G_j \times \check{G}_n} \simeq H^1_c(\mathrm{LT}_j, \mathscr{O})^{\check{G}_n} \simeq H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}_j)^{\check{G}_n}.$$

Puisque $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}_j)$ est de dimension finie et que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})$ est lisse en tant que G-module, cela permet de conclure.

6.2.2. Deux résultats techniques cruciaux. — On ne fait aucune hypothèse sur F dans ce paragraphe. Un des résultats techniques importants de [**D8**] est le "diagramme fondamental" suivant, dans lequel on fixe $M \in \Phi N^{\varpi}_{n,\mathrm{sc}}$. Il se déduit du théorème 5.9 et du théorème 6.1, mais on peut aussi l'obtenir (c'est ce qui est fait dans [**D8**]) à partir du théorème 6.1 et d'une combinaison de méthodes perfectoïdes et globales assez amusante.

Théorème 6.3. — *Il existe un diagramme commutatif de $G \times \mathscr{G}_F$-fréchets, à lignes exactes et dont les flèches verticales sont des immersions fermées*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))[M] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & X_{\mathrm{st}}^+(M) \widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \arrow[r] & (C \otimes_F M_{\mathrm{dR}}) \widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Un autre résultat très utile (prop. 2.12 de [**D8**]) est le lien suivant entre la cohomologie étale et celle pro-étale de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$. Soit $(U_k)_{k \geq 0}$ un recouvrement Stein de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$, alors $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1)) = (\varprojlim_k H^1_{\text{ét}}(U_k, \mathscr{O}_L(1)))[1/p]$ a une topologie naturelle (chaque $H^1_{\text{ét}}(U_k, \mathscr{O}_L(1))$ est un réseau d'un L-Banach) et $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1)) = \varprojlim_k H^1_{\text{ét}}(U_k, L(1))$ est un Fréchet. Si X est un L-espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue de G, on note X^b le sous-espace de X des vecteurs dont la G-orbite est bornée.

Proposition 6.4. — *L'application naturelle* $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1)) \to H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))$ *induit un isomorphisme*

$$H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1)) \simeq H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))^b.$$

La preuve n'est pas difficile, mais utilise de manière cruciale que l'on travaille en degré cohomologique 1. En effet, il découle du théorème 5.12 que $H^2_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1)) = 0$, mais je ne sais pas (39) si $H^2_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))$ est nul.

Le résultat suivant, dont le premier point est assez troublant, resume les implications (chapitre 2 de [**D8**]) des deux résultats ci-dessus à la structure des représentations galoisiennes intervenant dans la cohomologie étale et pro-étale de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$. Si $\mathscr{L}$ est une $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F$-droite de M_{dR} on note

$$V_{M,\mathscr{L}} = \ker(X^+_{\text{st}}(M) \to \mathrm{B}^+_{\text{dR}} \otimes_F M_{\text{dR}} \to C \otimes_F M_{\text{dR}}/\mathscr{L}),$$

la dernière flèche étant la composée de la projection canonique et de la flèche induite par θ : $\mathrm{B}^+_{\text{dR}} \to C$. Il découle du théorème de Colmez-Fontaine [**23**] que $V_{M,\mathscr{L}}$ est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_F$, que $D_{\text{pst}}(V_{M,\mathscr{L}}(-1)) = M$ et que les poids de Hodge-Tate de $V_{M,\mathscr{L}}$ (correspondant à n'importe quel plongement) sont 0 et 1. Si $F = \mathbf{Q}_p$, les représentations de la forme $V_{M,\mathscr{L}}$ sont précisément les L-représentations W de dimension 2 pour lesquelles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_F}(W, X^+_{\text{st}}(M)) \neq 0$, mais cela tombe en défaut pour $F \neq \mathbf{Q}_p$.

Corollaire 6.5. — *Soit V une L-représentation continue de dimension finie de $\mathscr{G}_F$.*

a) Si l'un des poids de Hodge-Tate généralisés de V est 0, *alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_F}(V, H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))) \neq 0.$$

b) Pour tout $\mathscr{L}$ on a une suite exacte de G-modules de Fréchet

$$0 \to \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_F}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))[M]) \to \mathrm{LL}(M)^* \to 0.$$

c) Si $\dim V = 2$ *et si* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_F}(V, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, L(1))) \neq 0$ *alors V est de Rham,* $D_{\text{pst}}(V(-1)) = M$ *et* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_F}(V, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, L(1)))^*$ *est un complété de* $\mathrm{LL}(M)$.

