Fun with Colmez's functor

NB - sauf mention explicite du contraire, tout résultat est du à Colmez (sauf quand c'est faux, et alors c'est une contribution personnelle)
- il y a plein de fautes d'ortographe!

But du jeu : calculer explicitement $D_{col}(\Pi(r,\lambda,\chi))$ pour $0\le r<p$, $\lambda\in k_L$, χ caractère de $\mathbb{Q}_p^\times \to k_L^\times$. Plus précisément, on expliquera les étapes de la preuve du:

Théorème Si $0\le r\le p-1$ et $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère continu on a

$$V(\Pi(r,0,\delta)) = V(r,\delta) \left(\overset{def}{=} \operatorname{ind}\omega_2^{r+1}\otimes\delta\right)$$

(pour ce que sont ces animaux, voir la suite).

On expliquera aussi le calcul pour $\lambda\neq 0$, qui est beaucoup plus facile (mais nontrivial).

Notations - je vais donner les plus courantes ici, le reste dans ce qui suit.
- p sera premier et au cas où on aura des problèmes, on prendra $p>3$.
- χ sera le caractère cyclotomique $G_{\mathbb{Q}_p}\to \mathbb{Z}_p^\times$, sauf mention explicite du contraire.
- ω sera $\chi \bmod p$, qu'on verra aussi (via corps de classes) comme caractère $\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ $x\mapsto x|x|_p \bmod p$.
- D ou D_{col} sera le foncteur de Colmez, D sera aussi le foncteur de Fontaine. Pareil avec les V. Il n'y a pas de problème à les distinguer car D_{col} et V s'applique à des $\Pi\in \operatorname{Rep}(GL_2(\mathbb{Q}_p))$, alors que D_{Fon} à des $V\in \operatorname{Rep} G_{\mathbb{Q}_p}$.
- toutes les représentations sont à coefficients dans L, extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ("variablement fixe", comme le dit Colmez), qui en principe sera assez grande. On considèrera plutôt des objets de torsion. Ainsi $\operatorname{Rep}_{tors} G_{\mathbb{Q}_p}$ sera la catégorie des representations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur des $\mathcal{O}_L$ modules de longueur finie, les representations de $G=GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sont supposées lisses, à caractère central, admissibles, de longueur finie sur $\mathcal{O}_L[G]$. On notera juste $\Pi\in \operatorname{Rep}_{tors} G$.
- $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ sera l'anneau de Fontaine $\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n\in\mathcal{O}_L,\ a_n \xrightarrow{-\infty} 0\}$, $\mathcal{E}=\mathcal{O}_\mathcal{E}[\frac{1}{p}]$

$k_\mathcal{E} = k_L((T))$ son corps résiduel. (2)

- on rappelle que via Fontaine on a

$$\begin{array}{ccc} \text{ie long. finie} \longleftarrow \varphi\Gamma \text{ et tors}, \mathcal{O}_\mathcal{E} & \xleftrightarrow{\text{équiv.}} & \mathrm{Rep}^{\text{tors}}_{\mathcal{O}_L}\, G_{\mathbb{Q}_p} \\ D & \longmapsto & V(D) = (A \otimes_{\mathbb{Z}_p} \cancel{V}) \quad \left((A \otimes_{\mathbb{Z}_p} L) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} D\right)^{\varphi=1} \\ D(V) = (A \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{H_{\mathbb{Q}_p}} & \longleftarrow & V \end{array}$$

avec les notations standard de la théorie.

- K sera $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, B le Borel de G, Z le centre, on notera souvent $I(W) = \mathrm{Ind}_{KZ}^G (W)$ (induite compacte).

- on rappelle la notation $\pi(r, \lambda, \delta) = I(W_{r,\delta})/(T_p - \lambda)$ avec $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow k_L^\times$, $\lambda \in k_L$, T_p un certain opérateur de Hecke, $W_{r,\delta} = \mathrm{Sym}^r k_L^2 \otimes \delta \circ \det$, l'action de KZ sur $\mathrm{Sym}^r k_L^2$ étant

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P(x) = (a+cx)^r P\left(\frac{b+dx}{a+cx}\right).$$

- enfin (ou pas) ω_2 sera le caractère fondamental de Serre de niveau 2 $G_{\mathbb{Q}_{p^2}} \longrightarrow \mathbb{F}_{p^2}^\times$ ($\mathbb{Q}_{p^2}$ = extension quadratique nr de $\mathbb{Q}_p$).

