Gabriel Dospinescu

Histoire de déformations : de Mazur à Kisin

NB il n'y a quasiment aucune dem. dans ces notes. Ce qui peut se faire vite est présenté de façon schématique (et oui, les schémas ...), pour les autres il s'agit ou bien de la blablatologie (ie vérifications purement formelles) ou bien des résultats très profonds (que je ne maîtrise absolument pas pour instant), pour lesquels on renvoie aux articles de Kisin, Wiles ou aux EGA, SGA...

I Rappels et compléments sur les déformations

On utilise sans problème les résultats exposés par Stefano, mais rappelons le setup : presque partout (et même presque surement) on se donne $\bar{\rho} : G \longrightarrow GL_N(k)$ une représentation (notée rep.) (toute rep sera C^0 dans cet exposé) où $k \supset \mathbb{F}_p$ est fini et G un groupe de Galois G_F avec F finie $/\mathbb{Q}_p$ ou ℓ (bien sûr, on peut prendre $G = G_{K,S}$, K corps nombres, S ensemble fini de places, ou tout groupe profini avec la

(*) condition de p-finitude : $\forall H \leq G$ ouvert (d'indice fini) $|\mathrm{Hom}(H, \mathbb{F}_p)| < \infty$

(ce n'est pas évident, mais ça vient du CFT - ie corps de classes en anglais - que les G_F, $G_{K,S}$ la vérifient). Vu qu'on travaille plutôt avec du $G_{\mathbb{Q}_p}$ on oubliera le cas global dans cet exposé.

Rappel on pose $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ (aussi noté CNL_Λ, $\widehat{Art}_\Lambda$ etc) = les Λ-algèbres loc qui sont des anneaux de coefficients. ($\Lambda \in \hat{\mathcal{C}}$) Ici $\hat{\mathcal{C}} = \{$ann. de coeff$\} \overset{def}{=}$ $= \{$anneaux locaux noeth. complets de corps res k - il faudrait dire munis d'un isom fixé $A/m_A \simeq k$, mais bon...$\}$ (les flèches = hom. d'anneaux locaux induisant id sur k). On note $\mathcal{C}_\Lambda$, $\mathcal{C}$ les sous-cat. pleines d'objets artiniens de $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$, $\hat{\mathcal{C}}$.

Si $A \in \hat{\mathcal{C}}$ ou $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ on peut poser $D(A) = \{$déformations de $\bar{\rho}$ à $A\} = D^\square(A) / GL_N(A)_1$ (conj.) $:= \mathrm{Ker}(GL_N(A) \longrightarrow GL_N(k))$ avec

$D^\square(A) = \{$ ~~def~~ relèvements - ie vraiment des homom $G \longrightarrow GL_N(A)\}$

Rappelons qu'un des résultats de base de la théorie est que D est pro-représentable par un objet de $\hat{\mathcal{C}}$ (ou $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$) R (ou $R_{\bar\rho}$ etc) (= anneau de déformation universelle) si $C(\bar\rho) \overset{\text{def}}{=} \{X \in M_n(k) \mid X\bar\rho(g) = \bar\rho(g)X \ \forall g\}$ est trivial (ie $= kI_n$) (Mazur le démontre pour $\bar\rho$ abs. irred, mais comme Ramakrishna l'a vu, ça marche avec cette hypothèse).

Rq 1) il est important de constater qu'une déformation de $\bar\rho$ à A peut se voir comme une classe d'isom. de $A[G]$ modules libres de rg fini sur A disons M tq $k \underset{A}{\otimes} M \underset{k[G]}{\simeq}$ ~~k~~ $\bar V$ ($\simeq \bar{k}^N$ avec action via $\bar\rho$) et $G \to \mathrm{End}_A M$ C^0.

2) le thm de Mazur reste vrai dans un cadre bcp plus général : on prend G profini, $\mathcal{O}$ ann. local noeth de corps res k (discret), V un k-ev dim $<\infty$ avec action C^0 de G tq $\mathrm{End}_{k[G]} V = k$. On prend $\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}} = \{\mathcal{O}$-alg pseudo-cp$\} = \{\mathcal{O}$-alg locales topologiques tq $A \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathfrak{a} \neq A \text{ idéaux}} A/\mathfrak{a}\}$ alg. et topologique tq $A/\mathfrak{a}$ Art.

(on n'impose pas $A/\mathfrak{m}_A = k_A = k$!)

Alors $A \longmapsto D_V(A) = \{$déform. de V à $A\}$ est représentable dans $\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}}$ tout entier par un anneau $R_{V,\mathcal{O}}$ de corps res. k. Le problème est que ce $R_{V,\mathcal{O}}$ n'a aucune raison d'être noeth ! Si c'est le cas on mq $R_{V,\mathcal{O}}$ représente D_V dans $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{O}}$ (qui, by the way, est une sous-cat pleine de $\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}}$). C'est le cas si G est topol de type fini, donc ok dans notre cas (pour des détails voir l'article de Lenstra et de Smit).

3) Il est trivial de vérifier que si D est représenté par R, D_Λ (même déf mais dans $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$) est représenté par $R \underset{W(k)}{\hat\otimes} \Lambda$ (noter que tout élément A de $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ est canoniquement une $W(k)$-algèbre de coeff ie $\exists !$ morphisme ds $\hat{\mathcal{C}}$ $W(k) \to A$). Dans la situation de 2) prenons $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ flèche locale entre ann. loc. noeth, posons $V' = V \underset{k}{\otimes} k'$, on a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}}}(R_{V,\mathcal{O}}, B) \xrightarrow[\text{can}]{\text{bij}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}'}}(R_{V',\mathcal{O}'}, B)$$

(clair !) et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}'}}(\mathcal{O}' \underset{\mathcal{O}}{\hat\otimes} A, B) \xrightarrow{\text{bij}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}}}(A, B)$

(3) Encore faut-il voir que $O' \hat{\otimes}_{O} A = \varprojlim_{n \geq 1} O'/(m')^n \otimes_{O} A/\mathfrak{a} \in \mathcal{C}^*_{O'}$; excellente référence : livre de Conrad sur les groupes p-divisibles). En tout :

$$R_{V', O'} = O' \hat{\otimes}_{O} R_{V, O}.$$

4) Il y a tout un tas de tels machins fonctoriels, pour lesquels je renvoie à l'article de Mazur

$\angle$ $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ n'a pas toujours de produits fibrés à cause de problèmes de noeth. Mais on voit que si $A \to C \leftarrow B$ dans $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda \Rightarrow A \times_C B \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda$.

Rq on peut refaire le jeu dans une situation relative. Il n'y a rien de nouveau et c'est déjà assez pédant pour l'instant. la déf. évidente

② Rappels(?) sur l'espace tangent d'un foncteur

NB pour l'instant ce bazar a l'air très formel (car ça l'est), mais on utilisera toutes ces observations dans la suite, pour donner une idée d'un calcul explicite dû à Ramakrishna (avec les excuses évidentes, je vais le noter Ram dans la suite).

Rq j'ai oublié de définir ce qu'on entend par situation relative : on prend $A \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ et on ne considère que des déformations d'un relèvement $\rho : G \to GL_N(A)$ aux $B \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ munis d'une A-augmentation ie une flèche dans $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ $B \to A$. La notion de déformation est évidente, on a encore un foncteur $D_\Lambda(A) = D$.

donc artiniens !

Retour prenons $D : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathrm{Ens}$ un foncteur avec $|D(k)| = 1$ (pour notre cher D c'est clair) et tq $D(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) \xrightarrow{h} D(k[\varepsilon]) \times D(k[\varepsilon])$ soit bijective.