6.2.3. Cohomologie cohérente : la conjecture de Breuil-Strauch. — Pour aller plus loin dans la compréhension des multiplicités d'une représentation galoisienne dans la cohomologie étale et pro-étale de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$, il faut comprendre la cohomologie cohérente de cet espace. Pour $F = \mathbf{Q}_p$ Breuil et Strauch [**16**] ont conjecturé (pour $n = 1$) un lien profond entre le complexe de de Rham de $\mathscr{M}_n^p$ et la correspondance de Langlands locale p-adique. Cette conjecture a été démontrée (pour tout n) dans [**D7**] et représente le point de départ de la plupart des résultats présentés dans ce chapitre.

On suppose dans ce paragraphe que $F = \mathbf{Q}_p$ et $\varpi = p$, et on fixe $n \geq 1$ et $M \in \Phi N^{\text{sc}}_{n,p}$. Pour toute L-droite $\mathscr{L} \subset M_{\text{dR}}$ on dispose donc de la L-représentation $V_{M,\mathscr{L}}$ de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Le résultat principal de [**D7**] s'énonce ainsi (40) :

39. Et ce problème est devenu une sorte d'obsession...
40. L'irréductibilité de $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\text{an}}/\mathrm{LL}(M)$ est un théorème délicat de Colmez [**29**].

Théorème 6.6. — $\mathscr{O}(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p})[M]^*$ *est une L-représentation localement analytique admissible et irréductible de G, isomorphe à $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}/\mathrm{LL}(M)$ pour toute L-droite $\mathscr{L} \subset M_{\mathrm{dR}}$. De plus, on a un diagramme commutatif de G-fréchets, à lignes exactes et dont les flèches verticales sont des immersions fermées*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \mathscr{O}(\mathscr{M}^p_n)[M] & \longrightarrow & C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}(\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}})^* & \longrightarrow & (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{L})\widehat{\otimes}\mathrm{LL}(M)^* & \longrightarrow 0 \, . \\ & \| & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \mathscr{O}(\mathscr{M}^p_n)[M] & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathscr{M}^p_n)[M] & \longrightarrow & (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}(M)^* & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Remarque 6.7. — a) En faisant varier M on obtient que $\mathscr{O}(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p})^*$ et $\Omega^1(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p})^*$ sont des L-représentations localement analytiques admissibles, de longueur finie de G. On conjecture que $\mathscr{O}(\mathscr{M}^p_{n,F})^*$ est encore une représentation localement F-analytique admissible et de longueur finie pour $F \neq \mathbf{Q}_p$. Les seuls résultats à ma connaissance sont ceux de Patel-Schmidt-Strauch [**64**] (qui montrent seulement l'admissibilité pour $n = 1$) et un travail en préparation d'Ardakov-Wadsley, qui montrent que c'est bien le cas pour $n = 1$.

b) L'analogue "banachique" de ce résultat de finitude tombe en défaut pour $n > 0$: Lue Pan a montré [**60**] que pour $n = 1$ et $F = \mathbf{Q}_p$, si $\mathscr{X}$ est un modèle semi-stable convenable, $G \times D^\times$-équivariant de $\mathscr{M}^p_{1,\mathbf{Q}_p}$, alors $\Omega^1(\mathscr{X})^*$ n'est *pas* une représentation de Banach admissible (ou de longueur finie) de G, plus précisément cet espace contient comme sous-espace fermé le complété unitaire universel d'une représentation lisse supercuspidale de G, et celui-ci n'est ni admissible ni de longueur finie.

La preuve du théorème 6.6 repose sur plusieurs ingrédients de nature assez différente. Pour simplifier les notations posons $\mathscr{O}[M] = \mathscr{O}(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p})$ et $\Pi_{\mathscr{L}} = \Pi(V_{M,\mathscr{L}})$. La partie la plus délicate de l'argument, la seule que nous allons discuter ici, est la construction d'un isomorphisme $\mathscr{O}[M] \simeq (\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathscr{L}}/\mathrm{LL}(M))^*$.

Le G-module $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathscr{L}}/\mathrm{LL}(M)$ est bien compris : les travaux de Colmez [**26**] et [**29**] montrent qu'il est (topologiquement) irréductible et ne dépend pas du choix de $\mathscr{L}$ (à isomorphisme près), on peut donc le noter simplement Π_M. Ces deux propriétés de Π_M sont hautement non triviales : l'indépendance par rapport à $\mathscr{L}$ est l'un des points les plus délicats de [**26**], un argument nettement plus simple a été obtenu par Colmez dans [**29**] (en exploitant les résultats de [**D1**]), une troisième preuve se trouve dans [**D7**]. En tenant compte de cela et du lemme de Schur localement analytique, il suffit de montrer qu'il existe un morphisme G-équivariant non nul $\Phi : \Pi^*_M \to \mathscr{O}[M]$ et qu'un tel morphisme est toujours surjectif. La construction de Φ est basée sur trois observations.