① les grandes étapes de la démonstration

Elle est très indirecte. Dans la suite π sera $\pi(r, 0, \delta)$ (sauf si je dis le contraire). La partie de loin la plus délicate est de montrer l'irréductibilité de $V(\pi)$. Cela se fait en éliminant tous les cas (la classification des représentations réductibles de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ étant aisée sur k_L) et est franchement acrobatique. Dans l'exposé on ne traitera que le cas d'une extension nontriviale $0 \to k_L(\delta_1) \to V(\pi) \to k_L(\delta_2) \to 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. (qui est le plus délicat, en fait). La stratégie est alors :

1) on montre que $D(V(\pi))^\natural$ est "grand" ie contient $\frac{1}{T} k_L[[T]]$. C'est la partie délicate et repose essentiellement sur un résultat profond de Colmez assurant que $D^\#/D^\natural$ est "petit" si $D = D(V)$ et que plus précisément il s'identifie à $H^0(G_{\mathbb{Q}_p^{ab}}, V^\vee(1))^\vee$ (voir la suite pour savoir qui sont tous ces gens). Ceci est une étude purement galoisienne.

2) Du coté GL_2 on explicite suffisamment $D^\natural_W(\pi)$ et $D^+_W(\pi)$ pour montrer l'inclusion $\varphi^2(T D^\natural_W(\pi)) \subset T^2 D^\natural_W(\pi)$. C'est assez délicat d'expliciter $D^\natural_W(\pi)$ comme $O_L[[T]]$ module (Benjamin l'a dit, d'ailleurs) et on l'admettra car les calculs sont techniques (mais pas mécaniques du tout !)

3) On "récolle" les 2 points de vue en utilisant le fait (loin d'être trivial) que $D^\natural_W(\pi) \xrightarrow{\sim} D(\pi)^\natural$ et qu'il y a une relation directe entre $D(V(\pi))^\natural$ et $D^\natural_W(\pi)$. Il reste malheureusement à vérifier que tout ceci est bien compatible avec les actions de φ, Γ, ce qui n'est parfois pas immédiat (on agitera suffisamment les bras pendant l'exposé pour éviter tout ceci ...)

4) Une fois qu'on sait que $V(\pi)$ est irréductible, la classification (pas difficile) assure qu'elle est de la forme $V(s,x) = \mathrm{Ind}\,\omega_2^{s+1} \otimes x$ et il reste à trouver s et x. Cela se fait en regardant $D^\natural_W(\pi)/T D^\natural_W(\pi)$ comme $k_L\left[\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ module de 2 façons

1) d'un coté en utilisant l'isomorphisme $D(\pi)^\natural \simeq D^\natural_W(\pi)$

2) de l'autre (coté GL_2) en revenant à sa définition (via dualité) et en étudiant $I^{\pi}_{\mathbb{Z}_p}(W)^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(2) Préliminaires du coté Galois : $D, D^\#, D^{nr}, D^\vee, \check{D}$, oh my...

Dans cette section D sera dans $\varphi\Gamma^{et}_{tors, \mathcal{O}_\mathcal{E}}$, même si Colmez a démontré des résultats bien plus généraux.

<u>Rappels</u> un treillis M de D est un sous $O_L[[T]]$ module compact de D qui devient un réseau quand on le voit dans $D/\pi_L D$ (bon, dans notre cas D est déjà tué par π_L ...)

<u>Théorème (Herr-Colmez)</u> Soit $D \in \varphi\Gamma^{et}_{tors, \mathcal{O}_\mathcal{E}}$ alors il existe des uniques $O_L[[T]]$ modules de type fini et qui sont les plus grands, sous $O_L[[T]]$ modules de type fini ayant les propriétés

1) D^+ = plus grand qui est φ stable

2) $D^\natural$ = plus petit ψ-stable engendrant D

3) $D^\#$ = plus grand sur lequel ψ est surjectif.

/plus petits

j'avoue, c'est assez incompréhensible comme formulation...

En fait, dans le cas général (sans torsion) ils existent encore et sont des treillis. Leur existence repose sur des propriétés de rigidité assez subtiles par exemple le fait que tout treillis M de D qui est ψ stable et $\subset D^\#$ vérifie $\dim_{\mathcal{O}_L} D^\#/M \leq \dim_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} D$ (ce qui permet de mq toute suite $\downarrow$ de treillis ψ-stables est stationnaire).