Via h^{-1} on voit comment faire de $D(k[\varepsilon]) \overset{\text{def}}{=} t_D$ un k-ev (via des flèches $\begin{array}{c} k[\varepsilon] \to k[\varepsilon] \\ x + y\varepsilon \mapsto x + \alpha y \varepsilon \end{array}$, $\begin{array}{c} k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \to k[\varepsilon] \\ (x + y\varepsilon, x + z\varepsilon) \mapsto x + (y+z)\varepsilon \end{array}$). Tout ceci marche en relatif (remplacer k par A ...). Ça paraît débile, mais ce truc jouera un rôle crucial dans la théorie ! Par exemple, imposer $\dim_k t_D < \infty$ revient à imposer la noeth de l'anneau R qui devrait le (pro) représenter !

Je ne rappelle par contre pas le critère de Schlessinger, voir les notes de Stefano. Le point crucial est que les foncteurs $D, D_\Lambda, D_\Lambda(A)$ de Mazur satisfont les H_1, H_2, H_3 du critère ce qui fait qu'on a toujours (sous supposer $C(\bar{\rho}) = k$) une enveloppe : $\exists\ R \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ et $\rho_{vers} : G \longrightarrow GL_N(R)$ tq $\forall A \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda\ \forall \rho \in D(A)\ \exists$ (pas unique !) $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}_\Lambda}(R, A)$ avec $\rho \simeq G \xrightarrow[\rho_{vers}]{} GL_N(R) \xrightarrow[\varepsilon]{} GL_d(A)$ et $D(k[\varepsilon]) = t_D \underset{k\text{-ev}}{\simeq} \mathrm{Hom}_\Lambda(m_R/m_R^2, k)$

Espace tangent et $\mathrm{Hom}_k(m/(m^2, m_\Lambda), k)$. On vérifie trivialement que si $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ alors

$$t_A \simeq \mathrm{Hom}_{\substack{\Lambda\text{-alg} \\ \text{de coeff}}}(A, k[\varepsilon]) \simeq \mathrm{Hom}_k(m_A/(m_A^2, m_\Lambda), k)$$

(si ça vous rappelle des $k[\varepsilon]$ points d'un schéma et des vecteurs tangents, continuez, vous êtes sur la bonne voie !)

Mais s'il y a vraiment un truc sympa sur ce t_D, c'est l'interprétation cohomologique ; c'est d'ailleurs ceci qui permet de montrer que $\dim_k t_D < \infty$ et donc que $R_{\bar{\rho}}$ est bien noethérien. Voyons ...

Espace tangent et cohomologie → tous les H^i sont H^i_{cont}

Théorème crucial : On a des isom. canoniques

$$t_{D_\rho(A)} \underset{A\text{-mod}}{\simeq} H^1(G, ad\,\rho) \simeq \mathrm{Ext}_{A[G]}(V, V)$$

ds $A[G]$-mod profinis + act C^0 de G.

Ici : 1) $A \in \hat{\mathcal{C}}$ (ou $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ ...)

2) $\rho : G \longrightarrow GL_N(A)$ est un relev. de $\bar{\rho}$

3) $ad\,\rho = \mathrm{End}\,V$ avec action de G par conjugaison (via ρ) et $V = A^N$ avec action de G via ρ.

Idée c'est très simple, en fait, faisons le cas non relatif (ie sous A ; c'est pareil avec A ...). Le point est que si ρ_0 est une déformation (oui, bon, un représentant dans la classe ...) à $k[\varepsilon]$, alors

$$\rho_0(g) = \cancel{\rho(g)}\ (I_N + c_g\,\varepsilon)\,\bar{\rho}(g) \text{ pour un } c_g \in M_N(k)$$

et dire que ρ_0 est un hom $\Leftrightarrow c_g$ 1-cocycle pour l'action adjointe

Donc, même en relatif on a

$$\{\text{relev } \rho' \text{ de } \rho\} \xleftrightarrow{\text{bij}} Z^1(G, ad\,\rho) \text{ et on vérifie}$$

que 2 relev sont équiv (ie ds la même déform) ssi les cocycles associés sont cohomologues.

(5) L'autre point est aussi formel : si ρ relev. à $k[\varepsilon]$ prendre $M = k[\varepsilon]^n$ avec action via ρ et bien contempler

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \varepsilon M \longrightarrow M \longrightarrow M/\varepsilon M \longrightarrow 0 \\ \simeq V_{\bar\rho} \text{ comme } G\text{-modules.} \end{array}$$

Dans l'autre sens c'est idiot : V

si $0 \longrightarrow V_{\bar\rho} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} V_{\bar\rho} \longrightarrow 0$ prendre pour structure de $k[\varepsilon]$ module celle où ε agit via $M \xrightarrow{\beta} V_{\bar\rho} \xrightarrow{\alpha} M$.

Cor Si $A \in Art_\Lambda = \mathcal{C}_\Lambda$, $t_\rho \overset{t_{D_{\bar\rho}}(A)}{=}$ est un A-module fini.

Vu que A est discret, $\exists\ H \leq G$ d'indice fini et $\subset \ker \rho$. la suite de restriction-inflation et la condition de p-finitude (elle était faite pour !) permettent de conclure.

Rq 1) avec plus de boulot on mq si $A \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda$, t_ρ est de type fini sur A. Voir Mazur.

2) j'ai mélangé un peu le cas relatif et non relatif (ie sans Λ). Le point est que tout est formel, donc ça ne change rien au bout du compte (et je n'ai pas envie de recommencer à écrire ces trucs ...)

Cor Soit $d_1 = \dim H^1(G, ad\,\bar\rho) \overset{not}{=} h^1(G, ad\,\bar\rho)\ (= h^1)$. Alors $R_{\bar\rho,\Lambda}$ est un quotient de $\Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]]$ (si on ne veut pas de Λ, on prend celui canonique $W(k)$).

Le point est que si on prend $a_1, \dots, a_{d_1}$ une base de $m_R/(m_R^2, m_\Lambda)$ comme $k = \Lambda/m_\Lambda$ espace vect (ça a un sens de dire ça, par ce qu'on a fait !) alors on a une flèche évidente $\Lambda[[X_1, \dots, X_{d_1}]] \longrightarrow R = R_{\bar\rho,\Lambda}$ et par
$$X_i \longmapsto a_i$$
déf elle induit un isom sur les esp. tg. Or on a le joli (et utile !)

Lemme $\varphi : A \longrightarrow B$ hom. de Λ-alg de coeffs surjectif sur les esp tg $\Rightarrow$ surj tout court.

C'est facile ! mais noter qu'on utilise vraiment qu'ils sont locaux noeth complets !

Vers H^2, obstructions Le théorème de base, cette fois pas trivial est

Thm (Mazur) On se donne as usual $C(\bar\rho) = k$, $R = R_{\bar\rho}$, $d_i = \dim_k H^i(G, ad\,\bar\rho)$. Alors $\dim_{Krull} R/m_\Lambda R \geq d_1 - d_2$.

De plus, si $d_2 = 0$, on a égalité et $R \simeq \Lambda[[X_1 \longrightarrow X_{d_1}]]$. (6)

On renvoie à l'article de Mazur pour la preuve, expliquons juste pourquoi on a du H^2. Donnons-nous $\rho_0 : G \longrightarrow GL_n(A)$ et $B \twoheadrightarrow A$ (dans $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$) dont le Ker I est tué par m_B (donc un k-ev). On veut relever ρ_0 à B. On prend un relèvement $\tilde{\rho}_1 : G \longrightarrow GL_n(B)$ ENSEMBLISTE et on pose $c(g,h) = \tilde{\rho}_1(gh)\tilde{\rho}_1(h)^{-1}\tilde{\rho}_1(g)^{-1}$. Comme $\tilde{\rho}_1$ mod I $= \rho_0$, on a bien $c(g,h) = 1 + c_1(g,h)$ avec $c_1(g,h) \in M_n(I)$ et $c_1(g,h)$ est un élément de $Z^2(G, Ad\bar{\rho} \otimes_k I)$. Changer $\tilde{\rho}_1 \Leftrightarrow$ changer c par un cobord $\Rightarrow$ on a une obstruction à relever ρ_0 à B vivant dans $H^2(G, ad\bar{\rho}) \otimes_k I$ et elle est 0 ssi on a un relev à B.