• comme Π_M ne dépend pas de $\mathscr{L}$, et que $\mathrm{LL}(M)$ est supercuspidale, on peut choisir une filtration $\mathscr{L}$ "de nature globale", i.e. telle que $V_{M,\mathscr{L}}$ soit la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de la représentation galoisienne associée à une forme automorphe π pour une algèbre de quaternions convenable $B/\mathbb{Q}$ (compacte modulo centre à l'infini et déployée en p).

• la compatibilité local-global à la Emerton pour la cohomologie complétée $\hat{H}^0$ associée à B (et à un niveau modéré convenable) montre que $\hat{H}^0[\mathbf{m}]$ est une somme directe (finie et non nulle) de copies de $\Pi_{\mathscr{L}}$, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de la grosse algèbre de Hecke sphérique associé à π.

• le théorème d'uniformisation p-adique de Cerednik-Drinfeld combiné à un argument de réciprocité de Frobenius fournit un isomorphisme de la forme

$$\Omega^1(\mathrm{Sh}_n)[\mathfrak{m}] \simeq \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\hat{H}^0[\mathfrak{m}]^*, \Omega^1(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p}))$$

pour une certaine courbe de Shimura Sh_n. La correspondance de Jacquet-Langlands classique et la compatibilité local-global montrent que la M-partie du terme à gauche est non nulle, ce qui permet de fabriquer un morphisme G-équivariant non nul $\Pi^*_{\mathscr{L}} \to \Omega^1(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p})[M]$. On montre qu'un tel morphisme s'étend en un morphisme G-équivariant $(\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathscr{L}})^* \to \Omega^1(\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p})[M]$, dont la restriction à $\Pi^*_M \subset (\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathscr{L}})^*$ est non nulle et à valeurs dans $\mathscr{O}[M]$.

La preuve de la surjectivité d'un tel Φ est un mélange d'arguments de géométrie et d'analyse fonctionnelle, qui doivent beaucoup à des discussions avec Colmez et Fargues. Pour les faire marcher on a besoin du résultat suivant, qui est une des observations cruciales de [**D7**]. Soient

$$a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Lie}(G).$$

Théorème 6.8. — *Il existe un unique opérateur continu L-linéaire $\partial : \Pi^*_M \to \Pi^*_M$ tel que $a^+ - 1 = u^+ \circ \partial$. L'action de ∂ sur Π^*_M s'étend en une structure de $\mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbf{Q}_p})$-module sur Π^*_M.*

La première partie est démontrée par Colmez dans [**29**], voir [**D7**] pour une preuve différente. Pour la deuxième partie le point clé est le fait que toute $f \in \mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbf{Q}_p})$ est de la forme $f(z) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \frac{1}{z-x} d\mu(x)$ pour une distribution μ de masse totale 0, et on a bien sûr envie de poser

$$f.\ell = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} (\partial - x)^{-1}(\ell) d\mu(x)$$

pour $\ell \in \Pi^*_M$. Il faut cependant vérifier que $\partial - x$ est bien inversible sur Π^*_M et que l'on peut contrôler son inverse suffisamment bien pour s'assurer que les intégrales convergent.

En revenant à la preuve de la surjectivité de Φ, on commence par montrer que Φ est d'image dense. En utilisant l'injectivité de u^+ on voit facilement que n'importe quel Φ est forcément $\mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbf{Q}_p})$-linéaire, et que l'adhérence Z de l'image de Φ dans $\mathscr{O}[M]$ correspond à un sous fibré vectoriel G-équivariant de $\mathscr{O}_{\mathscr{M}^p_{n,\mathbf{Q}_p}}[M]$, vu comme fibré vectoriel G-équivariant sur $\Omega_{\mathrm{Dr},\mathbf{Q}_p}$. Il s'agit donc d'établir un résultat d'irréductibilité pour ce fibré G-équivariant. Cela semble délicat du côté Drinfeld, mais un travail de Kohlhaase [**57**] permet de transférer le problème du côté Lubin-Tate (on doit cette observation importante à Fargues). On se ramène ainsi à montrer que le fibré $D^\times$-équivariant $\mathrm{JL}(M) \otimes \mathscr{O}_{\check{\mathbf{P}}^1}$ sur $\check{\mathbf{P}}^1$ est irréductible, ce qui est assez facile. Ainsi l'image de Φ est dense, et on conclut que Φ est surjective en utilisant un argument subtil d'analyse fonctionnelle (prop. 10.11 de [**D7**]), qui nous a été vendu par Pierre Colmez.

Si l'on combine la conjecture de Breuil et Strauch avec le diagramme fondamental (th. 6.3) et le théorème 3.8 on obtient le résultat suivant, le plus important de [**D8**], analogue p-adique d'un résultat classique pour la cohomologie ℓ-adique. Le cas $\dim V > 2$ est le point le plus difficile du théorème, et la preuve dans [**D8**] est un peu opaque ; une preuve plus naturelle se trouve dans [**D14**].