<u>Propriétés essentielles des $D^\#, D^\natural$</u> 1) Ce sont des foncteurs pas exacts mais qui preservent les flèches injectives et surjectives

2) Si M est un treillis de D et $\psi : M \longrightarrow M$ est surjectif alors $M \subset D^\#$ et T tue $D^\#/N$.

Ceci entraine sans trop de mal que $\mathcal{O}_\mathcal{E}^\# = \frac{1}{T}\mathcal{O}_L[[T]] = \mathcal{O}_L \cdot \frac{1}{T} \oplus \underbrace{\mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}_L)}_{\text{mesures sur } \mathbb{Z}_p \text{ à valeurs ds } \mathcal{O}_L}$ (et un énoncé analogue en caractéristique p) et que

$\mathcal{O}_\mathcal{E}^\natural = \mathcal{O}_L[[T]] = \mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}_L)$.

ii) <u>Dualité à la Tate</u> $\underset{\text{Pontryagin}}{}$ Si $D \in \Phi\Gamma^{et}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ on pose $\check{D} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}\left(D, \mathcal{E}/\mathcal{O}_\mathcal{E}\, \frac{dT}{1+T}\right)$

($\frac{dT}{1+T}$ est inclus pour prendre en compte l'action de Γ; ceci fait sortir des $\chi(\gamma)$, ce qui expliquera la présence des twists de Tate dans la suite et donne le nom de dual de Tate pour $\check{D}$).

<u>Propriété importante</u> $\check{\check{D}} = D$, $\check{D}(V) = D(\check{V})$ avec $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, L/\mathcal{O}_L)(1)$
$= V^\vee(1)$.

La première vient des résultats généraux sur la dualité de Pontryagine que je vais rappeler tout de suite, la deuxième est conséquence de la compatibilité avec la dualité dans l'équivalence de Fontaine.

<u>Interlude</u> rappelons l'essentiel sur la dualité de Pontryagine :

$$\{\mathcal{O}_L \text{ modules discrets de torsion, flèches } \mathcal{O}_L\text{-lin}\} \xleftrightarrow{\text{antiéq.}} \{\mathcal{O}_L \text{ modules profinis avec flèches } \mathcal{O}_L\text{-lin } C^0\}$$

$$M \longmapsto M^\vee = \mathrm{Hom}(M, L/\mathcal{O}_L)$$

$$N^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(N, L/\mathcal{O}_L) \longleftarrow N$$

ie $M = \bigcup_{X \subset M} X$ sous $\mathcal{O}_L$ mod. fini

ie $N = \varprojlim_{X \subset N \text{ sous } \mathcal{O}_L \text{ mod ouvert}} N/X$

De ceci on a of course $(M^\vee)^\vee = M$.

En plus, ceci marche bien si on rajoute des actions C^0 d'un G localement profini (action adjointe sur $M^\vee$, définitions évidentes des 2 catégories à considérer). Enfin, on aura besoin du fait que

$$\begin{cases} (M^G)^\vee = (M^\vee)_G \\ (M/M^G)^\vee = M^\vee(G) \end{cases}$$

si M discret ou profini comme $\mathcal{O}_L[G]$ module, $\begin{cases} M(G) = \sum_{\substack{g\in G \\ m\in M}} \mathcal{O}_L(gm-m) \\ M_G = M/M(G). \end{cases}$

iii) <u>Un théorème délicat</u>

<u>Thm (Colmez)</u> Si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$ on a

$$D^\#(V)/D^\natural(V) \xrightarrow{\sim} H^0(G_{\mathbb{Q}_p^{ab}}, V^\vee(1))^\vee$$

en tant que $\mathcal{O}_L\left[\begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ modules. $\qquad \mathbb{Q}_p^{ab}$: ext. ab. max. de $\mathbb{Q}_p$.