Rq 1) pour les courageux, Mazur conjecture que si $\bar{\rho}$ est abs. irred, on a $\dim R/m_\Lambda R = d_1 - d_2$. Si vous voulez démontrer ceci, penser d'abord à démontrer la conjecture de Leopold, ceci est bien plus fort...

2) le 2ème point du thm est très important. On verra qu'il permet de calculer explicitement $R_{\bar{\rho}}$ dans certains cas (pas beaucoup...). Ça peut aussi s'énoncer d'une façon savante : $D_{\bar{\rho}}$ est un foncteur formellement lisse ssi $H^2(G, ad\,\bar{\rho}) = 0$ et alors $R \simeq W(k)[[X_1 \longrightarrow X_{\dim H^1(G, ad\bar{\rho})}]]$

3) si $\Lambda = W(k)$, le théorème affirme que $\dim R/pR \geq d_1 - d_2$.

II Fin de la blablalogie : quelques calculs

1) Un exemple venu du cours de Serre. Prenons $G \xrightarrow{\bar{\rho}} GL_N(k)$ l'inclusion d'un sous-groupe fini de $GL_N(k)$ avec $(|G|, p) = 1$. Alors $H^2(G, ad\,\bar{\rho})$ est tué par $|G|$ (fait général) et par p, donc est nul et donc on n'a pas d'obstruction. On vérifie qu'on a une seule déformation à $W(k)$, donc $R_{\bar{\rho}} = W(k)$

2) le cas de SL_N. Soit $\bar{\rho} : SL_N(k) \xrightarrow{\text{incl}} GL_N(k)$. Voir l'article de Mazur (celui ds Galois groups over $\mathbb{Q}$) pour le fait que $\begin{cases} R = k & \text{si } |k| \geq 7. \\ R = \mathbb{Z}_5[\sqrt{5}] & \text{si } k = \mathbb{F}_5 \end{cases}$

3) Un exemple difficile

Thm (Mazur) Soit p un nombre premier de la forme $27 + 4a^3$, $a \in \mathbb{Z}$. Soit $K_1 = \mathbb{Q}(x)$ avec $x^3 + ax + 1 = 0$ et $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q},\{p,\infty\}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$ obtenue via $G_{\mathbb{Q},\{p,\infty\}} \twoheadrightarrow Gal(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$ (L clôture normale de $K_1/\mathbb{Q}$). Si $R = R_{\bar{\rho}}$, alors $R = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2, T_3]]$

(7) Pour une preuve voir les sections 1.12 et 1.13 de loc-cit, il serait difficile de donner la preuve de ceci à mon niveau : ça passe par la cohomologie étale et des estimations subtiles du nombre de classes de L. Il est possible que Boston ait une preuve plus simple.

4) Un exemple fondamental Prenons G profini et observons que toute déformation d'un caractère $\bar{\rho} : G \to k^\times$ est (la classe d') un caractère $\rho : G \to A^\times$, donc ça se factorise par l'abélianisé (topologique !) G^{ab}. Donc pour étudier $R_{\bar\rho}$ on peut supposer (ça sera noté ds. la suite WLOG) G abélien. Les chinois nous assurent alors que $G = G^{pro-p} \times G_{sous\,p}$ pour des groupes profinis G^{pro-p}, $G_{sous\,p}$. Par Hensel, si $A \in \hat{\mathcal{C}}$ et $q = |k|$, on a $A^\times = \mu_{q-1}(A) \times \underbrace{(1+m_A)}_{pro-p}$, donc $\bar\rho$ se relève uniquement en un caractère (Teichmuller) $\tilde{\rho} : G \to A^\times$. Si maintenant $\rho : G \to A^\times$ est un caractère, $\rho(G_{sous\,p}) \subset \mu_{q-1}(A)$ (car $x \mapsto x^q$ est bijectif) - Avec ces préparations, on a :

Prop Soit $\bar\rho : G \to k^\times$ un caractère, $\rho_0 : G \to \Lambda^\times$ un relèvement comme avant ($\Lambda \in \hat{\mathcal{C}}$ fixé). Soit $\Gamma = \Big(\varprojlim_{\substack{H \leq G \\ \text{ouv, } G/H \text{ p-groupe}}} G/H\Big)^{ab}$ et $\Lambda[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa

Alors $R_{\bar\rho} = \Lambda[[\Gamma]]$ et

$$\rho^{univ}(x) = \rho_0(x) \cdot \underbrace{\gamma(x)}_{\text{vu dans } \Lambda[[\Gamma]]} \qquad (\text{ici } \gamma : G \xrightarrow{proj} \Gamma).$$

Maintenant tout est clair : si $\rho : G \to A^\times$ relèvement, $\rho_0^{-1}\rho : G \to \underbrace{1+m_A}_{pro-p}$ se factorise par $\gamma : G \twoheadrightarrow \Gamma$, d'où une flèche $\Gamma \to 1+m_A$, qui se prolonge en $\Lambda[[\Gamma]] \to A$. Le reste est formel. Remarquer quand même qu'on utilise de façon cruciale que G vérifie la condition de p-finitude qui peut aussi s'écrire : Γ est un $\mathbb{Z}_p$ module de type fini (ce n'est pas évident, mais c'est vrai), ce qui assure que $\Lambda[[\Gamma]]$ sera un quotient d'un $\Lambda[[X_1, \ldots, X_r]]$ (car $\Lambda[[\mathbb{Z}_p^m]] = \mathcal{O}[[T_1, \ldots, T_n]]$).

Cor Soit $\bar\rho : G \to GL_N(k)$. On a un morphisme évident de foncteurs

$$D_{\bar\rho} \longrightarrow D_{\det\bar\rho}$$

ce qui fait que si tout est représentable, $R_{\bar\rho}$ est naturellement une $\Lambda[[\Gamma]]$ algèbre.

5) Finally, un exemple à la Ramakrishna Faisons un (long ?) détour sur les déformations plates, car elles jouent un rôle très important dans la théorie.

Donnons nous R un DVR complet (hensélien local suffit) avec $K = \mathrm{Frac}\, R$ (8)
de car 0 et car $k_K = p$. Une représentation ρ de G_K sur un <u>p-groupe abélien fini</u> V est dite <u>R-plate</u> si en tant que G_K rep elle est $\simeq \mathcal{G}(\overline{K})$ avec l'action usuelle pour $\underset{\downarrow}{\mathcal{G}}$ un <u>schéma en groupes fini plat</u>. Vu l'équivalence de cat entre

Spec R — tous les sch en gr considérés seront supposés <u>commutatifs</u> !

sch en gr étales et modules discrets avec action de Gal, cela $\Leftrightarrow$ le K-sch. en groupes fini associé à ρ est la fibre générique (noté f. gen) d'un R-sch. en groupes fini plat (noté R-sch gr fp ; à ne pas confondre avec le fp de fidèlement plat !)