Théorème 6.9. — *Soit $M \in \Phi N^{\rm sc}_{n,p}$ et soit $\mathbf{P}(M_{\rm dR})$ l'ensemble des L-droites de $M_{\rm dR}$.*

a) Pour tout $\mathscr{L} \in \mathbf{P}(M_{\rm dR})$ on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))[M]) \simeq (\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\rm la})^*$$

b) Si V est une L-représentation absolument irréductible, de dimension ≥ 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors

$$\mathrm{Hom}_G(V, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, L(1))[M]) \simeq \begin{cases} \Pi(V)^* & \textit{si } V = V_{M,\mathscr{L}}, \textit{ pour un } \mathscr{L} \in \mathbf{P}(M_{\rm dR}) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

6.3. Une drôle de dichotomie. — Le résultat suivant, valable pour tout F, est une des observations cruciales de [**D14**] :

Théorème 6.10. — *Soit K une extension finie de F. Pour tous $k \geq 1$ et $n, q \geq 0$ le $\mathscr{O}_L$-module $H^q_{\text{ét}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,K}, \mathscr{O}_L/p^k)$ est profini et son dual de Pontryagin est une représentation lisse de G, de présentation finie.* (41)

Il est crucial de travailler sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, par exemple je ne sais pas si $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^{\varpi}_n, k_L)$ est profini. En excluant un certain nombre de contorsions topologiques assez délicates, la preuve utilise le théorème 6.11 ci-dessous et deux autres ingrédients :

• la filtration de Bloch-Kato-Hyodo [**10**], [**51**] sur les cycles proches modulo p pour ramener le calcul de la cohomologie étale à celle de faisceaux cohérents sur la fibre spéciale.

• les propriétés de la catégorie des représentations de présentation finie de $G' := G/\varpi^{\mathbf{Z}}$, en particulier le fait qu'elle est abélienne et stable par extensions d'après Shotton [**74**].

Un ingrédient géométrique important dans la preuve du théorème ci-dessus est le résultat suivant (cf. l'appendice de [**D8**]), qui utilise la structure fine des courbes analytiques obtenue dans le livre de Ducros [**35**], ainsi que l'uniformisation p-adique de Cerednik-Drinfeld. Pour $n = 1$ et $F = \mathbf{Q}_p$ des informations nettement plus précises ont été obtenues par Lue Pan [**60**].

Théorème 6.11. — *L'espace $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,F}$ possède un modèle semi-stable $G \times \check{G} \times \mathscr{G}_F$-équivariant $\mathfrak{X}$ sur l'anneau des entiers d'une extension finie de F. Les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$ forment un nombre fini d'orbites sous l'action de G, chaque composante étant fixée par un sous-groupe ouvert compact de G.*

Pour construire le modèle on choisit un sous-groupe cocompact Γ de G opérant librement et sans point fixe sur l'arbre de Bruhat-Tits, de telle sorte que $X_n(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathscr{M}^{\varpi}_{n,F}$ soit une courbe propre et lisse ; on choisit alors K tel que $X_n(\Gamma)$ ait un modèle semi-stable sur $\mathscr{O}_K$ et on fait le produit fibré des modèles semi-stables minimaux de $X_n(\Gamma)$ et $\Omega_{\rm Dr,F}$ sur $\mathscr{O}_K$ au-dessus de celui de $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\Omega_{\rm Dr}$. Il faut se fatiguer un peu pour montrer que cette construction a les bonnes propriétés.

Le résultat suivant est un des plus délicats de [**D14**] et je trouve la dichotomie qu'il établit assez frappante.

41. Une représentation lisse π de G sur un $\mathscr{O}_L$-module de torsion est dite de présentation finie si l'on peut trouver une suite exacte $c-\mathrm{Ind}^G_{K_1}(W_1) \to c-\mathrm{Ind}^G_{K_2}(W_2) \to \pi \to 0$ avec K_i des sous-groupes compacts ouverts de G et W_i des représentations lisses de K_i, de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$.