Rq comment agit $\begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? le point est que $D^\#/D^\natural$ est de longueur finie sur $\mathcal{O}_L$ (si D est de torsion cela n'est pas difficile, le cas général par $\varprojlim$) et ψ est surjectif, donc

$$\psi^{-\infty}(D^\#/D^\natural) = \varprojlim_{\psi} D^\#/D^\natural \longrightarrow D^\#/D^\natural \quad \text{est}$$
$$(x_n)_n \longmapsto x_0$$

un isomorphisme. Or LHS a bien une action de $\begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour ce qui est du terme de droite, on fait agir $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ trivialement et $\mathbb{Q}_p^\times$ via l'identification $\mathbb{Q}_p^\times = G_{\mathbb{Q}_p}/G_{\mathbb{Q}_p^{ab}}$ (corps de classes)

Le théorème est subtile. Un argument de dualité, assez délicat montre que $D^\#/D^\natural = (\check{D}^{nr})^\vee$ avec D^{nr} = plus grand $\mathcal{O}_L$ module de type fini dans D qui est φ-stable. Après, on vérifie que

$$D^{nr}(V) = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(D) = \left(W(\bar{\mathbb{F}}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} V^{G_{\mathbb{Q}_p^{ab}}}\right)^{I^{ab}_{\mathbb{Q}_p}}$$

en utilisant que si M est φ stable et $\mathcal{O}_L$-de type fini, φ est bijectif sur M

donc $M \subset \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(D) \subset \left(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(A)\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} V = W(\bar{\mathbb{F}}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$

inclure A ds $\tilde{A}$ et travailler sur le developpement de Witt.

3 $\varphi\Gamma$ modules attachés aux $V(r,\delta)$ et étude de Γ agissant sur $D^\#/TD^\natural$

La clé pour calculer $D(V(r;\delta))$ repose sur les résultats de Berger-Li-Zhu (Colmez m'a informé que Berger vient de trouver une preuve bien plus simple) permettant de calculer des $\varphi\Gamma$ modules pour des représentations particulières en dimension 2. Pour cela, il faudrait pouvoir relever les $V(r,\delta)$.

<u>Miracle</u> soit $\chi_F : G_{\mathbb{Q}_{p^2}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2}^\times$ le caractère obtenu par restriction de l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $T_p(F)$ (module de Tate associé au groupe formel de Lubin-Tate correspondant à $x^{p^2}+px$) à $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$. Alors $T_pF \underset{G_{\mathbb{Q}_p}\text{ rep}}{\simeq} \operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} \chi_F$ et $\chi_F \bmod p = \omega_2$.

Par la théorie de Fontaine il suffit de calculer $D(\operatorname{ind}\chi_F^{-r}) \bmod p$ pour trouver $D(\operatorname{ind}\omega_2^{-r})$ (celui que l'on veut !). Pour pouvoir appliquer les résultats de Berger (qui utilise les modules de Wach) il faudrait savoir que $\operatorname{ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}\chi_F$ est cristalline $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{restriction à l'inertie}}}{\Longleftrightarrow}$ χ_F l'est. Ceci est loin d'être évident, mais est une conséquence ~~générale~~ de la théorie de Fontaine et du fait que $T_p(F)$ est p-divisible. (merci à Benjamin !)

En utilisant la théorie des modules de Wach, on obtient

<u>Thm (Berger-Zhu-Li)</u> $\forall r\in\mathbb{Z}$ $D(\operatorname{ind}\chi_F^{-r}) = \mathcal{O}_\mathcal{E}e_1 \oplus \mathcal{O}_\mathcal{E}e_2$

avec $\operatorname{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^r & 0\end{pmatrix}$, $\operatorname{Mat}(\gamma) = \begin{pmatrix} a_+(\gamma)^{-r} & 0 \\ 0 & a_-(\gamma)^{-r}\end{pmatrix}$

où $a_+(\gamma) = \prod_{n\geq 0}\varphi^{2n+1}\left(\frac{\gamma(q)}{q}\right)$, $a_-(\gamma) = \prod_{n\geq 0}\varphi^{2n}\left(\frac{\gamma(q)}{q}\right)$, $q = \frac{\varphi(T)}{T}$.

Un calcul immédiat montre alors que

$$D(\operatorname{ind}\omega_2^{-r}) = k_L((T))e_1 \oplus k_L((T))e_2$$

avec $\operatorname{Mat}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T^{(p-1)r} & 0\end{pmatrix}$, $\operatorname{Mat}\gamma = \begin{pmatrix} a_+(\gamma)^{-r} & 0 \\ 0 & a_-(\gamma)^{-r}\end{pmatrix}$

<u>Miracle</u> pour $1\leq r\leq p$ on a explicitement

$$D^\#(\operatorname{ind}\omega_2^{-r}) = D^\natural(\operatorname{ind}\omega_2^{-r}) = k_L[[T]]T^{-r}e_1 \oplus k_L[[T]]T^{-1}e_2$$

Le point est que si M = terme de droite, un calcul explicite montre que $\psi : M \to M$ est surjectif, que $\psi(TM) = M$ et cela permet de conclure.