C'est une condition très forte, qui se voit déjà au niveau des caractères. Mais cela est loin d'être évident et on utilisera comme black box les théorèmes fondamentaux suivants :

<u>Thm 1</u> (Raynaud) Soit F_R le foncteur

$$\{R\text{-sch gr fp d'ordre une puiss de } p\} \xrightarrow{F_R} \{G_K\text{-rep plates}\}$$
$$\mathcal{G} \longmapsto \mathcal{G}(\overline{K})$$

Alors : 1) son image essentielle est stable par sous-truc, quotient, somme directes finies

2) Si $e(R) < p-1$, ça induit une équivalence de cat. abéliennes (avec ker et indice de ramif — quotient usuel à gauche)

<u>Thm 2</u> (Raynaud) Soit k corps fini de car. p, $\chi : I_p \longrightarrow k^\times$ caractère (tout est continu, rappelons-le !) et $V = k$ avec action par χ. Alors V est $\mathbb{Z}_p^{nr}$-plate ssi $\chi = \omega_n^{e_0 + \dots + e_{n-1} p^{n-1}}$ avec des $0 \leq e_i \leq 1$, $|k| = p^n$ et ω_n caractère fondamental de niveau n : $I_p \longrightarrow I_p^t \longrightarrow F_{p^n}^\times$ (donc $\omega_n(g) = \dfrac{g(\sqrt[p^n-1]{\pi})}{\sqrt[p^n-1]{\pi}}$ $\forall\, v_p(\pi) = 1$)

$=$ inertie$(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$; $t \to$ tame inertia ; $I_p^t \simeq \varprojlim_{\text{normes}} F_{p^n}^\times$

<u>Cor</u> $\mu_y : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow F_p^\times$ car. <u>nr</u>, $\omega = \chi_{cyc} \bmod p$, alors $\omega^r \chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to F_p^\times$ est plate ssi $i \equiv 0, 1 \bmod p-1$.

<u>Down-to-earth</u> : On prend maintenant $q = p^r$, $G = G_{\mathbb{Q}_p}$ et $\overline{\rho} : G \longrightarrow GL_2(F_q)$ <u>irréductible plate</u> tq $\det \overline{\rho}|_{I} = \chi$ ($= \chi_{cyc}$). On prend <u>partout</u> $p > 2$.

($I = I_p$)

<u>Thm</u> (Ramakrishna) Dans ces conditions

$$R(\overline{\rho}) \cong W(\mathbb{F}_q)[[T_1, \dots, T_5]].$$

C'est assez délicat, mais très beau. Commençons par <u>le cas où r est pair</u> (ie $F_q \supset F_{p^2}$). On rappelle alors que :

(9) <u>Thm (Serre)</u> Si $\mathbb{F}_q \supset \mathbb{F}_{p^2}$ et $\bar\rho$ est comme avant, $\bar\rho|_I = \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_2^p \end{pmatrix}$ et $C(\bar\rho) = \mathbb{F}_q$

Pour les détails voir l'article de Serre (Propr. gal. de points de torsion de c. ell et Sur les repr modulaires de $G_{\mathbb{Q}}$), donnons juste l'idée : vu que I^w (wild-inertia) est pro-p et $V (= V_{\bar\rho})$ irréductible, $V = V^{I^w}$ $\Rightarrow$ l'action se factorise par I^t. D'après Serre on sait alors qu'elle est semisimple et donnée par 2 caractères fondamentaux de même niveau (car $\det \bar\rho|_I = \chi$) (voir aussi le cours de Breuil)
Pour conclure, éliminons le cas de niveau 1. Or si $\bar\rho|_I = \begin{pmatrix} \chi^a & 0 \\ 0 & \chi^b \end{pmatrix}$ avec $0 \le a \le b \le p-2$, par Raynaud χ^a, χ^b sont plats et $a=0$, $b=1$, mais alors $\operatorname{Im} \bar\rho|_I$ est abelienne et alors CFT (corps de classes en anglais...) permet de mq $\operatorname{Im}\bar\rho \subset \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, faux car $\bar\rho$ irréductible. On procède de la même manière en niveau 2.

<u>Point clé</u> : pour un tel $\bar\rho$ on a $H^2(G, \operatorname{ad}\bar\rho) = 0$.

<u>Rappel</u> par dualité locale de Tate, si K corps local et M un G_K module fini discret
$H^i(G_K, M)$ est fini et $H^i(G_K, M) \times H^{2-i}(G_K, M^*) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est une dualité parfaite

$$M^* = \operatorname{Hom}_{gr}(M, \mu(K^*))$$

Pareil, si $F / \mathbb{Q}_p$ finie, V une F-rep de G_K (K local), $H^i(K,V) \times H^{2-i}(K, V^*) \longrightarrow H^2(K, F(1)) \simeq F$ est parfaite.

$$V^* = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_F}(V, F(1))$$

Dem du point clé : par le rappel il suffit de voir que si $l : \operatorname{ad}\bar\rho \longrightarrow \mathbb{F}_p$ (G via car cycl)
et $l(gA) = g\,l(A)$ $\forall A \in \operatorname{ad}\bar\rho \Rightarrow l = 0$. Or $l(gA) = g.l(A) \Rightarrow \bar\rho(g) A \bar\rho(g)^{-1} - (\det\bar\rho(g)) A \in \operatorname{Ker} l$ si $g \in I$. Il reste à voir qu'il existe g tel que la flèche $A \mapsto \bar\rho(g) A \bar\rho(g)^{-1} - (\det \bar\rho(g)) A$ soit surjective, mais ceci est facile (car $A \mapsto XA - AY$ est bijective ssi les pol car de X et Y sont premiers entre eux)!

<u>Rappel</u> Toujours grâce à Tate on sait que ~~si E est une ext finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p$, V une E-rep de G_K, alors $\dim_E H^0(G_K,V) - \dim_E H^1(G_K,V)$ +~~ si V ~~dim~~ est une $\mathbb{Z}_p$-rep finie de G_K, on a

$$(*) \quad \chi(V) = \prod_{i=0}^{2} |H^i(G_K, V)|^{(-1)^i} = |V|^{-[K:\mathbb{Q}_p]}.$$

<u>Claim</u> $\dim_k H^1(G, \operatorname{ad}\bar\rho) = 5$. (noter qu'une fois ayant fait ceci, on aura fini le cas n pair par les résultats de la section rappels et compléments !)

Mais ceci est maintenant clair par le point clé, le $(*)$ et le fait que $H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, \operatorname{ad}\bar\rho) = (\operatorname{ad}\bar\rho)^G = C(\bar\rho) = \mathbb{F}_q$.

Cas r impair c'est plus subtile ! D'un coté on vérifie que si $i : \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^2}$ ($\supset \mathbb{F}_{p^2}$!), alors $\tilde{\rho} : G \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{i} GL_2(\mathbb{F}_{q^2})$ reste plate (trivial par thm Raynaud), a $\det \tilde{\rho}|_I = \chi$ (clair) et reste irréductible. Le dernier truc est délicat voir l'article de Ramakrishna (On a variation of Mazur's functor) (enfin, ça utilise toujours les résultats de Raynaud pour pouvoir dire que si $\tilde{\rho}$ réductible forcément $\tilde{\rho}|_I = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ avec $\chi_1 \neq \chi_2$ des produits de caractères fondam différents de niveau r). Une fois ceci établi on obtient $C(\tilde{\rho}) = \mathbb{F}_{q^2}$, donc $C(\bar{\rho}) = \mathbb{F}_q$.

Il reste à voir que $H^2(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}) = 0$, ce qui se réduit à $\dim_{\mathbb{F}_q} H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}) = 5$ (toujours formule de Tate (*)) et il suffit donc de vérifier que

$$H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2} \hookrightarrow H^1(G, \mathrm{ad}\,\tilde{\rho})$$

En terme d'espace tangents cela <=> si une déformation ρ de $\bar{\rho}$ à $\mathbb{F}_q[\varepsilon]$ devient triviale vue comme déformation de $\tilde{\rho}$ à $\mathbb{F}_{q^2}[\varepsilon]$, elle était déjà triviale. C'est de l'algèbre linéaire élémentaire après !

Ce dernier exemple illustre bien le thm de Mazur disant que l'anneau universel a tendance d'être gros. Le but de la section suivante est de formaliser la notion de "déformation avec des conditions" et de voir qu'en rajoutant des conditions on peut largement diminuer l'espace de déformations.

III Blablalogie (épisode 2) : déformations avec des conditions

Je ne vais donner aucune démo ici car (presque) tout est assez formel et facile. Voir l'article de Mazur (dans Fermat's last thm) pour les détails, ainsi que celui de deSmit & Lenstra (même livre).

L'approche de Mazur : il faut imposer bien sûr des conditions fonctorielles.