Théorème 6.12. — *On suppose que $p > 2$.*

a) Si $F = \mathbf{Q}_p$ et si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,K}, k_L)$ est le dual d'une représentation lisse, admissible, de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

b) Si $F \neq \mathbf{Q}_p$, il existe une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$ telle que $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,K}, k_L)$ ne soit pas *le dual d'une représentation lisse admissible de $\mathrm{GL}_2(F)$.*

La preuve de ce résultat est assez tortueuse. Le point b) repose sur plusieurs ingrédients, en dehors des théorèmes 6.10 et 6.1. Même s'il s'agit d'un résultat en caractéristique p, la preuve utilise de manière cruciale les théorèmes 6.1 et 6.3, ainsi que la proposition 6.4. Pour pouvoir changer de caractéristique on utilise un résultat important de Schraen [**73**] et Wu [**81**] affirmant que pour $F \neq \mathbf{Q}_p$ les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(F)$ ne sont pas de présentation finie, ainsi que des résultats fins de Hu [**53**] et Vigneras [**79**] concernant les représentations de présentation finie de $\mathrm{GL}_2(F)$. Ces résultats permettent de faire bon usage du foncteur parties ordinaires d'Emerton [**39**], [**40**] pour montrer qu'une représentation admissible et de présentation finie de $\mathrm{GL}_2(F)$ (avec $F \neq \mathbf{Q}_p$) est essentiellement une induite parabolique, et ceci avec des coefficients modulo p^k pour tout k, de manière compatible avec la variation de k.

La preuve du point a) occupe une bonne partie de [**D14**]. On commence par montrer qu'une représentation de type fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dont le cosocle est admissible est en fait de longueur finie. Ainsi il suffit de voir que $\mathrm{Hom}_G(\pi^\vee, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,K}, k_L))$ est de dimension finie pour tout $k_L[G]$-module lisse irréductible π, et nulle pour presque tout π. Ces espaces sont étudiés à travers le foncteur de Scholze [**70**] : on établit l'existence d'une suite spectrale reliant les espaces $\mathrm{Hom}_G(\pi^\vee, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty}, k_L))$ et le foncteur de Scholze [42] $\pi \mapsto S^1(\pi) = H^1_{\text{ét}}(\mathbf{P}^1_C, \mathscr{F}_\pi)$. Diverses suites spectrales de descente combinées avec les résultats de Scholze [**70**], l'isomorphisme de Faltings entre les tours de Drinfeld et de Lubin-Tate, ainsi que les résultats récents de Fust [**46**] ramènent la preuve à celle du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de $k_L[G]$-modules lisses irréductibles π pour lesquels $S^1(\pi)^{\mathscr{G}_K} \neq 0$. Nous montrons cela par voie globale, en exploitant pleinement les techniques de Paškūnas dans [**63**]. Au final tout repose sur des résultats (de Carayol et Scholze) d'isotypie pour l'action de $\mathscr{G}_K$ sur la cohomologie complétée d'une tour de courbes de Shimura.

En raffinant les méthodes décrites (très rapidement...) ci-dessus, on obtient l'analogue suivant du théorème 6.9, qu'il faudrait tout de même améliorer pour inclure le cas d'une représentation réductible :

Théorème 6.13. — *On suppose que $F = \mathbf{Q}_p$ et $p > 2$. Soit $\bar{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_d(k_L)$ une représentation continue et soit*

$$X(\bar{\rho}) := \mathrm{Hom}_{k_L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(\bar{\rho}, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_n, k_L))^\vee.$$

a) *$X(\bar{\rho})$ est une G-représentation lisse, de longueur finie.*

b) *Supposons que $\bar{\rho}$ est absolument irréductible. Alors $X(\bar{\rho})$ est nul si $d > 2$ et une extension successive de copies de $\pi(\bar{\rho})$ si $d = 2$, où $\pi(\bar{\rho})$ est la représentation supersingulière de G associée à $\bar{\rho}$ par la correspondance de Langlands locale modulo p.*

42. $\mathscr{F}_\pi$ étant le faisceau obtenu en descendant le faisceau constant $\underline{\pi}$ le long du G-torseur pro-étale $\mathrm{LT}_\infty \to \mathbf{P}^1_C$.

6.4. Anneaux de Kisin et cohomologie de la tour de Drinfeld. — On suppose que $F=\mathbf{Q}_p$ dans ce paragraphe. Soit $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_{n,\overline{\mathbf{Q}}_p},L(1))=L\otimes_{\mathscr{O}_L}H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_{n,\overline{\mathbf{Q}}_p},\mathscr{O}_L(1))$ la cohomologie complétée de la tour $(\mathscr{M}^p_{n,K})_{[K:\mathbf{Q}_p]<\infty}$, avec

$$H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_{n,\overline{\mathbf{Q}}_p},\mathscr{O}_L(1)):=\varprojlim_k\big(\varinjlim_{[K:\mathbf{Q}_p]<\infty}H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_{n,K},(\mathscr{O}_L/p^k)(1))\big).$$

Noter que l'on fait varier K, pas le niveau n ici !