Ce qu'il nous fallait : $D^\sharp(\mathrm{ind}\,\omega_2^{-r})/_T \underset{\Gamma-\mathrm{rep}}{\simeq} \omega^{-1} \oplus \omega^{-r}$.

(4) Fin du coté Galois : $D^\sharp$ est gros si $0 \to k_L(\delta_1) \to V \to k_L(\delta_2) \to 0$

Théorème Si $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k_L^\times$ sont des caractères c^0 et $0 \to k_L(\delta_1) \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} k_L(\delta_2) \to 0$ est non scindée alors $\delta_1 \neq \delta_2 \Rightarrow D^\sharp(V) \supset \frac{1}{T} k_L[[T]]$.

Ceci utilise ce qu'on a vu avant : on a par fonctorialité des injections $\frac{1}{T} k_L[[T]] \xrightarrow{\alpha} D^\sharp(V)$ et des surjections $D^\sharp(V) \xrightarrow{\beta} \frac{1}{T} k_L[[T]] \to 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} k_L[[T]] \xrightarrow{\alpha} D^\sharp(V) \\ k_L[[T]] \xrightarrow{\alpha} D^\sharp(V) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} D^\sharp(V) \xrightarrow{\beta} \frac{1}{T} k_L[[T]] \to 0 \\ D^\sharp(V) \xrightarrow{\beta} k_L[[T]] \to 0 \end{array}$$

Si M_1, M_2 sont les ker de ces surjections, $\beta \circ \alpha = 0$ donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} k_L[[T]] \subset M_1 \\ k_L[[T]] \subset M_2 . \end{array} \right.$$

La partie délicate est de remarquer que $D^{\sharp}(V)/D^\natural(V)$ est de dimension ≤ 1 sur k_L, ce qui résulte du fait qu'il est $H^0(G_{\mathbb{Q}_p^{ab}}, V^\vee(1))^\vee$ et ceci ne peut pas avoir dimension 2, sinon $\mathbb{Q}_p^\times \simeq G_{\mathbb{Q}_p}/G_{\mathbb{Q}_p^{ab}}$ agirait sur V et la suite exacte serait scindée.

Ceci + lemme du serpent $\Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow$ clr.

The big picture : on a presque fini la bataille galoisienne, il reste à voir comment passer du coté GL_2 ces résultats galoisiens.

(5) Transfert des propriétés obtenues à GL_2, compatibilités

Question : comment retrouver $D(\pi)$ à partir de $D(V(\pi))$ et réciproquement ?

Rappelons que $V(\pi)$ a été défini comme dual de Tate de $V(D(\pi))$. Heureusement, on peut répondre facilement vu les rappels sur la dualité. En effet,

$$V(\pi) = V(D(\pi))^\vee(1) \Rightarrow$$

$$D(V(\pi)) = D(V(D(\pi))^\vee(1)) = D(\overset{\vee}{V}(D(\pi))) \overset{\text{Fontaine } V}{=} D(\pi)$$

(8) Donc $D(\pi) = \check{D}(\check{\pi}) = D(V(\pi))^{\vee} = D(V(\pi)^{\vee}(1))$. Et maintenant on a gagné, car si $0 \to k_L(\delta_1) \to V(\pi) \to k_L(\delta_2) \to 0$

en dualisant (c'est exact) (ie twister à la Tate) on obtient

$$0 \to k_L(w\delta_1) \to V(\pi)(1) \to k_L(\delta_2 w) \to 0$$

et par le resultat de (4) on aura $D(\pi)^{\#} = D^{\#}(V(\pi)^{\vee}(1))$ $\supset \frac{1}{T} k_L[[T]]$.

<u>Next</u> : on veut passer de $D(\pi)^{\#}$ à $D^{\#}_{W}(\pi)$. Ceci est en fait bien subtile ! Il est clair qu'on a une flèche

$$\begin{array}{ccc} D^{\#}_{W}(\pi) & \longrightarrow & D(\pi)^{\#} \\ \mu & \longmapsto & 1\otimes\mu \end{array}$$ et l'image tombe

dans $D^{\#}(\pi)$ car $D^{\#}_{W}(\pi)$ est compact. L'injectivité ne pose pas des problèmes car Benjamin a donné l'expression de $D^{\#}_{W}(\pi)$, qui montre qu'il n'a pas de $\mathcal{O}_L[[T]]$ torsion. Or par platitude de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_L[[T]]$ le Ker de la flèche est la partie de torsion de $\mathcal{O}_L[[T]]$, qui est 0. La surjectivité est toute une autre histoire et on ne donne ici que l'idée :

il suffit de voir que la flèche induite

$$(*) \quad \psi^{-\infty}(D^{\#}_{W}(\pi)) \longrightarrow \psi^{-\infty}(D(\pi)^{\#})$$ est surjective