Posons, pour $f : A \longrightarrow B$ morphisme de $\mathcal{C}_\Lambda = \underline{\mathrm{Art}_\Lambda}$ et pour $\rho : G \longrightarrow GL_n(A)$

$f_* \rho = G \to GL_N(A) \to GL_N(B)$. En terme de modules avec action de G ça revient of course à faire $V \longmapsto V \otimes_A B$.

Une condition de déformation $\mathcal{D}$ sur les déf. de $\bar{\rho}$ = une propriété $\mathcal{D}$ satisfaite par des rep. de G sur des éléments de Art_Λ telle que 1) $\bar{\rho}$ a $\mathcal{D}$

2) si $\rho : G \longrightarrow GL_N(A)$ déf de $\bar{\rho}$ et $f : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}_\Lambda$ => si ρ a $\mathcal{D}$, $f_*\rho$ aussi

3) si
$$\begin{tikzcd} & A \times_C B \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$
diagramme cartésien dans Art_Λ et si $\rho : G \to GL_N(A \times_C B)$ déf de $\bar{\rho}$, alors ρ a $\mathcal{D}$ ssi $p_{1*}\rho$ et $p_{2*}\rho$ l'ont

(11) 4) (on peut montrer que ça découle de 2 et 3) Si $f : A \to B$ injective dans Art_Λ et si $\rho : G \to GL_n(A)$ déf de $\bar\rho$, alors $f_* \rho$ a $\mathcal{D} \Rightarrow \rho$ a $\mathcal{D}$.

On a alors un foncteur $D_{\mathcal{D},\bar\rho} : \mathrm{Art}_\Lambda \longrightarrow \mathrm{Ens}$

$A \longmapsto \{$déformations de $\bar\rho$ à A avec $\mathcal{D}\}$

qu'on prolonge à $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ en disant qu'une déf. ρ de $\bar\rho$ à $A \in \hat{\mathcal{C}}_\Lambda$ a $\mathcal{D}$ ssi $\rho \bmod m_A^k$ l'a $\forall k \geq 1$.

Rq dans loc cit Mazur travaille avec des sous-cat pleines et pas avec de formalisme, mais on se rend compte vite que c'est la même chose.

Def un sous-foncteur F d'un foncteur $G : \mathcal{C}_\Lambda \longrightarrow$ ens est dit relativement représentable si

$\mathcal{C}_\Lambda = \mathrm{Art}_\Lambda$

$$\begin{tikzcd} F(A \times_C B) \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, hook] & F(A) \times_{F(C)} F(B) \arrow[d, hook] \\ G(A \times_C B) \arrow[r, "\mathrm{can}"] & G(A) \times_{G(C)} G(B) \end{tikzcd}$$

est cartésien $\forall$ $A \to C \leftarrow B$ dans $\mathcal{C}_\Lambda$.

Le point est que dans ce cas $\forall$ H = une condition de Schlessinger, si G la vérifie, F aussi. Après abstract nonsense ceci vient du point suivant:

lemme utile : Si $\varphi : A \to B$ dans $\hat{\mathcal{C}}_\Lambda$, alors φ est surjectif ssi la flèche induite sur les foncteurs des points fait de ces foncteurs une "inclusion de foncteurs".

Ceci utilise l'autre lemme utile disant que φ surj $\Leftrightarrow$ il l'est sur les espaces tangents $\Leftrightarrow$ il est injectif sur leurs duaux (car ils ont dim $< \infty$ vu que A, B sont noeth) $\Leftrightarrow$ $h_B(k[\varepsilon]) \longrightarrow h_A(k[\varepsilon])$ injective.

On obtient ainsi le

Très utile résultat si $\mathcal{D}$ est une condition de déformation, $D_{\mathcal{D},\bar\rho}$ est relativement représentable. Donc si $C(\bar\rho)$ = trivial, $D_{\mathcal{D},\bar\rho}$ est pro-représentable par un quotient de $R_{\bar\rho}$.

L'approche de Lenstra - de Smit C'est en gros la même chose, mais ils se placent dans la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^*$ des anneaux pseudo-cp. (qu'on a déjà vu au début de l'exposé - ou pas ...) On se donne donc $\mathcal{O}$ local noeth corps res k et $V \in \mathrm{Rep}_k\, G$ avec $\mathrm{End}_{k[G]} V = k$, $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^*$. On considère le foncteur

$$D_{\mathcal{D},V} : \mathcal{C}^*_{\mathcal{O}} \longrightarrow \text{Ens}$$
$$A \longmapsto D_{\mathcal{D},V}(A) \subset D_V(A) \text{ (un certain sous-ens)}$$

Thm (Ramakrishna - de Smit) $D_{\mathcal{D},V}$ est un foncteur représenté par $R_V/_I$ pour un idéal fermé I de R_V (qui existe car $\mathrm{End}_{k[G]} V = k$)

ssi 1) $\rho \in D_{\mathcal{D},V}(A)$ ssi $\rho/a \in D_{\mathcal{D},V}(A/a)$ $\forall$ a idéal ouvert de A.

2) si a, b idéaux ouverts de A et $\begin{cases} \rho/a \in D_{\mathcal{D},V}(A/a) \\ \rho/b \in D_{\mathcal{D},V}(A/b) \end{cases}$ $\Rightarrow \rho/_{a\cap b} \in D_{\mathcal{D},V}(A/_{a\cap b})$

3) $A \longrightarrow B$ inclusion d'anneaux artiniens dans $\mathcal{C}^*_{\mathcal{O}}$, alors $\rho \in D_{\mathcal{D},V}(A) \Leftrightarrow \rho \otimes_A B \in D_{\mathcal{D},V}(B)$.

De plus, si $D_{\mathcal{D}',V'}(B) = D_{\mathcal{D},V}(B)$ $\forall B \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{O}'}$ ($\mathcal{O}'$ $\mathcal{O}$-algèbre locale noeth)

alors $D_{\mathcal{D}',V'}$ est repr par $\mathcal{O}' \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} R_V/I \simeq R_{\mathcal{O}',V'}/\overline{\text{image de } I}$.

Quelques exemples

1) Déterminant fixé on se donne $\delta : G \longrightarrow \Lambda^\times$ caractère (C^0) et on pose pour $A \in \mathcal{C}_\Lambda = \mathrm{Art}_\Lambda$, $\delta_A = G \xrightarrow{\delta} \Lambda^\times \longrightarrow A^\times$. On dit que $[\rho] \in D_{\bar{\rho}}(A)$ a det δ si $\det \rho = \delta_A$. c'est un jeu trivial de vérifier les conditions précédentes ce qui fait que si $C(\bar{\rho}) = k$, $R_{\det=\delta}$ sera un quotient de $R_{\bar{\rho}}$.

Rq un peu subtile si $\mathcal{D}$ est une condition, on peut lui associer le sous-espace de $H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$ correspondant à $D_{\mathcal{D},\bar{\rho}}(k[\varepsilon])$ via l'identification $D_{\bar{\rho}}(k[\varepsilon]) \simeq H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$. Il faut bien comprendre que c'est un des objets les plus importants mais aussi les plus subtils de cette affaire !

Par exemple, on vérifie que si $p \nmid N$ (= degré de $\bar{\rho}$) on a $D_{\det=\delta}(k[\varepsilon])$ $= H^1(G, \underbrace{\mathrm{ad}^0 \bar{\rho}}_{\text{matrices de trace } 0}) \subset H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$, mais si $p \mid N$, $H^1(G, \mathrm{ad}^0 \bar{\rho})$ n'est plus un sous-espace de $H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$. Tout ce qui reste vrai est que

$$D_{\det=\delta}(k[\varepsilon]) = \mathrm{Im}\,(H^1(G, \mathrm{ad}^0 \bar{\rho}) \longrightarrow H^1(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}))$$

Si $N=2$, ce n'est pourtant pas très grave : il suffit d'exclure $p = 2$.

2) Déformations ordinaires Soit $\bar{\rho} : G_p = G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL_2(\underset{\text{fini car } p}{k})$, $I = I_p$

et supposons que $\bar{\rho} \sim \begin{pmatrix} \bar{x}_1(\rho) & * \\ 0 & \bar{x}_2(\rho) \end{pmatrix}$ avec $\bar{x}_1$ caractère nr. (on dit que $\bar{\rho}$ est $\bar{x}_2$ car ramifié.

(13) ordinaire ramifiée. Une déformation ρ d'un tel $\bar\rho$ à un $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ est dite ordinaire si elle est $\simeq \begin{pmatrix} \chi_1(\rho) & * \\ 0 & \chi_2(\rho) \end{pmatrix}$ avec $\chi_i : G_p \longrightarrow A^\times$ et χ_1 nr. On peut vérifier, mais ce n'est plus facile (voir l'article de Mazur) que c'est une condition de déformation. Le point est que cette condition équivaut à :

1) $V^I \underset{A\text{-mod}}{\simeq} A$, $V^I \underset{\text{can}}{\longrightarrow} (V \otimes_A k)^I$ surjective et I n'agit pas triv sur $V \otimes_A k / (V \otimes_A k)^I$. $\Longleftrightarrow$

2) $\exists$ filtration I-stable $0 \to V^I \to V \to W \to 0$ en A modules qui splite (comme A-modules encore) libres rg 1 sur A

tq $W \otimes_A k$ n'est pas la repr triviale.

Rq ceci est la déf. de Mazur, mais il faut faire gaffe car chacun a sa propre définition de rep ordinaire (un peu comme les $\tilde{A}^+$, $W(R)$ ...)

<u>Conditions de Ramakrishna, (encore des) déformations plates</u>

Soit $\mathcal{D}$ une propriété des $W(k)[G]$ modules <u>finis</u> tq $\mathcal{D}$ est stable par somme directe finie, sous-truc, quotient et tq $\bar\rho$ a $\mathcal{D}$. Comme d'hab, on a

$$D_{\mathcal{D},\bar\rho} : \mathrm{Art}_{W(k)} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

ça a un sens car $|A| < \infty$

$$A \longmapsto \{ [\rho] \in D_{\bar\rho}(A) \mid \rho \text{ vu comme } W(k)[G] \text{ module a } \mathcal{D} \}$$

Il est facile de voir que c'est bien un foncteur et qu'il vérifie ce qu'il faut pour que ça soit une condition de déf. (tout ceci peut très bien se faire à la main, comme le fait d'ailleurs Ramakrishna !)

En particulier si $\bar\rho$ a $\mathcal{D}$ et $c(\bar\rho) = k$, on a des anneaux universels $R_{\bar\rho}$, $R_{\mathcal{D},\bar\rho}$ et une surjection $R_{\bar\rho} \twoheadrightarrow R_{\bar\rho,\mathcal{D}}$. comme plat dans la langue de Shakespeare

<u>Exemple crucial</u> prenons $D^{fl}(A) = \{ [\rho] \in D_{\bar\rho}(A) \mid V_\rho$ soit la fibre générique d'un $\mathcal{O}_K$ sch gr fp $\}$ si A artinien, ce qui fait qu'on le prolonge à

= déf. plates au sens du début de l'exposé

A^N avec action par ρ

Ici $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ de corps résiduel k et $\bar\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL_N(k)$ <u>plate</u> (au sens du début de l'exposé)

$$D^{fl} : \hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{O}_K} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$A \longmapsto \left\{ \begin{matrix} [\rho] \in D_{\bar\rho}(A) \mid \rho \bmod m_A^n \text{ vu} \\ \text{comme } G_{\mathbb{Q}_p} \text{ module } \underline{\text{fini}} \text{ est plat} \end{matrix} \right\}$$

$\forall n \geq 1$

les théorèmes de Raynaud (et c'est en fait la partie "triviale" de ces thm) assurent les stabilités voulues qui font que ceci est une "condition à la Ramakrishna".

Down-to-earth : un exemple très terre-à-terre : on prend $E/\mathbb{Q}_p$ de bonne réduction (courbe elliptique) et $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{E,p} : G = G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Aut}\, T_p E(\bar{\mathbb{Q}}_p) \xrightarrow{red} GL_2(\mathbb{F}_p)$. Si on prend $A = \mathbb{Z}_p$, $K = \mathbb{Q}_p$, $\rho = G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_p)$ (celle d'avant) est une telle déformation plate, car $\rho \bmod m_A^n = \rho \bmod p^n = G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow E[p^n](\bar{\mathbb{Q}}_p)$ (noter quand même qu'il reste à vérifier que ceci est bien la fibre générique d'un $\mathbb{Z}_p$-sch gr fp ; pour cela prendre le modèle de Néron $\mathcal{N}/\mathbb{Z}_p$, qui est un schéma abélien de dim. relative 1 sur $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_p$ et utiliser que pour un tel schéma abélien la multiplication par n est bien finie plate).

<u>Thm profond (Ramakrishna)</u> Soit $p \neq 2$, $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL_2(k)$ plate avec $c(\bar{\rho}) = 1$, $\det \bar{\rho}|_{I_p} = \underbrace{\omega}_{\text{car cycl mod } p}|_{I_p} \Rightarrow \underbrace{R^{fl}_{\bar{\rho}}}_{\text{existe par tout le bazar d'avant}} \simeq \mathcal{O}_K[[T_1, T_2]]$

<u>Rq</u> voilà comment, en rajoutant des hypothèses aux déformations, on réduit énormement l'espace.

Idées <u>de la preuve</u> c'est franchement délicat. Soit $m = m_{R^{fl}_{\bar{\rho}}}$, on a vu (enfin, sans conditions, mais la preuve est la même) que

$$\mathrm{Hom}_k(m/(m^2, \underbrace{\pi}_{\text{uniformisante de } K}), k) \simeq H^1_{fl}(G, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}) \simeq \mathrm{Ext}^{1, fl}_{k[G]}(\bar{\rho}, \bar{\rho})$$

Ici $\mathrm{Ext}^{1,fl}_{A[G]}(\rho, \rho)$ (ρ relev plat à $GL_N(A)$ avec $A \in \overset{\mathrm{Art}_\mathcal{O}}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{C}_\mathcal{O}}}$) classifie les classes d'isom de suites de $A[G]$ modules $0 \to \rho \to M \longrightarrow \rho \to 0$ avec action C^0 de G sur M (pour la top discrète ; noter que M est fini car A artinien)

En utilisant la théorie de Fontaine-Lafaille, Ramakrishna compte ces extensions pour $A = k$ et obtient $|k|^2$ (très fastidieux, voir son article) ce qui fait que $\dim_k m/(m^2, \pi) = 2$ et comme on l'avait expliqué long time ago ceci induit une <u>surjection</u> $\varphi : \mathcal{O}_K[[T_1, T_2]] \longrightarrow R^{fl}_{\bar{\rho}}$.

Truc génial : on veut φ isomorphisme. Or si on arrive à mq

(*) $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{O}_K}}(R^{fl}_{\bar{\rho}}, \mathcal{O}_K/\pi^n) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{O}_K}}(\mathcal{O}_K[[T_1, T_2]], \mathcal{O}_K/\pi^n)$ est bijective

(15) $\forall n$, on a fini (c'est immédiat de voir pourquoi). Mais vu que $(*)$ est injective, on réduit encore le boulot à un problème de comptage : il suffit

$|\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{O}_K}}(R^{\mathcal{H}}_{\bar{\rho}}, \mathcal{O}_K/\pi^n)| = |k|^{2n-2}$. On fait encore tourner la machine

nombre de déf. plates de $\bar{\rho}$ à $GL_2(\mathcal{O}_K/\pi^n)$

de Fontaine pour finir (c'est de loin la partie la plus technique, mais sans trop d'idées).

IV L'horreur absolue : les techniques de Kisin

Comme le dit Alexis dans le chercheur d'or, "c'est la fin de nos rêves". Faute de temps, espace et surtout culture et compréhension, je vais tenter de faire un résumé super condensé de son article (enfin, la Ière partie de son article) sur les espaces de modules de schémas en gr. finis plats. Ceux qui veulent comprendre quoi que ce soit de ces techniques sont fortement conseillés d'arêter de lire mes conneries, qui ne veulent montrer autre chose que le fait qu'il s'agit de techniques 1000 fois plus sophistiquées que celles des sections I → III. Les comprendre serait l'objectif d'un groupe de travail entier.

Pour ne pas embêter les gens, je vais utiliser les notations de Kisin.

a) Modules de Kisin On part du setup usuel en Hodge p-adique : car $k = p$ fini, $W = W(k)$, $K_0 = W[\frac{1}{p}]$, $K | K_0$ finie totalement ramifiée de deg e. On prend π unif. de $\mathcal{O}_K$ et on choisit et on fixe $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ (on travaille donc avec des ext. Kummer, pas cyclotomiques, ce qui fera la vie un peu dure car elles ne sont pas Galois)

On note $R = \tilde{E}^+ = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/p$ l'anneau magique de Fontaine,

$\theta : W(R) = \tilde{A}^+ \longrightarrow \mathcal{O}_C = \widehat{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$ sa flèche magique et on pose

$\mathfrak{S} = W[[u]]$ muni du Frob. $\begin{cases} \varphi(u) = u^p \\ \varphi(x) = \varphi_W(x) \text{ sur } W \end{cases}$

Z vous avez bien lu, c'est $\varphi(u) = u^p$ et PAS $(1+u)^p - 1$ comme chez Colmez, Berger, etc. De même, on met sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \widehat{\mathfrak{S}[\frac{1}{u}]}$ (le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ usuel, quoi ...) le Frobenius induit de celui de $\mathfrak{S}$ (pas $\varphi(u) = (1+u)^p - 1$! chacun avec son Frobenius dans ce domaine !).

On a le magnifique tableau : $\tilde{A} = W(\mathrm{Fr}\,R) \supset \tilde{A}^+ = W(R)$

$$\begin{array}{c} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{nr}}} \\ \cup \\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{nr}} \supset \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \supset \mathfrak{S} \supset W[u] \end{array} \qquad \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{nr}}} \text{ : p-adique}, \quad \mathfrak{S} \hookrightarrow \tilde{A}^+ = W(R)$$

où $\mathfrak{S} \hookrightarrow \tilde{A}^+$ (φ-compatible)
$u \longmapsto [\underline{\pi}]$

avec $\underline{\pi} = (\pi_n)_{n \geq 0}$ (ce n'est pas le $\underline{\pi}$ de Fontaine, Colmez, etc).

polynôme minimal de π sur K_0 — C'est d'Eisenstein, bien sûr

Les 1000 catégories : soit

$'(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S}) = \{ \mathfrak{S}$ modules $\mathcal{M}$ avec un $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ φ semilin tq $E(u)$ tue coker$(\varphi^*(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}) \}$

$\cup$ sous-cat pleine

$(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{les } \mathcal{M} \text{ de dimension projective 1} \\ \text{sur } \mathfrak{S} \text{ et tués par un } p^k \end{array} \right\}$ $\underset{\text{sous-cat pleine}}{\supset}$ $(\mathrm{Mod\,Fi}/\mathfrak{S})$ = les $\mathcal{M}$ de la forme $\bigoplus_{\text{finie}} \mathfrak{S}/p^{n_i}\mathfrak{S}$

~~sous-cat pleine~~

qui sont bien sûr dans $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})$, en particulier projectifs.

Rq ce n'est pas du tout trivial, mais c'est vrai qu'un objet de $'(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})$ est dans $\mathrm{Mod}/\mathfrak{S}$ ssi c'est une extension (dans $'(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})$) d'objets qui sont de $\mathfrak{S}/p\mathfrak{S}$ modules libres de rg fini.

Thm profond (Kisin) 1) Il existe un foncteur contravariant

$$(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathfrak{p}\text{-}\mathrm{Gr}/\mathcal{O}_K = \{\text{sch gr } f\,p \text{ sur } \mathcal{O}_K\}$$

finis plats

exact et induisant une anti-équiv.

2) $(\mathrm{Mod\,Fi}/\mathfrak{S}) \xleftrightarrow{\text{anti-eq}} \{ \mathcal{O}_K\text{-sch en gr } f\,p \text{ tq } G[p^n] \text{ fini plat } \forall n \geq 1 \}$

3) On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{M} & & (\mathrm{Mod\,Fi}/\mathfrak{S}) & \xrightarrow[\text{équiv sur objets tués par } p]{\text{exact, plein, fidèle}} & p\text{-}\mathrm{Gr}/\mathcal{O}_K & & G \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}[\tfrac{1}{u}] & & \begin{array}{c}\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \text{ modules étales de} \\ \text{long finie}\end{array} & \xrightarrow[\text{de Fontaine-Wintenberger}]{\text{équiv}} & G_{K_\infty}\text{-rep de long finie} & & G(\bar{K})(-1)
\end{array}$$

$G_{K_\infty} \hookrightarrow \bigcup_{n \geq 1} K(\sqrt[p^n]{\pi})$

déf. usuelle (mais avec le φ de Kisin !)

La stratégie est alors d'étudier plutôt $(\mathrm{Mod\,Fi}/\mathfrak{S})$, qui est loin d'être évidente, comme on le doutait déjà ...

Retour aux déformations Kisin ne suppose pas le fameux $c(\bar{\rho})$ trivial ce qui fait qu'au lieu de travailler avec des foncteurs, il utilise les groupoïdes. Comme je n'y comprends rien, je vais toujours supposer $c(\bar{\rho})$

(17) trivial et alors on peut remplacer ces horreurs par des foncteurs (heureusement!)

Soit donc $\mathbb{F}$ un corps fini de car p, $V_{\mathbb{F}} \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}}\, G_K$ (continue, as usual) de dim d, k étant comme avant.

Kisin et les 40 foncteurs : on se donne A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre et on introduit des coefficients : $(\mathrm{Mod\,Fi}/\mathfrak{S})_A = \{\mathfrak{M}$ module fini projectif sur $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ avec $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ φ-semilin tq $E(u)$ tue $\mathrm{coker}(\varphi^*\mathfrak{M}/\mathfrak{M})$

sur $\mathfrak{S}_A$, celui que l'on pense

sous-cat pleine $\subset$

$\mathrm{Art}_{W(\mathbb{F})}$ celle classique : $W(\mathbb{F})$ alg locales artin de corps rés $\mathbb{F}$ (elles sont noeth complètes automatiquement!)

$\mathrm{Aug}_{W(\mathbb{F})} = \{W(\mathbb{F})$ alg A munies d'un idéal nilp I tq $I \supset pA\}$.

On pose aussi $D_{V_{\mathbb{F}}} : \mathrm{Art}_{W(\mathbb{F})} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le foncteur usuel des déformations

$(A \longmapsto \{M \underset{A\text{-mod}}{\simeq} A^d$ avec action C^0 de G_K et tq $M \otimes_A \mathbb{F} \simeq V_{\mathbb{F}}\}/\text{isom})$,

$D^{fl}_{V_{\mathbb{F}}} : \mathrm{Art}_{W(\mathbb{F})} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ celui de Ramakrishna, avec les anneaux associés $R_{V_{\mathbb{F}}}$, $R^{fl}_{V_{\mathbb{F}}}$. Ils se prolongent à $\mathrm{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ par

$$D_{V_{\mathbb{F}}}(A, I) = \varinjlim_{A' \subset A} D_{V_{\mathbb{F}}}(A')$$

$A' \subset A$ $W(\mathbb{F})$-alg locales art de corps rés $\mathbb{F}$ tq $\mathrm{rad}\, A' \subset I$

On pose aussi

$D_{M_{\mathbb{F}}} : \mathrm{Art}_{W(\mathbb{F})} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ (qu'on prolonge à $\mathrm{Aug}_{W(\mathbb{F})}$)

$A \longmapsto \{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ modules libres rg fini M_A avec un isom $\mathbb{F}$-lin φ compatible $M_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{F}}$ et un isom $\varphi^* M_A \longrightarrow M_A\}/\text{isom}$

$M_{\mathbb{F}}$: φ-module étale obtenu à partir de $V_{\mathbb{F}}/G_{K_\infty}$

et ENFIN

$D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}(A, I) = \{(\mathfrak{M}_A, \psi) \mid \mathfrak{M}_A \in (\mathrm{Mod\,Fi}/\mathfrak{S})_A,\ \psi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_A \otimes_A A/I \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{F}}$ comme $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}_p} k((u))$ modules, φ compatible$\}/\text{isom}$.

Thm délicat (Kisin)

$$\begin{tikzcd} D^{fl}_{V_{\mathbb{F}}} \arrow[r] & D_{M_{\mathbb{F}}} & \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_A \\ & D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}} \arrow[u] \arrow[ul, "\Theta_{V_{\mathbb{F}}}"] & \mathfrak{M}_A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est commutative pour un (unique) $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$

De plus ce $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ est representé par un morphisme projectif ${}^{\mathcal{G}}R_{V_{\mathbb{F}}} \longrightarrow \operatorname{Spec} R^{\mathcal{H}}_{V_{\mathbb{F}}}$. Après avoir inversé p, ces trucs deviennent formellement lisses sur $W(\mathbb{F})[\frac{1}{p}]$ et $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ devient un isomorphisme.

Ceci est difficile. Il n'est pas du tout évident que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_A \in D_{M_E}$ si $\mathcal{M}_A \in D_{\mathcal{O}, M_E}$! la preuve de l'existence de $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ (qui est explicité par Kisin) utilise à fond les résultats de Breuil sur les p-sch. en groupes. Le fait que $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ est représenté par un morphisme projectif utilise des arguments GAGA formels (pas formels en tant qu'arguments !) et le point est alors la lissité et le fait que Θ devient un isom.

se fait via des critères foncteriels de lissité + la théorie de modules faiblement admissibles + travaux de Breuil

Bref, ce truc nécessite 1 ou 2 exposés pour expliquer ce qui se passe !

utilise le thm Kisin sur l'équiv de cat $(\text{Mod FI}/\mathcal{O})_{\mathbb{Z}_p} \hookrightarrow$ groupes p-divis sur $\mathcal{O}_K$ et le thm de pleine fidélité de Tate : tout groupe p-divisible est connu si on connaît sa fibre générique.

2) Anneaux de déformations cristallines. Ceci marche bien juste pour $K = K_0$ (ie K nr). Cette fois on revient à la normalité en posant $\varphi(u) = (1+u)^p - 1$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Clairement φ et $\Gamma = \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_{p,cyc}/\mathbb{Q}_p)$ laissent stable $\mathcal{O}$

$$\text{Fontaine}: \varphi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longleftrightarrow \operatorname{Rep}^{\text{tors}}_{\mathbb{Z}_p} G_K$$
$$D \longmapsto V(D)$$
$$D(V) \longleftarrow V$$

pareil dans le cas de modules libres sur $\mathbb{Z}_p$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (c'est d'ailleurs ça qui marche bien pour les déformations)

Rappelons le résultat fondamental :

<u>Thm (Berger)</u> $V \in \operatorname{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G_K$, T un réseau G_K-stable, alors V est crist à poids HT $\in [-h, 0]$ ssi $D(T)$ a un réseau de Wach à poids $\in [0, h]$ ie un $\mathcal{O}$ sous-module $\mathcal{M}$ φ, Γ stable, qui engendre $D(T)$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et tq $q^h = \left(\frac{\varphi(u)}{u}\right)^h$ tue $\operatorname{coker}(\varphi^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M})$ avec $\Gamma \underset{\text{triv}}{\circlearrowright} \mathcal{M}/u\mathcal{M}$.

Dans ce cas ce $\mathcal{M}$ est unique et $D_{cris}(V) \simeq \mathcal{M}/u\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Kisin étend la déf d'un tel réseau : $\mathbb{Z}_p \longrightarrow A$ algèbre locale, $G_K \circlearrowright V_A$ (A-mod libre rg fini), Buse A-alg $\underset{\text{pas évident}}{\longrightarrow}$ $M_A = D(V_A)$ est libre sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E},A} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$.

(19) si $M_B = M_A \otimes_A B$, un réseau de Wach à poids dans $[0,h]$ = sous $\mathfrak{S}_B = \mathfrak{S}_A \otimes_A B$ module $\mathcal{M}_B$ fini localement libre / $\mathfrak{S}$, Γ stable, engendrant M_B sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E},B}$ tq $q(u)^h$ tue $\mathrm{coker}(\varphi^* \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_B)$ et $\Gamma \underset{\text{triv}}{\circlearrowleft} \mathcal{M}_B / u\mathcal{M}_B$.

Si maintenant V_A est une déf. de $V_{\mathbb{F}}$, $M_A = D(V_A^*)$ ($\to$ A-dual), on montre avec GAGA formel et le thm Berger que

$$W^{\leq h}_{V_A, \mathcal{E}} : \{A\text{-alg}\} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$B \longmapsto \{\text{réseaux de Wach } \mathcal{M}_B \subset M_B \text{ à poids } \in [0,h]\}$$

est representable par un A-schéma projectif $\mathcal{W}^{\leq h}_{V_A}$. De plus,

$\forall R \in \widehat{\mathcal{C}}_{W(\mathbb{F})}$, $\forall V_R$ déform à R, $\exists$ $\mathcal{W}^{\leq h}_{V_R}$ R-schéma projectif tq a) si $A \in \mathrm{Art}_{W(\mathbb{F})}$ et $R \to A$ induit id sur les corps res, on a

$$\mathcal{W}^{\leq h}_{V_R} \otimes_R A \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^{\leq h}_{V_A}, \quad V_A = V_R \otimes_R A$$

b) $\mathcal{W}^{\leq h}_{V_R} \xrightarrow{\Theta_R} \mathrm{Spec}\, R$ devient une imm fermée après avoir inversé p et si A est une $W(\mathbb{F})[\frac{1}{p}]$ alg finie, $V_A = V_R \otimes_R A$ est cristalline à poids HT $\in [0,h]$ ssi $R \to A$ se factorise par l'$\underbrace{\text{image schématique de } \Theta_R}_{\text{notée } R^{\leq h}}$.

<u>Thm (Kisin)</u> Soit $h \geq 2$, $V_{\mathbb{F}}$ comme d'hab,
alors $R^{\leq h}$ est un quotient de $R_{V_{\mathbb{F}}}$ sans p-torsion, formellement lisse après inversion de p sur $W(\mathbb{F})[\frac{1}{p}]$. De plus, $\forall$ $E / W(\mathbb{F})[\frac{1}{p}]$ finie une flèche de $W(\mathbb{F})[\frac{1}{p}]$ alg $R_{V_{\mathbb{F}}} \xrightarrow{x} E$ se factorise par $R^{\leq h}$ ssi V_x (venue via ρ^{univ} et x) est crist. à poids HT $\in [0, h-1]$. De plus il existe un unique quotient $R^{0,h-1}_{V_{\mathbb{F}}}$ de $R_{V_{\mathbb{F}}}$ avec les mêmes propriétés, où on remplace $[0,h-1]$ par $\{0, h-1\}$.

Bon, pour instant j'en ai marre! Ces notes devraient être complétées par des choses sérieuses quand j'aurai compris ces techniques (ie dans $\simeq$ 50 ans).