Fixons $M\in\Phi N^p_{n,\text{sc}}$ et notons δ_M le caractère central de $\mathrm{JL}(M)$. Soit $\mathscr{G}(M)$ l'ensemble des orbites sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/k_L)$ de représentations semi-simples $\bar\rho:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ telles que $\chi_{\text{cyc}}\delta_M\equiv\det(\bar\rho)\pmod{\mathfrak{m}_L}$. Pour $\bar\rho\in\mathscr{G}(M)$ notons $T_{\bar\rho,M}:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to R^{\text{ps,M}}_{\bar\rho}$ le pseudo-caractère universel de déterminant $\delta_M\chi_{\text{cyc}}$ qui déforme $\mathrm{Tr}(\bar\rho)$ et soit $R_{\bar\rho,M}$ le quotient de $R^{\text{ps,M}}_{\bar\rho}[1/p]$ par l'intersection des idéaux maximaux x de $R^{\text{ps,M}}_{\bar\rho}[1/p]$ pour lesquels la spécialisation de $T_{\bar\rho,M}$ en x est la trace d'une représentation de de Rham, à poids de Hodge-Tate $0,1$ et dont le D_{pst} est M. On peut montrer (pour la plupart des $\bar\rho$ il s'agit d'un résultat classique de Kisin [**55**]) qu'il existe une unique représentation $\rho_{\bar\rho,M}:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathrm{GL}_2(R_{\bar\rho,M})$ dont la trace est la composée de $T_{\bar\rho,M}$ et de la projection canonique $R^{\text{ps,M}}_{\bar\rho}\to R_{\bar\rho,M}$. La correspondance de Langlands locale p-adique en familles fournit un $R_{\bar\rho,M}[G]$-module $\Pi^*(\rho_{\bar\rho,M})$ tel que pour tout idéal maximal x de $R_{\bar\rho,M}$ on ait $\Pi^*(\rho_{\bar\rho,M})\otimes_{R_{\bar\rho,M}}k(x)\simeq\Pi(\rho_x)^*$, ρ_x étant la spécialisation de $\rho_{\bar\rho,M}$ en x. On peut enfin énoncer le résultat principal de [**D14**], analogue pour la tour de Drinfeld de celui d'Emerton [**37**] :

Théorème 6.14. — *On suppose que $p>3$. Pour tout $M\in\Phi N^p_{n,\text{sc}}$ on dispose d'un isomorphisme de $G\times\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules topologiques*[43]

$$H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_{n,\overline{\mathbf{Q}}_p},L(1))[M]\simeq\widehat{\bigoplus}_{\bar\rho\in\mathscr{G}(M)}\Pi^*(\rho_{\bar\rho,M})\otimes\rho_{\bar\rho,M}\otimes\mathrm{Hom}_L(R_{\bar\rho,M},L),$$

les produits tensoriels étant au-dessus de $R_{\bar\rho,M}$.

Le point de départ de la preuve est le fait que $(H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}^p_{n,\overline{\mathbf{Q}}_p},\mathscr{O}_L(1))/p^k)^{\mathscr{G}_K}$ est le dual d'un $\mathscr{O}_L[G]$-module lisse de longueur finie pour tous $k\geq 1$ et $[K:\mathbf{Q}_p]<\infty$, qui découle (avec un peu d'effort) du théorème de finitude ci-dessus. Cela permet d'utiliser la théorie de Paškūnas [**61**]. Les détails techniques sont malheureusement un cauchemar.

Références

Travaux cités dans le texte

[D1] Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[D2] (avec B. Schraen), Endomorphism algebras of admissible p-adic representations of p-adic Lie groups, Representation Theory 17 (2013), 237–246.

[D3] Équations différentielles p-adiques et modules de Jacquet analytiques, Automorphic Forms and Galois Representations Vol. 1, 359–374, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 414, C.U.P 2014.

43. La completion est p-adique, les objets sous la somme directe ayant des réseaux invariants naturels.

[D4] (avec P. Colmez), Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[D5] (avec P. Colmez et V. Paškūnas), The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.

[D6] (avec P. Colmez et V. Paškūnas), Irreducible components of deformation spaces : wild 2-adic exercices, IMRN 2015 (2015), 5333–5356.

[D7] (avec A.-C. Le Bras), Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p-adique, Ann. of Math. **186** (2017), 321–411.

[D8] (avec P. Colmez et W. Nizioł), Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld : le cas de la dimension 1, J. Amer. Math. Soc. **33** (2020), 311–362.

[D9] (avec P. Colmez et W. Nizioł), Cohomology of p-adic Stein spaces, Invent. Math. 219 (2020), no. 3, 873–985.

[D10] (avec P. Colmez et W. Nizioł), Integral p-adic étale cohomology of Drinfeld symmetric spaces, Duke Math. J. 170 (2021), no. 3, 575–613.

[D11] (avec P. Colmez et W. Nizioł), Cohomologie des courbes analytiques p-adiques, soumis.

[D12] (avec V. Paškūnas et B. Schraen), Infinitesimal characters in arithmetic families, soumis.