(car ψ est surjectif sur $D^{\#}_{W}(\pi)$ et $D(\pi)^{\#}$)

Or on peut montrer que d'un coté

$$\begin{array}{ccc} \pi^{\vee} & \xrightarrow[\text{B-rep}]{\sim} & \psi^{-\infty}(D^{\#}_{W}(\pi)) \\ \mu & \longmapsto & \left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mu \Big|_{I^{\pi}_{\mathbb{Z}_p}(W)} \right)_{n\geq 0} \end{array}$$ ceci est facile

et de l'autre que $\pi^{\vee} \longrightarrow \psi^{-\infty}(D(\pi)^{\#})$ est surjective, mais ceci est bien plus profond.

En composant ceci on a bien la surjectivité de $(*)$, donc

$$D(\pi)^{\#} \xrightarrow{\sim} D^{\#}_{W}(\pi)$$ comme voulu.

6 Agriculture du coté GL_2

On a vu que $D^\natural(V(\pi)) \supset \frac{1}{T} k_L[[T]]$ si $0 \to k_L(\delta_1) \to V(\pi) \to k_L(\delta_2)$ $\to 0$ et qu'on pouvait facilement relier $D^\natural(V(\pi))$ et $D^\natural_W(\pi)$.

Le but du jeu est de montrer que justement $\varphi^2(T D^\natural_W(\pi)) \subset T^2 D^\natural_W(\pi)$ (*) et donc qu'on ne peut pas avoir $D^\natural(V(\pi)) \supset \frac{1}{T} k_L[[T]]$.

La preuve de (*) est assez calculatoire et repose sur une description très explicite de $D^+_W(\pi)$ et du lien avec $D^\natural_W(\pi)$. En effet, on montre que d'un coté $D^+_W(\pi) = T D^\natural_W(\pi)$ (donc il reste à voir que

$$\varphi^2(D^+_W(\pi)) \subset T D^+_W(\pi))$$

de l'autre que $T D^+_W(\pi) \ni \mu\ (\in D^+_W(\pi))$ si et seulement si $\mu(e') = \mu(f') = 0$ pour deux éléments e', f' d'expression explicite mais assez moche. Tout ceci est assez calculatoire et pas éclairant, je le skipe.

7 Fin de la démo, Alleluia!

__Récapitulons__ on a vu que si $V(\pi)$ a le type particulier d'avant alors $D^\natural_W(\pi) = D(\pi)^\natural = D^\natural(V(\pi)(1))$ contient $\frac{1}{T} k_L[[T]]$ et de l'autre coté ~~dans~~ qu'on a en fait $\varphi^2(T D^\natural_W(\pi)) \subset T^2 D^\natural_W(\pi)$.

Or si $\frac{1}{T} \in D^\natural_W(\pi)$ ceci entraine $\frac{1}{T^2} \in D^\natural_W(\pi)$, $\varphi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T^p} \in T^2 D^\natural_W(\pi)$ etc, ce qui est surement faux! Donc $V(\pi)$ n'est pas de ce type.

On élimine toujours par des astuces assez abominables les autres cas et on obtient donc l'irréductibilité de $V(\pi)$. Mais alors on sait qu'elle est isomorphe à un $V(s, \delta_1)$, donc

$$D^\natural_W(\pi) = D(\pi)^\natural = D^\natural(V(\pi)(1)) = D^\natural(\underbrace{V(s,\delta_1)^\vee}(1))$$

$$\Rightarrow D^\natural_W(\pi)/T D^\natural_W(\pi) \simeq \left(k_L(\omega) \oplus k_L(\omega^{-s-1})\right) \otimes \omega\delta_1^{-1} \qquad \mathrm{ind}\, \omega_2^{-s-1} \otimes \omega\delta_1^{-1}$$

$k_L\left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ module.

Les résultats de 3 permettent enfin de conclure.

Le foncteur de Colmez et les séries principales

1) **Rappels** 1) Ramla avait introduit des représentations

$\Pi(r,\lambda,\chi) = I(W_{r,\chi})/_{T_p-\lambda}$ avec $I(W_{r,\chi}) = \mathrm{ind}_{KZ}^G($ $\mathrm{Sym}^r k_L^2 \otimes \chi\circ\det)$ et T_p un opérateur de Hecke assez moche. Ceci pour $0 \le r \le p-1$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k_L^\times$ caractère, l'action sur $\mathrm{Sym}^r k_L^2$ étant celle évidente ie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} P(x) = (a+cx)^r P\left(\frac{b+dx}{a+cx}\right)$. Il se trouve qu'elles sont sympa pour $\lambda \neq 0$. Avant d'énoncer le théorème, 2 notations : ω = réduction mod p du caractère cyclotomique, μ_y le caractère non ramifié de $G_{\mathbb{Q}_p}$ envoyant des Frob$_p$ géométriques sur y. $\Longleftrightarrow$ (corps de classes) caractère nr ( ) de $\mathbb{Q}_p^\times$ qui envoie p sur y.

<u>Théorème (Barthel-Livné)</u> Si $\lambda \neq 0$, $\Pi(r,\lambda,\chi) \underset{G\text{-rep}}{\simeq} \mathrm{Ind}_B^G(\chi\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \chi\mu_\lambda \omega^r)$

2) On peut aussi voir ω comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ $x \mapsto x|x|_p$ mod p et alors on a un isomorphisme de G-représentations

action évidente de B sur k_L via $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} x = \delta_1(a)\delta_2(d) x$ $\leftarrow$ $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2 \longrightarrow B(\delta_2\omega, \delta_1) \overset{\text{def}}{=} \{\phi : \mathbb{Q}_p \to k_L$ loc cst telle que $x \mapsto (\delta_2\delta_1^{-1})(x)\phi(\frac{1}{x})$ est localement cst sur $\mathbb{Q}_p\}$

Z la définition de $B(\delta_1,\delta_2)$ n'est pas vraiment symétrique en δ_1, δ_2...

L'isomorphisme est parfaitement explicite :

$$\sigma \in \mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2 \longrightarrow \phi_\sigma : x \mapsto \sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x\end{pmatrix}\right)$$

L'action de G sur $B(\delta_2\omega, \delta_1)$ est (à droite !)

$$\phi * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(x) = \delta_2^{-1}(ad-bc)(\delta_2\delta_1^{-1})(cx+d)\,\phi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

Heureusement tout ceci est bien plus simple sur $LC_c(\delta_1,\delta_2) \overset{\text{def}}{=} \{f : \mathbb{Q}_p \to k_L$ loc cst à supp compact$\}$, où G agit par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix}\cdot f(x) = \delta_1(a)\delta_2(d) f\left(\frac{dx-b}{a}\right)$$ (l'action à droite est encore plus jolie : $f\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(x) = \delta_1^{-1}(a)\delta_2^{-1}(\delta) f\left(\frac{ax+b}{d}\right)$.

 Tout le bla-bla précédent peut se résumer en :

$$0 \longrightarrow LC_c(\delta_2 \otimes \delta_1) \longrightarrow \underset{\substack{\wr\!\mid G\text{-rep} \\ \mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2}}{B(\delta_2 \omega, \delta_1)} \longrightarrow \delta_1 \otimes \delta_2 \longrightarrow 0$$ (exacte comme $k_L[B]$ modules)

2) Présentation standard et Colmez (série principale)

Il est immédiat de vérifier que

$$B(\delta_2\omega, \delta_1) = LC_c(\mathbb{Q}_p, k_L) \oplus k_L \phi_\infty \text{ avec } \phi_\infty(x) = (\delta_2\delta_1^{-1})(x) \cdot 1_{x \notin \mathbb{Z}_p}$$

Un grand rôle est joué par les $\phi_i = 1_{i+p\mathbb{Z}_p}$, $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, elles se transforment (suffisamment) bien sous G et c'est ceci la clé de la démonstration du :

Thm (Colmez) Soit $W(\delta_2\omega, \delta_1) = k_L\phi_\infty + \sum_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} k_L \phi_i \subset B(\delta_2\omega, \delta_1)$, alors $W(\delta_2\omega, \delta_1)$ est une présentation standard et $\mathrm{Ker}(I(W(\delta_2\omega,\delta_1)) \longrightarrow W(\delta_2\omega, \delta_1))$ est engendré comme $O_L[G]$ module par 2 relations explicites (mais moches).