[D13] (avec V. Paškūnas et B. Schraen), Gelfand-Kirillov dimension and the p-adic Jacquet-Langlands correspondence, soumis.

[D14] (avec P. Colmez et W. Nizioł) Factorisation de la cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld, en préparation.

Autres références

[1] K. Ardakov, S. Wadsley, On irreducible representations of compact p-adic analytic groups, Annals of Mathematics 178 (2013), 453–557.

[2] K. Ardakov, S. Wadsley, Verma modules for Iwasawa algebras are faithful, M*ü*nster Journal of Mathematics 7 (2014), 5–26.

[3] K. Ardakov, Equivariant D-modules on rigid analytic spaces, to appear in Astérisque.

[4] L. Berger, Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, Astérisque 330 (2010), 263–279.

[5] L. Berger, C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque No. 330 (2010), 155–211.

[6] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque 319 (2008), 303–337.

[7] V. Berkovich, On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces, Israel J. Math. 92 (1995), 45–60.

[8] B. Bhatt, M. Morrow,ÃĆÂăP. Scholze, Integral p-adic Hodge Theory, Publ. IHES 128 (2018), 219–397.

[9] B. Bhatt, M. Morrow,ÃĆÂăP. Scholze, Topological Hochschild homology and integral p-adic Hodge theory, Publ. IHES 129 (2019), 199–310.

[10] S. Bloch, K. Kato, p-adic étale cohomology, Publ. IHES **63** (1986), 107–152.

[11] G. Bosco, On the p-adic pro-étale cohomology of Drinfeld symmetric spaces, https ://arxiv.org/abs/2110.10683.

[12] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I, Compositio Math. 138 (2003), 165–188.

[13] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ II, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), 1–36.

[14] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. Scient. de l'E.N.S. 37 (2004), 559–610.

[15] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, Astérisque 331 (2010), 65–115.

[16] C. Breuil, M. Strauch, Sur quelques représentations p-adiques supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, non publié.

[17] K. Buzzard, T. Gee, The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations, Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.

[18] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paškūnas, S. W. Shin, Patching and the p-adic local Langlands correspondence, Cambridge J. Math. **4** (2016), 197–287.

[19] A. Caraiani, P. Scholze, On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties, Annals of Math. 186 (2017), no. 3, 649–766.

[20] H. Carayol, Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. Scient. de l'E.N.S. **19** (1986), 409–468.

[21] H. Carayol, Non-abelian Lubin-Tate theory, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, volume II*, 15–39. Academic Press, 1990.

[22] K. Česnavičius T. Koshikawa, The A_{inf}-cohomology in the semistable case, Compositio Math. 155 (2019), 2039–2128.

[23] P. Colmez, J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

[24] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010), 213–262.

[25] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010), 61–153.

[26] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[27] P. Colmez La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations* Vol.1, London Math. Soc. Lect. Note Series 415 (2014), 286–358.

[28] P. Colmez, W. Nizioł, Syntomic complexes and p-adic nearby cycles, Invent. math. **208** (2017), 1–108.

[29] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. EMS **21** (2019), 797–838.

[30] P. Colmez, W. Nizioł, On the cohomology of the affine space, p-adic Hodge Theory, 71-80, Simons symposia, Springer-Verlag 2020.

[31] P. Colmez, W. Nizioł, On p-adic comparison theorems for rigid analytic varieties I, prépublication.

[32] P. Colmez, W. Nizioł, On the cohomology of p-adic analytic spaces, I : The basic comparison theorem, prépublication.

[33] P. Colmez, W. Nizioł, On the cohomology of p-adic analytic spaces, II : The Cst-conjecture, prépublication.

[34] V. Drinfeld, Coverings of p-adic symmetric regions, Funktsional. Anal. i Prilozhen., (1976), 29–40 ; Funct. Anal. Appl., (1976), 107–115.

[35] A. Ducros, La structure des courbes analytiques, livre en préparation, version partielle disponible à `https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html`

[36] M. Emerton, p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, Duke Math. J. 130 (2005), no. 2, 353–392.

[37] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2009 !

[38] M. Emerton, V. Paškūnas, On the effaceability of certain delta-functors, Astérisque 331 (2010), 439–447.

[39] M. Emerton, Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties, Astérisque **331** (2010), 335–381.

[40] M. Emerton, Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction, Astérisque **331** (2010), 383–438.

[41] M. Emerton, Completed cohomology and the p-adic Langlands program, Proceedings of the 2014 ICM.

[42] G. Faltings, A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld, *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math. **300** (2002), 115–129.

[43] L. Fargues, L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques, 1–325, Progr. Math. **262**, Birkhäuser 2008.

[44] J.-M. Fontaine, W. Messing, p-adic periods and p-adic étale cohomology, *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207.