Rq Tout ceci est bien plus clair pour la Steinberg $St = B(\omega, 1)/$fonctions cst où $B(\omega,1) = \{f : P^1 \longrightarrow k_L \text{ loc cst}\}$. En effet, la numérologie est alors la suivante :

1) $1_{P^1} = \phi_\infty + \sum_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \phi_i$ 2) St a pour présentation standard

$$W(\omega, 1)/k_L 1_{P^1} \xrightarrow[KZ\text{ module}]{\sim} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} k_L\phi_i$$ (avec action triviale de Z et

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\phi_i = \phi_{i+1}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\phi_i = \phi_{ai}$ $(a \in \mathbb{Z}_p^\times)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\phi_i = \phi_{i^{-1}}$ $(i \neq 0)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\phi_0 = -\sum_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \phi_i$.

On arrive enfin à ce qui nous intéresse

Théorème (idem) Si $\delta_j : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow k_L^\times$ sont des caractères continus on a

$$D(B(\delta_1, \delta_2)) \simeq k_L[[T]](\omega\delta_1^{-1})$$

$\downarrow$

c'est bien $B(\delta_1, \delta_2)$ et non $B(\delta_2\omega, \delta_1)$ comme avant (enfin, Colmez travaille juste avec $B(\delta_1, \delta_2)$, mais j'ai utilisé $B(\delta_2\omega, \delta_1)$ pour rendre les formules plus simples ; pas de risque de confusion !)

Idée de la preuve - 2 étapes

1) de la numérologie i) on note $\pi = B(\delta_1, \delta_2)$, $W = W(\delta_1, \delta_2)$ et on montre que

$$0 \longrightarrow LC(\mathbb{Z}_p, k_L) \longrightarrow I^{\pi}_{\mathbb{Z}_p}(W) \longrightarrow k_L\,\phi_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{comme } P^+\text{-rep}$$

$$P^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p - \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rappel : ceci est $\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_p \\ n \geq 0}} \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W$

(facile mais pénible, il s'agit de calculer $\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi_i$, $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$; rien de profond)

ii) en utilisant la présentation standard et les relations explicites on montre que

$$(1) \qquad D^+_W(\pi) = \{\mu \in \mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p, k_L),\ \int_{\mathbb{Z}_p} \mu = 0\}, \text{ qui est}$$

mesures sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans k_L

assez miraculeusement simple ! Comme je l'ai dit, il suffit de revenir à la déf. de $D^+_W(\pi)$ à condition de remarquer que

$$(2) \qquad D^+_W(\pi) = \mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p, k_L) \oplus k_L\, \mathrm{Dir}_\infty$$

comme $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ modules, PAS P^+ modules — le $\mu \in \pi^\vee$ nul sur $LC_c(\mathbb{Q}_p, k_L)$ (ou dans π) tq $\mu(\phi_\infty) = \omega\delta_1^{-1}(-1)$

où l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p, k_L)$ est celle que l'on pense ($\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mu(\phi) = \mu(\phi(\cdot + 1))$) et sur Dir_∞ elle est triviale.

2) analyse p-adique le point est que

$$(*) \qquad \mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p, k_L) \xrightarrow[k_L[[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]] \text{ modules}]{\sim} k_L[[T]]$$

$$\mathrm{Dir}_1 \longleftrightarrow f \longmapsto f(1+T)$$

$$\mu \longmapsto A_\mu = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu = \sum_{n \geq 0} T^n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} \mu.$$

En fait tout vient du classique thm. de Mahler qui assure que toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathcal{O}_L$ s'écrit uniquement $f = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$ avec des $a_n \to 0$. Des formalités entraînent aussitôt $(*)$

Vu (1) et $(*)$, il est clair que $D^+_W(\pi) \simeq T k_L[[T]]$ comme $k_L[[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]] \simeq k_L[[T]]$ modules. Il reste à vérifier la compatibilité avec φ et Γ et c'est de ceci que sort le twist par $\omega\delta_1^{-1}$. C'est purement formel.

<u>Remarque</u> : on a aussi obtenu l'isomorphisme

$$D^{\natural}_{W}(\pi) \xrightarrow[\mathcal{O}_L[[T]] \text{ modules}]{\sim} k_L[[T]]/_T \oplus k_L[[T]]$$

En effet, il suffit d'utiliser (2) et de contempler les actions de $1+T \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de chaque coté !