[45] J. M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux I, *The Grothendieck Festschrift*, Vol II, Progr. Math. 87, Birkhäuser, 1990, 240-309.

[46] P. Fust, Continuous cohomology and Ext-Groups, `arXiv:2106.04473[math.RT]` (2021).

[47] E. Grosse-Klönne, Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfeld's symmetric space, J. Algebraic Geom. **14** (2005), 391–437.

[48] E. Grosse-Klönne, Integral structures in the p-adic holomorphic discrete series, Represent. Theory 9 (2005), 354–384.

[49] E. Grosse-Klönne, Sheaves of bounded p-adic logarithmic differential forms, Ann. Sci. École Norm. Sup. 40 (2007), 351–386.

[50] E. Grosse-Klönne, On special representations of p-adic reductive groups, Duke Math. J. 163 (2014), 2179–2216.

[51] O. Hyodo, A note on p-adic étale cohomology in the semistable reduction case, Invent. Math. 91 (1988), 543–557.

[52] O. Hyodo K. Kato, Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles, Astérisque 223 (1994), 221–268.

[53] Y. Hu, Diagrammes canoniques et représentations modulo p de $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Inst. Math. Jussieu 11 (2012), 67–118.

[54] A. Iovita M. Spiess, Logarithmic differential forms on p-adic symmetric spaces, Duke Math. J. 110 (2001), 253–278.

[55] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings, J.A.M.S, Volume 21, No. 2, 2008, 513–546.

[56] M. Kisin, Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations, Astérisque 330, (2010), 529–542.

[57] J. Kohlhaase, Lubin-Tate and Drinfeld bundles, Tohoku Math. J. 63, No. 2, 2011, 217–254.

[58] A. C. Le Bras, Espaces de Banach-Colmez et faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine, Duke Math. J., Volume 167, Number 18 (2018).

[59] S. Orlik,The pro-étale cohomology of Drinfeld's upper half-space, Doc. Math. 26 (2021), 139–1421.

[60] L. Pan, First covering of the Drinfel'd upper half-plane and Banach representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **11** (2017), 405–503.

[61] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 118 (2013), pp. 1–191.

[62] V. Paškūnas, Blocks for mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Automorphic Forms and Galois Representations*, Vol. 2, London Mathematical Society Lecture Note Series vol. 415 (Cambridge University Press, Cambridge, 2014), 231-247

[63] V. Paškūnas, On some consequences of a theorem of J. Ludwig, arXiv :1804.07567 [math.NT] (2018).

[64] D. Patel, T. Schmidt, M. Strauch Locally analytic representations of $\mathrm{GL}(2, L)$ via semistable models of $\mathbf{P}^1$, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 18 (2019), no. 2, 125–187.

[65] T. Saito, Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory, Compositio Math. **145** (2009), 1081–1113.

[66] P. Schneider, U. Stuhler, The cohomology of p-adic symmetric spaces, Invent. math. **105** (1991), 47–122.

[67] P. Scholze, Perfectoid spaces–a survey, Current Developments in Mathematics, 2012.

[68] P. Scholze, p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77 pp.

[69] P. Scholze, J. Weinstein, Moduli of p-divisible groups, Cambridge J. Math. **1** (2013), 145–237.

[70] P. Scholze, On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Ann. ENS **51** (2018), 811–863.

[71] P. Schneider, J. Teitelbaum, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. 127, 359–380, 2002.

[72] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. math. vol. 153, pages 145–196 (2003).

[73] B. Schraen, Sur la présentation des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Reine Angew. Math. **704** (2015), 187–208.

[74] J. Shotton, The category of finitely presented smooth mod p representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, Doc. Math. **25** (2020), 143–157.

[75] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, Invent. math. **137** (1999), 233–411.

[76] S.-N. Tung, On the automorphy of 2-dimensional potentially semi-stable deformation rings of $G_{\mathbf{Q}_p}$, arXiv :1803.07451.

[77] S.-N. Tung, On the modularity of 2-adic potentially semi-stable deformation rings, Math. Z., https ://doi.org/10.1007/s00209-020-02588-4.

[78] M. van der Put, The class group of a one-dimensional affinoid space, Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 155–164.

[79] M.-F. Vignéras, Le foncteur de Colmez pour $\mathrm{GL}(2, F)$, *Arithmetic geometry and automorphic forms*, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 19, Int. Press, 2011, pp. 531–557.

[80] J. Weinstein, Semistable models for modular curves of arbitrary level, Invent. math. **205** (2016), 459–526.

[81] Z. Wu, A note on presentations of supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, Manuscripta Math. **165** (2021), 583–596.

[82] X. Zhu, A note on integral Satake isomorphisms, preprint 2020, arXiv :2005.13056.

22 juillet 2022

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
E-mail : `gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr`