COHOMOLOGIE p-ADIQUE DE LA TOUR DE DRINFELD : LE CAS DE LA DIMENSION 1

par

Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu & Wiesława Nizioł

Résumé. — Nous calculons la cohomologie étale géométrique p-adique des revêtements du demi-plan de Drinfeld, et, dans le cas où le corps de base est $\mathbf{Q}_p$, montrons qu'elle réalise la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations de de Rham de dimension 2 (à poids 0 et 1).

Abstract. — We compute the p-adic geometric étale cohomology of the coverings of Drinfeld half-plane, and we show that, if the base field is $\mathbf{Q}_p$, this cohomology encodes the p-adic local Langlands correspondence for 2-dimensional de Rham representations (of weight 0 and 1).

Table des matières

Introduction

Soient F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et C le complété d'une clôture algébrique de F. On note $\mathscr{G}_F$ le groupe de Galois absolu de F et W_F (resp. WD_F) son groupe de Weil (resp. de Weil-Deligne).

Les trois auteurs sont membres du projet Percolator de l'ANR (projet ANR-14-CE25).

Grâce aux travaux de [**30, 32, 33, 41, 42**], on sait que la cohomologie étale ℓ-adique de la tour de Drinfeld, pour $\ell \neq p$, encode les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales classiques pour $\mathrm{GL}_n(F)$. Le but de cet article est d'expliquer que (au moins pour $n = 2$) :

• (vraisemblablement) la cohomologie étale p-adique encode l'hypothétique correspondance de Langlands p-adique,

• (accessoirement) la cohomologie étale p-adique d'objets du genre des revêtements étales des espaces de Drinfeld n'est pas aussi abominable que ce que l'on aurait pu penser.

Une première indication que ceci pourrait être le cas est le résultat suivant de Drinfeld [**27**], dans lequel $\Omega_{\mathrm{Dr}} = \mathbf{P}^1_C - \mathbf{P}^1(F)$ désigne le demi-plan de Drinfeld, $\mathrm{St}^{\mathrm{cont}}_{\mathbf{Q}_p}$ la steinberg continue [(1)] à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$ et $(\mathrm{St}^{\mathrm{cont}}_{\mathbf{Q}_p})^*$ son dual continu.

Proposition 0.1. — *On a un isomorphisme de* $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathscr{G}_F$*-représentations*

$$H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Q}_p(1)) \cong (\mathrm{St}^{\mathrm{cont}}_{\mathbf{Q}_p})^*,$$

l'action de $\mathscr{G}_F$ *sur le membre de droite étant, par définition, triviale.*

Ce résultat est encourageant car il montre que la cohomologie étale p-adique de Ω_{Dr} est un objet de taille raisonnable (c'est une représentation co-admissible de $\mathrm{GL}_2(F)$). Il est quand même un peu trompeur car, comme nous le verrons, la cohomologie étale p-adique des revêtements du demi-plan de Drinfeld est loin d'être aussi simple : en particulier, elle n'est pas co-admissible.

Un peu plus précisément, nous montrons que, si $F = \mathbf{Q}_p$ et en dimension 1, la cohomologie étale p-adique de la tour $\mathscr{M}_\infty$ de Drinfeld encode la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, à poids de Hodge-Tate 0 et 1, dont la représentation de Weil-Deligne associée est irréductible, ce qui fournit une construction géométrique de cette correspondance (pour ces représentations particulières) : si V est une telle représentation,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}}(V, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))) = \mathrm{JL}(V) \otimes \Pi(V)^*,$$

où $\mathrm{JL}(V)$ et $\Pi(V)$ sont les objets associés à V via les correspondances de Jacquet-Langlands locale classique [**44**] et de Langlands locale p-adique [**16, 21**]. L'énoncé analogue pour la cohomologie étale ℓ-adique est valable pour tout F, toute dimension d, et toute $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible V de W_F, de dimension d.

Un obstacle pour étendre nos résultats à d'autres cas est l'absence [(2)] de correspondance de Langlands locale p-adique pour d'autres groupes que $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais la formule ci-dessus a un sens en général, et on peut espérer que ce qui en sort a un lien avec l'hypothétique correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_n(F)$.

1. C'est le quotient de l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(F), \mathbf{Q}_p)$ des fonctions continues sur $\mathbf{P}^1(F)$, à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$, par celui des fonctions constantes.
2. En dehors des candidats de [**5**].

Pour énoncer précisément nos résultats, nous allons avoir besoin d'introduire un certain nombre d'objets et de notations.

0.1. Les revêtements du demi-plan de Drinfeld. — Soient :

• $\mathscr{O}_F$ l'anneau de ses entiers et ϖ une uniformisante de F,

• $G = \mathbf{GL}_2(F)$,

• $\check{G}$ le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de quaternions D de centre F, $\mathscr{O}_D$ l'ordre maximal de D, et ϖ_D une uniformisante de $\mathscr{O}_D$.

Le demi-plan p-adique (de Drinfeld) $\mathbf{P}^1_F - \mathbf{P}^1(F)$ admet une structure naturelle d'espace analytique rigide $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$ sur F, et une action de G par homographies, qui respecte cette structure. Drinfeld a défini une tour de revêtements $\breve{\mathscr{M}}_n$, pour $n \in \mathbf{N}$, de ce demi-plan, vérifiant les propriétés suivantes :

• $\breve{\mathscr{M}}_n$ est défini sur $\breve{F} = \widehat{F^{\mathrm{nr}}}$ et muni d'une action de W_F compatible avec l'action naturelle sur $\breve{F}$.

• $\breve{\mathscr{M}}_n$ est muni d'actions de G et de $\check{G}$ commutant entre elles ainsi qu'avec l'action de W_F, et les flèches de transition $\breve{\mathscr{M}}_{n+1} \to \breve{\mathscr{M}}_n \to \Omega_{\mathrm{Dr},F}$ sont W_F, $\check{G}$ et G-équivariantes (l'action de $\check{G}$ sur $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$ étant l'action triviale).

• Si $n \geq 1$, alors $\breve{\mathscr{M}}_n$ est un revêtement galoisien de $\breve{\mathscr{M}}_0$, de groupe de Galois $\mathscr{O}_D^*/(1 + \varpi_D^n \mathscr{O}_D)$.

On note simplement $\mathscr{M}_n$ l'extension des scalaires de $\breve{\mathscr{M}}_n$ à C :

$$\mathscr{M}_n = C \times_{\breve{F}} \breve{\mathscr{M}}_n.$$

On note $\mathscr{M}_\infty$ le système projectif (non complété) des $\mathscr{M}_n$: si $H^\bullet$ est un théorie cohomologique raisonnable, contravariante, alors $H^\bullet(\mathscr{M}_\infty) = \varinjlim_n H^\bullet(\mathscr{M}_n)$; par exemple, $\mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty) = H^0(\mathscr{M}_\infty, \mathscr{O}) = \varinjlim_n H^0(\mathscr{M}_n, \mathscr{O}) = \varinjlim_n \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)$.

Si $H = G, \check{G}, \mathrm{W}_F$, on dispose d'un morphisme de groupes naturel $\nu_H : H \to F^*$, où $\nu_G = \det$, $\nu_{\check{G}}$ est la norme réduite, et ν_{W_F} est le composé de $\mathrm{W}_F \to \mathrm{W}_F^{\mathrm{ab}}$ et de l'isomorphisme $\mathrm{W}_F^{\mathrm{ab}} \cong F^*$ de la théorie locale du corps de classes. L'ensemble $\pi_0(\mathscr{M}_\infty)$ des composantes connexes de $\mathscr{M}_\infty$ est un espace homogène principal sous l'action de F^* et $H = G, \check{G}, \mathrm{W}_F$ agit sur $\pi_0(\mathscr{M}_\infty)$ à travers $\nu_H : H \to F^*$. En particulier, $\check{G}$ agit sur $\pi_0(\mathscr{M}_\infty)$ à travers la norme réduite (ces assertions se déduisent, par exemple, de **[59]** et de la comparaison avec la tour de Lubin-Tate **[30, 33]**).

0.2. Cohomologie étale de $\mathscr{M}_\infty$ et correspondance de Langlands locale

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si V est une L-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, à poids 0 et 1, on associe à V les objets suivants [(3)]

• un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$,

3. $\mathrm{WD}(V)$ est obtenue à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)[1]$ par la recette de Fontaine **[35]**, $\mathrm{LL}(V)$ à partir de $\mathrm{WD}(V)$ par la correspondance de Langlands locale et $\mathrm{JL}(V)$ à partir de $\mathrm{LL}(V)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands locale, $\Pi(V)$ est la représentation associée à V par la correspondance de Langlands locale p-adique **[16, 21]**.

- une L-représentation[4] $\mathrm{WD}(V) := \mathrm{WD}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)[1])$ de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2,
- une L-représentation lisse irréductible[5] $\mathrm{LL}(V) := \mathrm{LL}(\mathrm{WD}(V))$ de G,
- une L-représentation lisse irréductible[6] $\mathrm{JL}(V) := \mathrm{JL}(\mathrm{LL}(V))$ de $\check{G}$,
- une L-représentation unitaire continue $\Pi(V)$ de G.

Les représentations $\mathrm{WD}(V)$, $\mathrm{LL}(V)$ et $\mathrm{JL}(V)$ ne dépendent que du L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, mais pas $\Pi(V)$ qui, elle, dépend vraiment de V. On retrouve $\mathrm{LL}(V)$ à partir de $\Pi(V)$ en prenant les vecteurs localement constants sous l'action de G (cf. [**16, 29, 25, 17**]) :

$$\mathrm{LL}(V) = \Pi(V)^{\mathrm{lisse}}.$$

On dit que V est *supercuspidale* si $\mathrm{WD}(V)$ est irréductible (auquel cas $\mathrm{LL}(V)$ est supercuspidale), ce qui implique, en particulier, que $N = 0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ (i.e. V est potentiellement cristalline).

Théorème 0.2. — *Soit V une L-représentation absolument irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension ≥ 2.*

(i) *Si V est supercuspidale, de dimension* 2, *à poids* 0 *et* 1,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}}(V, L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))) = \mathrm{JL}(V) \otimes_L \Pi(V)^*.$$

(ii) *Dans le cas contraire,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}}(V, L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))) = 0$.

Remarque 0.3. — (i) Le th. 0.2 devrait pouvoir s'étendre aux représentations supercuspidales de poids quelconques en remplaçant $\mathbf{Q}_p(1)$ par les puissances symétriques du module de Tate du groupe p-divisible universel au-dessus de $\mathscr{M}_\infty$.

(ii) Il serait intéressant de déterminer la structure complète du $G \times \check{G} \times \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))$. On peut peut-être espérer une réponse à la Emerton [**29**], i.e. une décomposition suivant les représentations résiduelles $\bar{\rho}$ de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ faisant intervenir l'anneau des déformations universelles de $\bar{\rho}$ à poids 0 et 1 et type fixé. Nous espérons pouvoir revenir sur ce problème dans un travail ultérieur.

(iii) Pour faire le lien avec les résultats de Scholze [**54**], il faudrait considérer la cohomologie de la tour complétée (qui est un espace perfectoïde) et probablement faire intervenir une dualité car il part de représentations admissibles de G alors que les représentations qui sortent de nos calculs sont coadmissibles et pas admissibles.

Les caractères centraux de $\mathrm{LL}(V)$ et $\mathrm{JL}(V)$ sont égaux et coïncident avec $\det \mathrm{WD}(V) \cdot |\ |$ (vu comme caractère de $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Q}_p^*$, le frobenius arithmétique s'envoyant sur p) et avec la restriction de $\det V \cdot \chi_{\mathrm{cyclo}}^{-1}$ à $W_{\mathbf{Q}_p}$ (on a $\mathrm{WD}(V) = \mathrm{WD}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \otimes |\ |^{-1}$).

4. Le [1] signifie que l'on multiplie par p l'action de φ, i.e. $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)[1] = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(-1))$ si $V(-1)$ désigne la tordue de V par l'inverse du caractère cyclotmique.

5. De dimension infinie.

6. Donc de dimension finie.

0.3. Cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato. — La preuve du th. 0.2 fait intervenir la cohomologie proétale de $\mathscr{M}_\infty$: on récupère la cohomologie étale en considérant les classes de cohomologie proétale dont l'orbite sous l'action de G est bornée. Les théorèmes de comparaison relient la cohomologie proétale aux cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato et nous allons commencer par décrire ces dernières.

Pour énoncer le résultat, nous allons privilégier le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)[1]$ plutôt que la représentation V. Les recettes utilisées plus haut fournissent, si M est un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module (i.e. un $L\otimes \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-module muni d'actions d'un frobenius semi-linéaire φ, d'un opérateur N tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action semi-linéaire lisse de $\mathscr{G}_F$), de rang 2 :

- une L-représentation $\mathrm{WD}(M)$ de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2,
- une L-représentation lisse irréductible $\mathrm{LL}(M)$ de G,
- une L-représentation lisse irréductible (et donc de dimension finie) $\mathrm{JL}(M)$ de $\check{G}$.

(Si $M = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)[1]$, on a $\mathrm{WD}(V) = \mathrm{WD}(M)$, $\mathrm{LL}(V) = \mathrm{LL}(M)$ et $\mathrm{JL}(V) = \mathrm{JL}(M)$.)

On dit que M est *supercuspidal*, si $\mathrm{WD}(M)$ est irréductible. Notons que, si M est supercuspidal, les pentes de φ sont toutes égales à un même nombre rationnel que nous appellerons *la pente de* M.

Si $n \in \mathbf{N}$, nous montrons (cf. § A.3) que $\mathscr{M}_n$ possède un modèle semi-stable $G \times \check{G} \times \mathscr{G}_F$-équivariant sur l'anneau $\mathscr{O}_K$ des entiers d'une extension finie K de $\check{F}$: on choisit un sous-groupe cocompact Γ de G opérant librement et sans point fixe sur l'arbre de Bruhat-Tits, de telle sorte que $X_n(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathscr{M}_n$ soit une courbe propre et lisse ; on choisit alors K tel que $X_n(\Gamma)$ ait un modèle semi-stable sur $\mathscr{O}_K$ et on fait le produit fibré des modèles semi-stables minimaux de $X_n(\Gamma)$ et Ω_{Dr} sur $\mathscr{O}_K$ au-dessus de celui de $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\Omega_{\mathrm{Dr}}$.

On dispose des groupes de cohomologie de de Rham $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_\infty)$ et, grâce à ce qui précède, de Hyodo-Kato $H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_\infty)$, de $\mathscr{M}_\infty$: le premier est un C-espace vectoriel, le second un $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module sur $\breve{\mathbf{Q}}_p$, les deux sont des ind-fréchets, et on a un isomorphisme naturel **[39]** (*de Hyodo-Kato*)

$$\iota_{\mathrm{HK}} : C\widehat{\otimes}_{\breve{\mathbf{Q}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_\infty) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_\infty).$$

Si M est supercuspidal, de rang 2, on pose

$$\breve{M} = \breve{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M, \quad M_{\mathrm{dR}} = (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\mathscr{G}_F}.$$

Alors M_{dR} est un $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F$-module libre de rang 2.

Théorème 0.4. — *Il existe un diagramme commutatif naturel de G-fréchets*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}(\mathrm{JL(M)}, L\otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_\infty)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \breve{M}\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\mathrm{JL}(M), L\otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_\infty)\big) \arrow[r, "\sim"] & C\widehat{\otimes}_F M_{\mathrm{dR}}\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^*
\end{tikzcd}$$

la flèche à gauche étant induite par l'isomorphisme de Hyodo-Kato et celle à droite par l'identification $M_{\mathrm{dR}} \otimes_F C = M \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} C = \breve{M} \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} C$. Toutes les flèches commutent à l'action de $\mathscr{G}_F$ et la flèche horizontale du haut commute en plus à φ.

Remarque 0.5. — La partie pour la cohomologie de de Rham et pour $F = \mathbf{Q}_p$ a été établie dans [**26**], et notre preuve du théorème est une adaptation de celle de [**26**] : des méthodes globales (i.e. l'utilisation de courbes de Shimura obtenues comme quotients de $\mathscr{M}_n$) montrent l'existence d'un plongement du terme de droite dans celui de gauche (prop. 5.7) et il s'agit de prouver qu'il n'y a rien de plus dans le membre de gauche. Dans [**26**], cela se fait en utilisant la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Comme une telle correspondance est encore hypothétique si $F \neq \mathbf{Q}_p$, nous utilisons (n° 5.3.2), à la place, l'isomorphisme avec la cohomologie de la tour de Lubin-Tate (th. 0.6 ci-dessous) pour laquelle on peut utiliser la théorie de Lubin-Tate non abélienne [**7, 42**] pour contrôler la dimension des invariants par des sous-groupes ouverts compacts de G.

Soient $(\mathrm{LT}_j)_{j\geq 0}$ la tour de Lubin-Tate et LT_∞ la limite projective des LT_j. Fixons une uniformisante ϖ de F et notons simplement $\mathrm{LT}_\infty^\varpi$ et $\mathscr{M}_\infty^\varpi$ les quotients de LT_∞ et $\mathscr{M}_\infty$ par l'action de ϖ vu comme élément du centre de $\check{G}$.

Théorème 0.6. — *On a un isomorphisme naturel*

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}_\infty^\varpi) \simeq H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_\infty^\varpi)$$

qui munit les deux membres d'une structure de $C[G\times\check{G}]$-module lisse, admissible déjà en tant que G-module.

Remarque 0.7. — (i) Les limites projectives complétées $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ et $\widehat{\mathscr{M}}_\infty$ des tours de Lubin-Tate et Drinfeld sont des espaces perfectoïdes [**55**, th. 6.5.4, 7.2.3], isomorphes, mais l'isomorphisme du th. 0.6 est quand même un peu surprenant car les espaces perfectoïdes n'ont pas de cohomologie de de Rham digne de ce nom (extraire des racines d'ordre p^∞ et compléter rend la dérivation problématique).

(ii) Il est raisonnable de penser que ce résultat s'étend en dimension quelconque. Si on remplace la cohomologie de de Rham à support compact par la cohomologie ℓ-adique à support compact (avec $\ell \neq p$), on dispose d'un résultat très général de dualité dû à Scholze [**53**, prop. 5.4].

0.4. Cohomologie proétale. — Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module supercuspidal, de rang 2. Si Z est un $\mathbf{Q}_p[\check{G}]$-module, on pose

$$Z[M] = \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}(\mathrm{JL}(M), L\otimes_{\mathbf{Q}_p} Z).$$

Le résultat suivant fournit une description de $H^1_{\mathrm{proét}}(\mathscr{M}_\infty)$ comme $G\times W_F$ représentation. C'est le point de départ de la preuve du th. 0.2. On pose

$$X^+_{\mathrm{st}}(M) = (\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{N=0,\varphi=p}.$$

Théorème 0.8. — *Il existe un diagramme commutatif de $G\times W_F$-fréchets, à lignes exactes,*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty)[M] \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty, L(1))[M] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & X^+_{\mathrm{st}}(M)\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty)[M] \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathscr{M}_\infty)[M] \arrow[r] & (C\otimes_F M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le lecteur trouvera des indications sur la preuve de cet énoncé au § 0.6.

0.5. La conjecture de Breuil-Strauch. — On suppose $F=\mathbf{Q}_p$ dans ce paragraphe. Si M est supercuspidal de rang 2, alors $M_{\mathrm{dR}}=(\overline{\mathbf{Q}}_p\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un L-espace de rang 2. Si $\mathscr{L}$ est une L-droite de M_{dR}, on définit la représentation $V_{M,\mathscr{L}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par

$$V_{M,\mathscr{L}}=\mathrm{Ker}\big((\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\varphi=p}\to C\otimes_{\mathbf{Q}_p}(M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L})\big).$$

Il résulte de **[22]** que $V_{M,\mathscr{L}}$ est une représentation supercuspidale à poids 0 et 1 et toute telle représentation est de la forme $V_{M,\mathscr{L}}$ pour un unique couple $(M,\mathscr{L})$.

On a alors le résultat suivant **[26]**, conjecturé par Breuil et Strauch (non publié), et qui constitue le premier résultat tangible reliant la correspondance de Langlands locale p-adique à la tour de Drinfeld.

Proposition 0.9. — *L'inclusion de $\mathscr{L}$ dans M_{dR} donne naissance à un diagramme commutatif de G-fréchets, à lignes exactes, où $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ est l'espace des vecteurs localement analytiques de $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)[M] \arrow[r] \arrow[d, equal] & C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}(\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}})^* \arrow[r] \arrow[d] & (C\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{L})\widehat{\otimes}\mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathscr{M}_n)[M] \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathscr{M}_n)[M] \arrow[r] & (C\otimes_{\mathbf{Q}_p} M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour déduire le th. 0.2 de cet énoncé, on utilise le fait que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, L\otimes C)$ et $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, X^+_{\mathrm{st}}(M))$ sont tous les deux de dimension 1 sur L, et on compare le diagramme obtenu en appliquant $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}},-)$ au diagramme du th. 0.8 à celui de la prop. 0.9. On en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}\times \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}]}(\mathrm{JL}(M)\otimes V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty,\mathbf{Q}_p(1)))=(\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}})^*.$$

On utilise alors le fait (prop. 2.12) que $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty,\mathbf{Q}_p(1)))$ est l'ensemble des éléments de $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty,\mathbf{Q}_p(1)))$ dont l'orbite sous l'action de G est bornée, et que $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})$ est le complété universel de $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ d'après **[18]**, ce qui, par dualité, se traduit par le fait que $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^*$ est l'ensemble des éléments G-bornés de $(\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}})^*$; on en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{L[\check{G}\times \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}]}(\mathrm{JL}(M)\otimes V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty,\mathbf{Q}_p(1)))=\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^*,$$

ce qui fournit la moitié du th. 0.2 ; le reste repose sur une combinatoire difficile à résumer (cf. n° 2.2.3), mais qui utilise le fait que, si V est irréductible et n'est pas de la forme $V_{M,\mathscr{L}}$, alors $\dim_L \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, L\otimes C) > \dim_L \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, X_{\mathrm{st}}^+(M))$ sauf si les deux termes sont nuls auquel cas il n'y a rien à faire.

0.6. Le diagramme fondamental. — Il y a plusieurs manières d'établir l'existence du diagramme du th. 0.8. On en présente deux ci-dessous : la première est développée dans **[19]** où l'on trouvera aussi une troisième approche utilisant l'intégration p-adique sur les courbes **[10, 11, 12, 13]**, et la seconde est celle utilisée dans l'article.

0.6.1. Cohomologie syntomique. — L'approche la plus naturelle est probablement de passer par la cohomologie syntomique car le lien avec le complexe de de Rham est inscrit dans la définition même de la cohomologie syntomique. Cette approche se généralise bien en dimension supérieure **[20]**.

Soit X une courbe analytique sur C avec un modèle semi-stable $\mathscr{X}$ sur l'anneau des entiers $\mathscr{O}_K$ d'un sous-corps fermé de C de valuation discrète. On suppose que X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. On note $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)$ le complexe calculant la cohomologie cristalline absolue de $\mathscr{X}\times\mathscr{O}_C$. Par définition de la cohomologie syntomique **[34, 50]**, on dispose d'un diagramme commutatif de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X,\mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)^{\varphi=p} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)/\mathrm{Fil}^1 \arrow[d, equal] \\
(0\to\Omega^1) \arrow[r] & (\mathscr{O}\to\Omega^1) \arrow[r] & (\mathscr{O}\to 0)
\end{tikzcd}$$

dans lequel :

- la ligne du haut est la définition de $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X,\mathbf{Q}_p(1))$, celle du bas est évidente.
- L'application γ est induite par la composée de $\iota_{\mathrm{can}} : \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)^{\varphi=p}\to\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)$ et de $\theta : \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)\to\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(X)$.
- L'application β est induite par la composée de l'application naturelle $\tilde\beta$: $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X,\mathbf{Q}_p(1))\to\mathrm{Fil}^1\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)$ provenant de la définition de $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(X,\mathbf{Q}_p(1))$ et de $\theta : \mathrm{Fil}^1\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)\to(0\to\Omega^1)$.

En passant à la cohomologie, et en utilisant l'isomorphisme entre la cohomologie (pro)étale et la cohomologie syntomique **[23, 61]**, cela fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C\otimes\mathbf{Z}[\pi_0(X)] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X,\mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{HK}^1_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & H^1(X,\mathscr{O}) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & C\otimes\mathbf{Z}[\pi_0(X)] \arrow[r] & \mathscr{O}(X) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(X) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{dR}}(X) \arrow[r] & H^1(X,\mathscr{O})
\end{tikzcd}$$

où l'on a noté $\mathrm{HK}^1_1(X)$ le groupe $H^1(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cris}}(X)^{\varphi=p})$.

Si X est un affinoïde ou une courbe de Stein (cas qui nous intéresse), on a $H^1(X,\mathscr{O})=0$. Si X est une courbe propre, le théorème de comparaison semi-stable fournit un isomorphisme $\mathrm{HK}_1^1(X) \cong (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes H_{\mathrm{HK}}^1(X))^{N=0,\varphi=p}$. Par contre, si X est un affinoïde, le groupe $\mathrm{HK}_1^1(X)$ est fort peu sympathique : en particulier, c'est un espace topologique non séparé. Heureusement, une courbe de Stein se comporte plus comme une courbe propre que comme un affinoïde, et on peut montrer [**19**], en faisant un peu de gymnastique, que l'on a encore un isomorphisme

$$\mathrm{HK}_1^1(X) \cong (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \widehat{\otimes} H_{\mathrm{HK}}^1(X))^{N=0,\varphi=p},$$

si X est une courbe de Stein (la différence avec le cas propre est que $H_{\mathrm{HK}}^1(X)$ est une limite projective d'espaces de dimension finie, et donc qu'il faut prendre un produit tensoriel complété).

Pour en déduire le th. 0.8, il suffirait d'appliquer ce qui précède à $X = \mathscr{M}_n^{\varpi}$ (cf. § 5.1 pour le passage de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ à $\mathscr{M}_n$), d'appliquer le foncteur $Z \mapsto Z[M]$, et d'utiliser le th. 0.4 pour faire apparaître la colonne de droite (et le fait que $\check{G}$ agit par la norme réduite sur $\pi_0(\mathscr{M}_n^{\varpi})$ et donc que $(\mathbf{Z}[\pi_0(X)])[M] = 0$).

0.6.2. Cohomologie des anneaux de Fontaine relatifs. — Une autre approche possible, et c'est celle utilisée dans l'article car elle se marie bien avec les méthodes globales utilisées pour prouver le th. 0.4, consiste à utiliser les anneaux de Fontaine relatifs et les théorèmes de comparaison de Faltings et Scholze [**31, 52**]

On a un diagramme de faisceaux pour la topologie proétale, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Q}_p(1) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathscr{O}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{\mathscr{O}}(1) \arrow[r] & \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^2 \arrow[r] & \widehat{\mathscr{O}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Définissons le groupe $\widetilde{\mathrm{HK}}(X)$ par :

$$\widetilde{\mathrm{HK}}(X) = \mathrm{Ker}\big(H_{\text{proét}}^1(X, (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}) \to H_{\text{proét}}^1(X, \widehat{\mathscr{O}})\big).$$

Si X est une courbe propre, on déduit des théorèmes de comparaison un isomorphisme (cf. prop. 3.12)

$$\widetilde{\mathrm{HK}}(X) \cong (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes H_{\mathrm{HK}}^1(X))^{N=0,\varphi=p}.$$

Si maintenant X est une courbe de Stein, on déduit de [**53**, Lemma 3.24] que

$$H^0(X, \widehat{\mathscr{O}}) = \mathscr{O}(X) \quad \text{et} \quad H^1(X, \widehat{\mathscr{O}}) = \Omega(X)(-1).$$

D'où un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \otimes \mathbf{Z}[\pi_0(X)] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}(X) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H_{\text{proét}}^1(X, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & \widetilde{\mathrm{HK}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{can}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \otimes \mathbf{Z}[\pi_0(X)] \arrow[r] & \mathscr{O}(X) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(X) \arrow[r, "\pi_{\mathrm{dR}}"] & H_{\mathrm{dR}}^1(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Pour en déduire le th. 0.8, on utilise ce qui précède pour $X = \mathscr{M}_n^{\varpi}$ et on est réduit à calculer $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$. Pour cela, on commence par prouver que ι_{can} identifie

$\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]$ à un sous-espace fermé de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)$; cela implique, en utilisant le th. 0.4, qu'il existe Z tel que $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M] \cong Z\widehat{\otimes}\mathrm{LL}(M)^*$. Pour calculer Z, on utilise les quotients de $\mathscr{M}_n^\varpi$ par des sous-groupes cocompacts (de congruence) de G et le fait que, si X est une courbe propre, alors $\widetilde{\mathrm{HK}}(X) \cong (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes H^1_{\mathrm{HK}}(X))^{N=0,\varphi=p}$.

Remerciements. — Certaines parties de ce projet ont été réalisées lors de séjours au BICMR de Pékin (P.C.), au SCMS de l'université de Fudan à Shanghai (W.N. et P.C.), au Tata Institute de Bombay (W.N. et P.C.), à l'institut Mittag-Leffler (W.N.) ou au KIAS de Séoul (G.D.), et nous voudrions remercier ces institutions pour leur hospitalité. Nous voudrions aussi remercier Matt Baker et Michael Temkin pour leurs réponses détaillées à nos questions sur les modèles des courbes analytiques, ainsi que Antoine Ducros, Laurent Fargues, Luc Illusie, Arthur-César Le Bras, Qing Liu, Lue Pan, Takeshi Saito et Shanwen Wang pour leurs remarques, références ou explications.

1. La cohomologie du demi-plan de Drinfeld et la steinberg

Soient $K \subset L$ des sous-corps fermés de C. Si X_K est une variété analytique définie sur K, on note X_L son extension des scalaires à L, et simplement X l'extension des scalaires à C. Alors $\mathscr{G}_K = \mathrm{Aut}_{\mathrm{cont}}(C/K)$ agit sur X et sur tous les objets qui s'en déduisent.

1.1. Affinoïdes de $\mathbf{P}^1$. — Si Y est un affinoïde [7] défini sur C, on note :
- $\mathscr{O}^+(Y)$ le sous-anneau de $\mathscr{O}(Y)$ des fonctions à valeurs entières,
- $\mathscr{O}^{++}(Y)$ l'idéal $\mathfrak{m}_C \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}^+(Y)$ de $\mathscr{O}^+(Y)$,
- $\mathscr{O}(Y)^{**}$ le sous-groupe $1 + \mathscr{O}^{++}(Y)$ de $\mathscr{O}(Y)^*$.
- v_Y la valuation spectrale sur $\mathscr{O}(Y)$.

On a donc

$$\mathscr{O}^+(Y) = \{f \in \mathscr{O}(Y),\ v_Y(f) \geq 0\}, \quad \mathscr{O}^{++}(Y) = \{f \in \mathscr{O}(Y),\ v_Y(f) > 0\},$$
$$\mathscr{O}(Y)^{**} = \{f \in \mathscr{O}(Y),\ v_Y(f-1) > 0\}.$$

Si $x \in \mathbf{P}^1(C)$ et $r \geq 0$, on note $B^-(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de valuation r, avec la convention que $B^-(x,r) = \{z,\ v_p(z-x) > r\}$ si $x \in \mathscr{O}_C$ et $B^-(x,r) = \{z,\ v_p(z^{-1}-x^{-1}) > r\}$ pour $x \in \mathbf{P}^1(C) - \mathscr{O}_C$. Pour avoir des formules uniformes, notons $z-x$ le paramètre local $z^{-1}-x^{-1}$ de $B^-(x,r)$, si $x \in \mathbf{P}^1(C) - \mathscr{O}_C$.

Soit U un affinoïde connexe de $\mathbf{P}^1$. Il existe des boules ouvertes $B^-(x,r_x)$, pour $x \in X$, où X est fini et $X \not\ni \infty$, telles que

$$U = \mathbf{P}^1 - \bigcup_{x\in X} B^-(x,r_x).$$

D'après la proposition 2.5.10 de [**36**], on a le résultat suivant.

7. Tous nos affinoïdes sont réduits et munis de la valuation spectrale.

Proposition 1.1. — *Tout $f \in \mathscr{O}(U)^*$ peut s'écrire sous la forme*

$$f = c\,u \prod_{x\in X}(z-x)^{m_x}, \quad \text{avec } c \in C^*,\ u \in \mathscr{O}(U)^{**},\ m_x \in \mathbf{Z} \text{ et } \sum_{x\in X} m_x = 0.$$

Cette écriture est unique à $c \mapsto u_0 c$ et $u \mapsto u_0^{-1}u$ près, avec $u_0 \in 1 + \mathfrak{m}_C$.

Notons $\mathrm{LC}(X, \mathbf{Z})$ le $\mathbf{Z}$-module des fonctions $\phi : X \to \mathbf{Z}$ et $\mathrm{LC}(X, \mathbf{Z})^*$ son $\mathbf{Z}$-dual (c'est l'espace des mesures sur X à valeurs dans $\mathbf{Z}$). Un élément μ de $\mathrm{LC}(X, \mathbf{Z})^*$ est équivalent à la donnée de $m_x \in \mathbf{Z}$, pour $x \in X$: la mesure associée est $\phi \mapsto \int_X \phi\,\mu = \sum_{x\in X} m_x\phi(x)$ ou, de manière équivalente, $\mu = \sum_x m_x \mathrm{Dir}_x$ où Dir_x est la masse de Dirac en x. Si $\mu \in \mathrm{LC}(X, \mathbf{Z})^*$, on pose $\int_X \mu = \int_X \mathbf{1}_X\,\mu$. Le résultat suivant est alors une simple traduction de la proposition 1.1 ci-dessus.

Corollaire 1.2. — *On a une suite exacte de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(U)^{**}/(1+\mathfrak{m}_C) \longrightarrow \mathscr{O}(U)^*/C^* \longrightarrow \mathrm{LC}(X, \mathbf{Z})^* \xrightarrow{\mu\mapsto\int_X \mu} \mathbf{Z} \longrightarrow 0\ ,$$

où, si $x, y \in X$, l'image de $\frac{z-x}{z-y} \in \mathscr{O}(U)^*$ dans $\mathrm{LC}(X, \mathbf{Z})^*$ est $\mathrm{Dir}_x - \mathrm{Dir}_y$.

1.2. Le demi-plan de Drinfeld. — Rappelons que $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$ désigne l'espace analytique rigide $\mathbf{P}^1_F - \mathbf{P}^1(F)$, muni de l'action naturelle de G par homographies.

Si $n \geq 1$, soient

$$\mathscr{P}_n = \mathbf{P}^1(\mathscr{O}_F/\varpi^n) \quad \text{et} \quad U_n = \mathbf{P}^1 - \bigcup_{x\in\mathscr{P}_n} B^-(x, nv_p(\varpi)).$$

Les U_n sont des ouverts affinoïdes de Ω_{Dr} dont la réunion (croissante) est Ω_{Dr}. On dispose d'une application de réduction G-équivariante $r : \Omega_{\mathrm{Dr}} \to \mathscr{T}$, où $\mathscr{T}$ est l'arbre de Bruhat-Tits de G. Alors U_n est aussi l'image inverse par r du sous-arbre de $\mathscr{T}$ formé des sommets et arêtes à distance au plus n du sommet central. Notons que U_n est l'extension des scalaires à C d'un affinoïde $U_{n,F}$ de $\mathbf{P}^1_F$, et que $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$ est la réunion des $U_{n,F}$.

Soit $(\mathscr{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de modèles formels semi-stables de $\mathbf{P}^1_F$ sur $\mathscr{O}_F$ définie de la manière suivante : $\mathscr{X}_0 = \mathbf{P}^1_{\mathscr{O}_F}$ et $\mathscr{X}_n$ est obtenu à partir de $\mathscr{X}_{n-1}$ en éclatant les points lisses de $\mathscr{X}_{n-1}(k_F)$. La fibre spéciale de $\mathscr{X}_n$ est un arbre de $\mathbf{P}^1$, de rayon n, centré en le $\mathbf{P}^1$ initial, chaque $\mathbf{P}^1$ sauf les $\mathbf{P}^1$ extrémaux (ce sont ceux obtenus par éclatement des points lisses de $\mathscr{X}_{n-1}(k_F)$, ce sont aussi ceux à distance n du centre) rencontrant $q+1$ autres $\mathbf{P}^1$.

On note $\mathscr{U}_n$ le sous-schéma formel de $\mathscr{X}_n$ obtenu en retirant les points lisses de $\mathscr{X}_n(k_F)$. La fibre générique de $\mathscr{U}_n$ est l'affinoïde $U_{n,F}$ ci-dessus. Alors $\mathscr{U}_n$ est un ouvert de $\mathscr{U}_{n+1}$ pour tout n et la réunion croissante $\mathscr{U}_\infty$ de $\mathscr{U}_n$ est un modèle semi-stable de $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$. L'action de G sur $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$ se prolonge à ce modèle (car G permute les préimages des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathscr{U}_\infty$).

Lemme 1.3. — *Si $f \in \mathscr{O}^+(U_{n+1})$ s'annule sur U_n, alors $f \in \varpi\mathscr{O}^+(U_n)$.*

Démonstration. — $\mathscr{U}_n$ est inclus dans la réunion des composantes irréductibles non extrémales de $\mathscr{U}_{n+1}$ qui sont des $\mathbf{P}^1$. On en déduit que f est constante sur chacune de ces composantes irréductibles, et donc aussi sur $\mathscr{U}_n$. Comme on a supposé que f s'annule sur U_n, cela implique que $f = 0$ sur $\mathscr{U}_n$ et donc $f \in \varpi\mathscr{O}^+(U_n)$. □

Notons $A_n = \mathscr{O}(U_n)$. Le lemme suivant rassemble un certain nombre de résultats concernant ces anneaux. On renvoie le lecteur à la section 2.7 de **[36]** (en particulier la preuve du théorème 2.7.6) pour plus de détails.

Lemme 1.4. — *On a*

(i) $\mathrm{Pic}(A_n) = 0$ *pour tout* n.

(ii) $\mathrm{R}^1 \varprojlim A_n^{\boldsymbol{*}} = 0$.

(iii) $\varprojlim A_n^{**} = 1 + \mathfrak{m}_C$ *et* $\mathrm{R}^1 \varprojlim A_n^{**} = 0$.

Démonstration. — (i) est une simple conséquence du fait que $U_{n,C}$ sont des affinoïdes connexes de $\mathbf{P}^1_C$, donc les A_n sont des anneaux principaux.

(ii) Cela découle de la surjectivité de l'application $\prod_n A_n^{\boldsymbol{*}} \to \prod_n A_n^{\boldsymbol{*}}$ envoyant $(f_1, f_2, ...)$ sur $(f_1/f_2, f_2/f_3, ...)$, qui elle-même est une conséquence de la description de $A_n^{\boldsymbol{*}}$ fournie par la proposition 1.1.

(iii) Fixons un point $Q \in U_1$. Si $(f_n)_n \in \varprojlim A_n^{**}$. on peut écrire $f_n = a\cdot(1+g_n)$ avec $a = f_1(Q) = f_n(Q)$ et donc $g_n(Q) = 0$, et $v_{U_n}(g_n) > 0$ pour tout n. On en déduit, en utilisant le lemme 1.3, que $v_{U_n}(g_n) \geq v_p(\varpi)$ pour tout n. Une récurrence immédiate montre que $v_{U_n}(g_n) \geq kv_p(\varpi)$ pour tous n et k, d'où $g_n = 0$ pour tout n et $\varprojlim A_n^{**} = 1+\mathfrak{m}_C$. Un argument similaire montre que si $f_n \in A_n^{**}$, le produit $\prod_{k\geq n} \frac{f_k}{f_k(Q)}$ converge dans A_n^{**}, ce qui permet de démontrer la nullité de $\mathrm{R}^1 \varprojlim A_n^{**}$. □

1.3. La steinberg et ses variantes

1.3.1. Fonctions sur $\mathbf{P}^1(F)$. — Si Λ est un anneau topologique, on note $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda)$ (resp. $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda)$) l'espace des fonctions localement constantes (resp. continues) sur $\mathbf{P}^1(F)$ à valeurs dans Λ. Comme $\mathbf{P}^1(F)$ est la limite projectives des $\mathscr{P}_n$ qui sont des ensembles finis, on a $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda) = \varinjlim \mathrm{LC}(\mathscr{P}_n, \Lambda)$, et $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda)$ est dense dans $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda)$ si Λ est un anneau topologique.

Si L est un sous-corps fermé de C contenant F, on note $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(F), L)$ l'espace des fonctions localement F-analytiques sur $\mathbf{P}^1(F)$ à valeurs dans L.

Comme $\mathbf{P}^1(F)$ est muni d'une action de G (par homographies), cela munit les espaces ci-dessus d'une action de G qui est lisse, (i.e. localement constante) sur $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda)$, continue sur $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(F), \Lambda)$ et localement F-analytique sur $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(F), L)$. On note $\mathrm{St}_\Lambda^{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{St}_\Lambda^{\mathrm{cont}}$ et $\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}}$ les steinbergs lisse, continue et localement F-analytique, quotients respectifs des espaces ci-dessus par les fonctions constantes : ce sont des Λ (resp. L)-représentations de G.

Si L est un sous-corps fermé de C, alors $\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}}$ est un banach, et si L contient F, alors $\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}}$ est une limite inductive compacte de banachs. De plus :

• $\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}}$ (resp. $\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}}$) est l'ensemble des vecteurs localement analytiques (resp. lisses) de $\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}}$,

• $\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}}$ est le complété unitaire universel de $\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}}$ et de $\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}}$,

• $\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}}$ est fermée dans $\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}}$ et la topologie de $\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}}$ induite par celle de $\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}}$ est la topologie convexe la plus fine.

1.3.2. Dualité. — Si Λ est un anneau topologique (la topologie discrète n'est pas exclue), et si M est un Λ-module topologique, on note M^* le Λ-module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(M,\Lambda)$, que l'on munit de la topologie faible.

Alors $(\mathrm{St}_\Lambda^{\mathrm{lisse}})^*$ est la limite projective des $\mathrm{Ker} : \mathrm{LC}(\mathscr{P}_n,\Lambda)^* \to \Lambda$, chacun des $\mathrm{LC}(\mathscr{P}_n,\Lambda)^*$ étant muni de la topologie discrète.

Si L est un sous-corps fermé de C, alors $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}})^*$, $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}})^*$ et $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}})^*$ sont respectivement les espaces des mesures, distributions et distributions algébriques, de masse totale 0 sur $\mathbf{P}^1(F)$. De plus :

• $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}})^*$ est un dual faible de banach et $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}})^*$ et $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}})^*$ sont des fréchets [(8)],

• les $\mathrm{Dir}_a - \mathrm{Dir}_b$, pour $a,b\in F$, engendrent un sous-espace dense des trois espaces,

• La restriction $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}})^* \to (\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}})^*$ est surjective, et $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}})^* \to (\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}})^*$ est injective, d'image dense, et identifie $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{cont}})^*$ à l'espace des vecteurs G-bornés de $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{an}})^*$.

1.4. Cohomologie de de Rham du demi-plan de Drinfeld

Proposition 1.5. — *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}})^*/C^* \simeq (\mathrm{St}_{\mathbf{Z}}^{\mathrm{lisse}})^*$$

envoyant $\frac{z-a}{z-b}$ *sur* $\mathrm{Dir}_a - \mathrm{Dir}_b$.

Démonstration. — Posons

$$A = \mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}}) = \varprojlim_n A_n,$$

avec $A_n = \mathscr{O}(U_n)$. Le cor. 1.2 fournit des suites exactes

$$0 \to A_n^{**}/(1+\mathfrak{m}_C) \to A_n^*/C^* \to \mathrm{LC}(\mathscr{P}_n,\mathbf{Z})^* \to \mathbf{Z} \to 0,$$

et donc, en passant à limite et en utilisant le lemme 1.4, une suite exacte

$$0 \to A^*/C^* \to \mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(F),\mathbf{Z})^* \to \mathbf{Z} \to 0,$$

qui fournit l'isomorphisme annoncé. Que $\frac{z-a}{z-b}$ soit envoyé sur $\mathrm{Dir}_a - \mathrm{Dir}_b$ se voit facilement en revenant aux définitions dans le cor. 1.2 □

Proposition 1.6. — (i) *L'application* $\mu \mapsto \int_{\mathbf{P}^1(F)} \frac{dz}{z-x}\,\mu(x)$ *induit un isomorphisme*

$$(\mathrm{St}_C^{\mathrm{an}})^* \cong \Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr}}).$$

8. Plus précisément, $(\mathrm{St}_L^{\mathrm{lisse}})^*$ est une limite projective dénombrable d'espaces de dimension finie.

(ii) *L'application qui envoie $f \in A^*$ sur son symbole $(f)_{\mathrm{dR}} = \frac{df}{f}$ en cohomologie de de Rham induit un isomorphisme*

$$C\widehat{\otimes}(\mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}})^*/C^*) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}).$$

(iii) *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{St}_C^{\mathrm{an}})^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[dl] & \Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr}}) \arrow[dr] & \\
(\mathrm{St}_C^{\mathrm{lisse}})^* \arrow[r, equal] & C\widehat{\otimes}(\mathrm{St}_{\mathbf{Z}}^{\mathrm{lisse}})^* & C\widehat{\otimes}(\mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}})^*/C^*) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr}})
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de G-représentations.

Démonstration. — Les descriptions de $\Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr}})$ et de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega_{\mathrm{Dr}})$ en termes de représentations de Steinberg sont parfaitement standard, cf. [**48**] et la discussion suivant le théorème 5 dans [**58**]. Le reste se déduit de la proposition ci-dessus. □

1.5. Cohomologie étale p-adique du demi-plan de Drinfeld. — Le résultat suivant est dû à Drinfeld [**27**].

Théorème 1.7. — *On a des isomorphismes de $G \times \mathscr{G}_F$-modules pour tout $k \geq 1$,*

$$H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Z}/p^k(1)) \simeq (\mathrm{St}^{\mathrm{lisse}}_{\mathbf{Z}/p^k})^*,$$

et donc aussi des isomorphismes de $G \times \mathscr{G}_F$-modules

$$H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Z}_p(1)) \simeq (\mathrm{St}^{\mathrm{cont}}_{\mathbf{Z}_p})^*, \quad H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Q}_p(1)) \simeq (\mathrm{St}^{\mathrm{cont}}_{\mathbf{Q}_p})^*.$$

Démonstration. — La troisième assertion se déduit de la seconde en tensorisant par $\mathbf{Q}_p$ et la seconde de la première par passage à la limite : $(\mathrm{St}^{\mathrm{lisse}}_{\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}})^* = (\mathrm{St}^{\mathrm{cont}}_{\mathbf{Z}_p})^*/p^k$. Il suffit donc de démontrer la première assertion. On a

$$H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Z}/p^k(1)) \simeq A^*/(A^*)^{p^k}.$$

En effet, la suite exacte de Kummer $0 \to \mathbf{Z}/p^k(1) \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^k} \mathbb{G}_m \to 0$ fournit la suite exacte courte

$$0 \to A^*/(A^*)^{p^k} \to H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Z}/p^k(1)) \to H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbb{G}_m)_{p^k} \to 0$$

Il suffit donc de prouver que $H^1_{\text{ét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbb{G}_m) = 0$, ce qui résulte de la nullité de $\mathrm{Pic}(A_n)$ et $\mathrm{R}^1 \varprojlim A_n^*$.

Maintenant, $A^*/(A^*)^{p^k} \simeq (A^*/C^*)/(A^*/C^*)^{p^k}$. On conclut utilisant la prop. 1.5 et en remarquant que $(\mathrm{St}^{\mathrm{lisse}}_{\mathbf{Z}})^*/p^k \simeq (\mathrm{St}^{\mathrm{lisse}}_{\mathbf{Z}/p^k})^*$. □

1.6. Cohomologie proétale du demi-plan de Drinfeld

Théorème 1.8. — *On a une suite exacte de $G \times \mathscr{G}_F$-modules*

$$0 \to \mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}})/C \to H^1_{\text{proét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Q}_p(1)) \to (\mathrm{St}^{\text{lisse}}_{\mathbf{Q}_p})^* \to 0,$$

Démonstration. — Comme $\mathrm{R}^1 \varprojlim H^0_{\text{proét}}(U_n, \mathbf{Q}_p(1)) = 0$, on obtient un isomorphisme

$$H^1_{\text{proét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Q}_p(1)) \simeq \varprojlim H^1_{\text{proét}}(U_n, \mathbf{Q}_p(1)).$$

L'espace U_n étant quasi-compact et séparé, on a

$$H^1_{\text{proét}}(U_n, \mathbf{Q}_p(1)) = H^1_{\text{ét}}(U_n, \mathbf{Q}_p(1)) = (\varprojlim H^1_{\text{ét}}(U_n, \mathbf{Z}/p^k(1))) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p = A^*_n \widehat{\otimes} \mathbf{Q}_p,$$

où $\widehat{\otimes}$ dénote le produit tensoriel complété.

Tensoriser la suite exacte du cor. 1.2 par $\mathbf{Q}_p$ fournit une suite exacte

$$0 \to (A^{**}_n/(1+\mathfrak{m}_C))\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p \to (A^*_n/C^*)\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p \to \mathrm{LC}(\mathscr{P}_n, \mathbf{Q}_p)^* \to \mathbf{Q}_p \to 0.$$

Le théorème s'en déduit en passant à la limite projective, en utilisant l'isomorphisme

$$(\mathrm{St}^{\text{lisse}}_{\mathbf{Q}_p})^* = \varprojlim_n \mathrm{Ker}\big(\mathrm{LC}(\mathscr{P}_n, \mathbf{Q}_p)^* \to \mathbf{Q}_p\big)\,,$$

la nullité de $\mathrm{R}^1 \varprojlim A_n$ (qui découle du fait que $(A_n)_n$ définit une algèbre de Fréchet-Stein) et l'isomorphisme de prosystèmes

$$((A^{**}_n/(1+\mathfrak{m}_C))\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p)_n \simeq (A_n/C)_n$$

que nous allons établir. Pour cela, fixons un point $Q \in U_1$ et notons $A^+_{n,Q}$ (resp. $A^{**}_{n,Q}$) l'ensemble des $g \in A^+_n$ (resp. $f \in A^{**}_n$) telles que $g(Q) = 0$ (resp. $f(Q) = 1$). On déduit du lemme 1.3 que, si $kv_p(\varpi) \geq 1$, alors :

- $f \in A^{**}_{n,Q}$ implique $f \in 1 + p\varpi A^+_{n-k-1,Q}$ et donc $\log f \in A^+_{n-k-1,Q}$,
- $g \in A^+_{n,Q}$ implique $g \in p\varpi A^+_{n-k-1,Q}$ et donc $\exp f \in A^{**}_{n-k-1,Q}$.

D'où des isomorphismes de pro-objets $(A^{**}_{n,Q})_n \simeq (A^+_{n,Q})_n$ et

$$((A^{**}_n/(1+\mathfrak{m}_C))\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p)_n \simeq (A^{**}_{n,Q}\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p)_n \simeq (A^+_{n,Q}\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p)_n \simeq (A_n/C)_n,$$

comme annoncé. □

Corollaire 1.9. — *La suite exacte du théorème 1.8 s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant de $G \times \mathscr{G}_F$-représentations :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}})/C \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H^1_{\text{proét}}(\Omega_{\mathrm{Dr}}, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & (\mathrm{St}^{\text{lisse}}_{\mathbf{Q}_p})^* \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\Omega_{\mathrm{Dr}})/C \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\Omega_{\mathrm{Dr}}) \arrow[r] & (\mathrm{St}^{\text{lisse}}_{C})^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — ι est l'inclusion évidente. Pour définir l'application dlog, utilisons les isomorphismes

$$H^1_{\text{proét}}(\Omega_{\text{Dr}}, \mathbf{Q}_p(1)) = \varprojlim_n A_n^* \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p, \quad \Omega^1(\Omega_{\text{Dr}}) = \varprojlim_n \Omega^1(U_n)$$

et posons dlog $= \varprojlim_n$ dlog. Le carré de gauche commute de manière évidente ; la commutativité de celui de droite résulte de ce que la classe de $f = \frac{z-a}{z-b}$ dans $H^1_{\text{proét}}$ a pour image $\frac{df}{f}$ dans Ω^1 et $\text{Dir}_a - \text{Dir}_b$ dans $(\text{St}^{\text{lisse}}_{\mathbf{Q}_p})^*$ et dans $(\text{St}^{\text{lisse}}_C)^*$ identifié à H^1_{dR}. □

Remarque 1.10. — Comme nous le verrons, le terme $(\text{St}^{\text{lisse}}_{\mathbf{Q}_p})^*$ s'interprète comme $(\text{B}^+_{\text{st}} \otimes H^1_{\text{HK}}(\Omega_{\text{Dr}}))^{N=0,\varphi=p}$ et ι comme $\theta \otimes \iota_{\text{HK}}$, où H^1_{HK} est la cohomologie de Hyodo-Kato, $\iota_{\text{HK}} : C\widehat{\otimes}_{\breve{\mathbf{Q}}_p} H^1_{\text{HK}}(\Omega_{\text{Dr}}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{dR}}(\Omega_{\text{Dr}})$ est l'isomorphisme de Hyodo-Kato et $\theta : \text{B}^+_{\text{st}} \to C$ est l'application habituelle.

2. Cohomologie étale p-adique et correspondance de Langlands locale

Nous allons admettre le th. 0.8 (que nous démontrerons dans le chap. 5, cf. § 5.4) et en déduire un certain nombre de conséquences, dont le th. 0.2.

2.1. La cohomologie proétale p-adique de $\mathscr{M}_\infty$. — Si M est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module supercuspidal, de pente $\frac{1}{2}$ et rang 2 sur $L \otimes \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$, posons [9] :

$$\begin{aligned}
\mathscr{O}[M] &= \text{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\text{JL}(M), L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty)\big)^{\mathscr{G}_F} \\
\Omega^1[M] &= \text{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\text{JL}(M), L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \Omega^1(\mathscr{M}_\infty)\big)^{\mathscr{G}_F} \\
H^1_{\text{proét}}[M] &= \text{Hom}_{L[\check{G}]}\big(\text{JL}(M), H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty, L(1))\big)
\end{aligned}$$

(Les modules $\mathscr{O}[M]$ et $\Omega^1[M]$ sont des $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F$-modules tandis que $H^1_{\text{proét}}[M]$ est un L-module.)

Il résulte du th. 0.8 que l'on a le résultat suivant.

Corollaire 2.1. — *Si M est un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module supercuspidal, de pente $\frac{1}{2}$ et rang 2, on a le diagramme commutatif suivant de $(G \times \text{W}_F)$-fréchets,*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C\widehat{\otimes}_F \mathscr{O}[M] \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\text{proét}}[M] \arrow[r] \arrow[d] & (\text{B}^+_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}} M)^{\varphi=p} \widehat{\otimes}_L \text{LL}(M)^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C\widehat{\otimes}_F \mathscr{O}[M] \arrow[r] & C\widehat{\otimes}_F \Omega^1[M] \arrow[r] & (C \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}} M) \widehat{\otimes}_L \text{LL}(M)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont exactes, et les flèches verticales sont injectives et ont une image fermée.

9. Si M est de pente $\frac{1}{2}$, le caractère central de $\text{JL}(M)$ est unitaire et l'action de W_F sur $\text{Hom}(\text{JL}(M), X)$, pour $X = L \otimes \mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty), L \otimes \Omega^1(\mathscr{M}_\infty)$, s'étend en une action de $\mathscr{G}_F$.

(La ligne du bas est constituée de $L\otimes_{\mathbf{Q}_p} F$-modules, tandis que les termes de la ligne du haut ne sont que des L-modules. Notons que $N=0$ sur M, ce qui permet de remplacer B_{st} par $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$.)

2.1.1. Considérations topologiques. — Si Y est un affinoïde de dimension 1 sur C et si $M=\mathbf{Z}/p^n,\mathbf{Z}_p,\mathbf{Q}_p$, on dispose des groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(Y,M(1))$, pour $i=0,1$, reliés par :

$$H^i_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))=\mathbf{Q}_p\otimes H^i_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}_p(1)),\quad H^i_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}_p(1))=\varprojlim H^i_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}/p^n(1)).$$

La suite exacte $0\to\mathbf{Z}/p^n(1)\to\mathbf{G}_m\to\mathbf{G}_m\to 0$ induit la suite exacte de Kummer :

$$0\to(\mathscr{O}_Y^*/C^*)/(\mathscr{O}_Y^*/C^*)^{p^n}\to H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}/p^n(1))\to\mathrm{Pic}(Y)[p^n]\to 0$$

et, si $f\in\mathscr{O}_Y^*$, on note $(f)_{\text{ét},n}$ son image dans $H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}/p^n(1))$ induite par la flèche ci-dessus.

En prenant une limite projective sur n, puis en inversant p, on obtient les suites exactes :

$$0\to(\mathscr{O}_Y^*/C^*)^\wedge\to H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}_p(1))\to T_p(\mathrm{Pic}(Y))\to 0,$$
$$0\to\mathbf{Q}_p\widehat{\otimes}(\mathscr{O}_Y^*/C^*)^\wedge\to H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))\to V_p(\mathrm{Pic}(Y))\to 0,$$

où $(\mathscr{O}_Y^*/C^*)^\wedge$ désigne le séparé complété pour la topologie p-adique. Si $f\in\mathscr{O}_Y^*$, on note

$$(f)_{\text{ét}}\in H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}_p(1))$$

son *symbole en cohomologie étale* : c'est l'image de f par la flèche ci-dessus (en composant avec l'application naturelle de $\mathscr{O}_Y^*$ dans $(\mathscr{O}_Y^*/C^*)^\wedge$).

Remarque 2.2. — (i) Il résulte de la suite exacte ci-dessus que $H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Z}_p(1))$ est sans torsion, et donc que $H^1_{\text{ét}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))$ est un banach.

(ii) Si Y est une courbe Stein, on peut écrire Y comme la réunion croissante d'affinoïdes Y_n. Alors $H^1_{\text{proét}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))=\varprojlim_n H^1_{\text{ét}}(Y_n,\mathbf{Q}_p(1))$ (on a $H^1_{\text{proét}}(Y_n,\mathbf{Q}_p(1))=H^1_{\text{ét}}(Y_n,\mathbf{Q}_p(1))$ puisque Y_n est un affinoïde) ; la limite ne dépend pas du choix des Y_n car deux tels systèmes sont cofinaux. Comme les $H^1_{\text{ét}}(Y_n,\mathbf{Q}_p(1))$ sont des banachs, $H^1_{\text{proét}}(Y,\mathbf{Q}_p(1))$ est naturellement un fréchet.

2.1.2. Le $\mathscr{G}_F$-module $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty)$. — Nous allons calculer la multiplicité d'une représentation V de $\mathscr{G}_F$ dans $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty)$ comme représentation de G. Notons que l'on ne peut pas espérer que le résultat ait toujours un lien avec la correspondance de Langlands locale p-adique car le sous-espace $C\widehat{\otimes}_F\mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty)$ contient des représentations de $\mathscr{G}_F$ de dimension arbitraire (il suffit qu'un des poids de V soit 0 pour que V apparaisse dans C), mais la prop. 2.10 et la rem. 2.11 montrent que, si V a la bonne forme, cette multiplicité est celle espérée.

Soit M un L-$(\varphi,N,\mathscr{G}_F)$-module supercuspidal de rang 2 et de pente $\frac{1}{2}$, et soient

$$M_{\mathrm{dR}}=(C\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{\mathscr{G}_F}\quad\text{et}\quad X^+_{\mathrm{st}}(M)=(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{\varphi=p}.$$

Alors $M_{\rm dR}$ est un $L\otimes F$-module de rang 2 et $X_{\rm st}^+(M)$ est un L-Espace de Banach [**14, 15**] de L-Dimension $([L:\mathbf{Q}_p],2)$.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_F$, posons

$$H_M(V)={\rm Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V,X_{\rm st}^+(M)),\quad H_C(V)={\rm Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V,L\otimes_{\mathbf{Q}_p}C).$$

Alors $H_M(V)$ est un L-espace de dimension finie, tandis que $H_C(V)=(C\otimes_{\mathbf{Q}_p}V^*)^{\mathscr{G}_F}$ est un $L\otimes F$-module de type fini.

Remarque 2.3. — Comme M est de pente >0, on a $({\rm B}_{\rm cris}^+\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\rm nr}}M)^{\varphi=1}=0$, et le morphisme naturel $X_{\rm st}^+(M)\to M_{\rm dR}\otimes_F C$ (induit par $\theta: X_{\rm st}^+(M)\to M\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\rm nr}}C\simeq M_{\rm dR}\otimes_F C$) est injectif ; il induit donc un morphisme injectif

$$\iota: H_M(V)\to M_{\rm dR}\otimes_{L\otimes F}H_C(V),$$

ce qui permet d'identifier $H_M(V)$ à un sous-espace de $M_{\rm dR}\otimes_{L\otimes F}H_C(V)$.

Proposition 2.4. — *On a le diagramme commutatif suivant de G-fréchets*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & H_C(V)\underset{L\otimes F}{\otimes}\mathscr{O}[M] & \to & {\rm Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V,H^1_{\rm proet}[M]) & \longrightarrow & H_M(V)\underset{L}{\otimes}{\rm LL}(M)^* & \longrightarrow & 0\\
& \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0\to & H_C(V)\underset{L\otimes F}{\otimes}\mathscr{O}[M] & \longrightarrow & H_C(V)\underset{L\otimes F}{\otimes}\Omega^1[M] & \longrightarrow & H_C(V)\underset{L\otimes F}{\otimes}M_{\rm dR}\underset{L}{\otimes}{\rm LL}(M)^* & \to & 0
\end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes et les flèches verticales sont d'image fermée.

Démonstration. — L'application naturelle

$$H^1(\mathscr{G}_F,C\widehat{\otimes}_F\mathscr{O}[M]\otimes_L V^*)\to H^1(\mathscr{G}_F,C\widehat{\otimes}_F\Omega^1[M]\otimes_L V^*)$$

est injective (elle est obtenue en tensorisant $\mathscr{O}[M]\to\Omega^1[M]$ au dessus de $L\otimes F$ par $H^1(\mathscr{G}_F,C\otimes_{\mathbf{Q}_p}V^*)$, qui est un $L\otimes F$-module de rang fini). Par commutativité du diagramme du cor. 2.1, il en est de même de

$$H^1(\mathscr{G}_F,C\widehat{\otimes}_F\mathscr{O}[M]\otimes_L V^*)\to H^1(\mathscr{G}_F,H^1_{\rm proét}[M]\otimes_L V^*),$$

ce qui prouve que ${\rm Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V,-)$ laisse exactes les lignes du diagramme du cor. 2.1. On en déduit le résultat. □

2.1.3. Représentations supercuspidales de $\mathscr{G}_F$. — La prop. 2.5 ci-dessous fournit des contraintes très fortes sur $H_M(V)$.

Si M est un $(\varphi,N,\mathscr{G}_F)$-module, et $k\in\mathbf{Z}$, on note $M[k]$ le $(\varphi,N,\mathscr{G}_F)$-module obtenu en multipliant par p^k l'action de φ sur M.

Proposition 2.5. — *Soit W une L-représentation supercuspidale de $\mathscr{G}_F$, de dimension d, et soient $M=\mathbf{D}_{\rm pst}(W)$ et*[10] $X_{\rm st}(M)=({\rm B}_{\rm st}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\rm nr}}M)^{N=0,\varphi=p}$. *Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_F$, alors :*

(i) ${\rm Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V,X_{\rm st}(M))={\rm Hom}_{L[{\rm WD}_F]}(M^*,\mathbf{D}_{\rm pst}(V^*))$.

10. « W supercuspidale » ⇒ « $N=0$ sur M », et on a donc aussi $X_{\rm st}(M)=({\rm B}_{\rm cris}\otimes M)^{\varphi=p}$.

(ii) *Si V est de dimension d, et si* $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}(M)) \neq 0$, *alors V est supercuspidale,* $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \cong M[-1]$, *et* $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}(M))$ *est de dimension* 1 *sur* L.

Démonstration. — Si K est une extension galoisienne suffisamment grande de F, les isomorphismes $M = \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} M^{\mathscr{G}_K}$ (et son analogue pour $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)$) et $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^* = \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)$ fournissent

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}(M)) &= (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M \otimes_L V^*)^{N=0,\varphi=p,\mathscr{G}_F} \\ &= (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} M^{\mathscr{G}_K} \otimes_L V^*)^{N=0,\varphi=p,\mathscr{G}_F} = ((\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_L V^*)^{\mathscr{G}_K} \otimes_{K_0} M^{\mathscr{G}_K})^{N=0,\varphi=p,\mathscr{G}_F} \\ &= \big(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*) \otimes_{L\otimes\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M[-1]\big)^{N=0,\varphi=1,\mathscr{G}_F} = \mathrm{Hom}_{L[\mathrm{WD}_F]}(M[-1]^*, \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)).\end{aligned}$$

Comme M est irréductible, et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)$ de dimension $\leq \dim M$, cela implique que $\mathrm{Hom}_{L[\mathrm{WD}_F]}(M[-1]^*, \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*))$ est de dimension 0 ou 1 suivant que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*)$ est isomorphe ou pas à $M[-1]^*$, ce qui équivaut à $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \cong M[-1]$ car l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*) \cong M[-1]^*$ implique que V est supercuspidale, et donc que V aussi et que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V^*) = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)^*$. □

2.1.4. La représentation supercuspidale $V_{M,\mathscr{L}}$ de $\mathscr{G}_F$. — Si $\mathscr{L}$ est une $L \otimes F$-droite du $L \otimes F$-module M_{dR} de rang 2, soit $V_{M,\mathscr{L}}$ la L-représentation de $\mathscr{G}_F$:

$$V_{M,\mathscr{L}} = \mathrm{Ker}\big[X_{\mathrm{st}}^+(M) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F M_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\theta} C \otimes_F (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L})\big].$$

Alors $V_{M,\mathscr{L}}$ est une représentation supercuspidale de $\mathscr{G}_F$, de dimension 2, à poids 0 et 1, et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V_{M,\mathscr{L}}) = M[-1]$.

Remarque 2.6. — Si V est une L-représentation de dimension 2 telle que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}^+(M)) \neq 0$, il résulte de la prop. 2.5 que V est supercuspidale, que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}(M))$ est de dimension 1, et que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \cong M[-1]$. Il existe donc une filtration sur M_{dR} par des $L \otimes F$-modules non nécessairement libres, telle que $V = X_{\mathrm{st}}(M) \cap \mathrm{Fil}^1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F M_{\mathrm{dR}})$, et comme $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}(M))$ est de dimension 1 et que l'on dispose d'un plongement de V dans $X_{\mathrm{st}}^+(M) \subset X_{\mathrm{st}}(M)$, on obtient :

$$V = \mathrm{Ker}\big[X_{\mathrm{st}}^+(M) \to (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F M_{\mathrm{dR}})/\mathrm{Fil}^1\big].$$

On peut décomposer $L \otimes F$ sous la forme $\prod_{\sigma:F\to L} L$, ce qui décompose M_{dR} sous la forme $\oplus_{\sigma:F\to L} M_{\mathrm{dR},\sigma}$, où $M_{\mathrm{dR},\sigma}$ est un L-module de rang 2 (vu comme $L \otimes F$-module). Se donner une filtration par des $L \otimes F$-modules de M_{dR} revient à se donner une filtration de $M_{\mathrm{dR},\sigma}$ par des L-espaces vectoriels pour tout σ, d'où des poids de Hodge-Tate $\kappa_{1,\sigma} \leq \kappa_{2,\sigma}$ pour chaque σ.

Les seules contraintes résultant de l'admissibilité de la filtration et du fait que l'on peut prendre $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+$ au lieu de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ pour retrouver V, sont $\kappa_{i,\sigma} \geq 0$ pour tous σ et i, et $\sum_{i,\sigma} \kappa_{i,\sigma} = [F : \mathbf{Q}_p]$.

- *Si* $F = \mathbf{Q}_p$, cela ne laisse pas de choix, et $V = V_{M,\mathscr{L}}$ *pour un unique* $\mathscr{L}$.

• *Si* $F \neq \mathbf{Q}_p$, les $V_{M,\mathscr{L}}$ correspondent à $\kappa_{1,\sigma} = 0$ et $\kappa_{2,\sigma} = 1$ pour tout σ, mais *il y a d'autre possibilités, y compris à poids* 0 *et* 1.

On tire de la prop. 2.5 et de la rem. 2.6 le résultat suivant.

Lemme 2.7. — (i) $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V_{M,\mathscr{L}}, X_{\mathrm{st}}^+(M))$ *est de dimension* 1 *sur* L.

(ii) *Si* $F = \mathbf{Q}_p$*, et si* V *est une* L*-représentation de dimension* 2 *de* $\mathscr{G}_F$*, alors* $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V, X_{\mathrm{st}}^+(M)) \neq 0$ *si et seulement si* $V \cong V_{M,\mathscr{L}}$ *pour un* (unique) $\mathscr{L}$.

Remarque 2.8. — Par construction, $C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_{M,\mathscr{L}} \cong (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} C) \oplus (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} C)(1)$. On déduit des calculs de cohomologie continue de Tate que, si $V = V_{M,\mathscr{L}}, V_{M,\mathscr{L}}^*$, alors $H^0(\mathscr{G}_F, C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ et $H^1(\mathscr{G}_F, C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ sont des $(L \otimes F)$-modules de rang 1.

2.1.5. La représentation $W_{M,\mathscr{L}}$ *de* G. — Si on prend les points fixes par $\mathscr{G}_F$ de la ligne du bas du diagramme du cor. 2.1, on obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathscr{O}[M] \to \Omega^1[M] \to M_{\mathrm{dR}} \otimes_L \mathrm{LL}(M)^* \to 0$$

de L-représentations de G. On définit la représentation $W'_{M,\mathscr{L}}$ de G, en prenant l'image inverse de $\mathscr{L} \otimes \mathrm{LL}(M)^*$ dans $\Omega^1[M]$. On a donc une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{O}[M] \to W'_{M,\mathscr{L}} \to \mathscr{L} \otimes_L \mathrm{LL}(M)^* \to 0$$

de $(L \otimes F)$-représentations de G.

Soit M_{dR}^* le $L \otimes F$-dual de M_{dR} ; c'est un $L \otimes F$-module libre de rang 2. On dispose d'un accouplement $(L \otimes F)$-bilinéaire naturel

$$M_{\mathrm{dR}}^* \otimes_{L \otimes F} M_{\mathrm{dR}} \to L \otimes F,$$

et on note $\mathscr{L}^\perp \subset M_{\mathrm{dR}}^*$ l'orthogonal de $\mathscr{L}$. Alors $\mathscr{L}^\perp$ est un $(L \otimes F)$-module de rang 1, et l'accouplement ci-dessus induit un isomorphisme

$$(M_{\mathrm{dR}}^*/\mathscr{L}^\perp) \otimes_{L \otimes F} \mathscr{L} \cong L \otimes F.$$

Au vu de cet isomorphisme, on pose

$$\mathscr{L}^{-1} = M_{\mathrm{dR}}^*/\mathscr{L}^\perp.$$

Comme L s'injecte naturellement dans $L \otimes F$ (par $x \mapsto x \otimes 1$), on fabrique une représentation $W_{M,\mathscr{L}}$, extension de $\mathrm{LL}(M)^*$ par $\mathscr{L}^{-1} \otimes_{L \otimes F} \mathscr{O}[M] \cong \mathscr{O}[M]$, grâce au diagramme suivant (la première ligne est obtenue en tensorisant par $\mathscr{L}^{-1}$ la suite exacte définissant $W'_{M,\mathscr{L}}$) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1} \bigotimes\limits_{L\otimes F} \mathscr{O}[M] \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1} \bigotimes\limits_{L\otimes F} W'_{M,\mathscr{L}} \arrow[r] & (L\otimes F) \bigotimes\limits_{L} \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1} \bigotimes\limits_{L\otimes F} \mathscr{O}[M] \arrow[r] \arrow[u, equal] & W_{M,\mathscr{L}} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.9. — *Si $F = \mathbf{Q}_p$, alors*

$$W_{M,\mathscr{L}} = (\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}})^*.$$

Démonstration. — C'est le résultat principal de [**26**], cf. th. 1.4 de loc.cit. □

2.1.6. Cohomologie proétale de $\mathscr{M}_\infty$ et correspondance de Langlands. — Le résultat suivant décrit la multiplicité de $V_{M,\mathscr{L}}$ dans $H^1_{\text{proét}}[M]$, en tant que représentation de G. Dans le cas $F = \mathbf{Q}_p$, combiné avec la prop. 2.9, il montre que la cohomologie proétale de $\mathscr{M}_\infty$ encode la correspondance de Langlands locale p-adique (version localement analytique) couplée avec la correspondance de Jacquet-Langlands classique pour les représentations $V_{M,\mathscr{L}}$ (i.e. pour les représentations supercuspidales à poids 0 et 1, cf. rem. 2.6).

Proposition 2.10. — *On a un isomorphisme*

$$W_{M,\mathscr{L}} \cong \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}[M]).$$

Démonstration. — Notons simplement H_M et H_C les modules $H_M(V_{M,\mathscr{L}})$ et $H_C(V_{M,\mathscr{L}})$. D'après le lemme 2.7, H_M est un L-module de rang 1. L'injection $H_M \to M_{\mathrm{dR}} \otimes_{L\otimes F} H_C$ induit une application naturelle $M^*_{\mathrm{dR}} \otimes_L H_M \to H_C$. Le noyau de cette application contient $\mathscr{L}^\perp \otimes_L H_M$ car l'image de $V_{M,\mathscr{L}}$ dans $C \otimes_F M_{\mathrm{dR}}$ par un élément de H_M est incluse dans $\mathscr{L}$ par définition de $V_{M,\mathscr{L}}$ (et le fait que H_M est de dimension 1). Comme M^*_{dR} est un $(L \otimes F)$-module de rang 2 et H_C est un $(L \otimes F)$-module de rang 1 (rem. 2.8), on en déduit que le noyau est exactement égal à $\mathscr{L}^\perp$, et donc $H_C = \mathscr{L}^{-1}$.

On en tire, en utilisant la prop. 2.4, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1}\bigotimes_{L\otimes F}\mathscr{O}[M] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}[M]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1}\bigotimes_{L\otimes F}\mathscr{O}[M] \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1}\bigotimes_{L\otimes F} W'_{M,\mathscr{L}} \arrow[r] & \mathscr{L}^{-1}\bigotimes_{L\otimes F}\mathscr{L}\bigotimes_{L}\mathrm{LL}(M)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui permet, en utilisant l'isomorphisme $\mathscr{L}^{-1} \otimes_{L\otimes F} \mathscr{L} \cong L \otimes F$ et la définition de $W_{M,\mathscr{L}}$, de conclure. □

Remarque 2.11. — Posons

$$\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathrm{geo}}(V_{M,\mathscr{L}}) := \big(\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_F]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}[M])\big)^*.$$

Il résulte des prop. 2.10 et 2.9 que, si $F = \mathbf{Q}_p$, alors $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathrm{geo}}(V_{M,\mathscr{L}})$ est lié à la correspondance de Langlands locale p-adique :

$$\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathrm{geo}}(V_{M,\mathscr{L}}) = \Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}.$$

On peut espérer que, si $F \neq \mathbf{Q}_p$, alors $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathrm{geo}}(V_{M,\mathscr{L}})$ a un lien avec l'espace de vecteurs F-analytiques de la représentation $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})$ associée à $V_{M,\mathscr{L}}$ par l'hypothétique correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(F)$.

2.2. La cohomologie étale p-adique de $\mathscr{M}_\infty$. — On cherche à comprendre quelles représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ peuvent apparaître dans la cohomologie étale de la tour de Drinfeld. Comme on l'a vu, pour la cohomologie proétale, il suffit qu'un des poids de Hodge-Tate soit nul ; comme nous allons le voir (th. 2.15 et cor. 2.16), les conditions sont nettement plus restrictives pour la cohomologie étale.

2.2.1. La cohomologie étale comme sous-espace de la cohomologie proétale. — Le résultat suivant permet de décrire la cohomologie étale de $\mathscr{M}_\infty$ à l'intérieur de sa cohomologie proétale.

Rappelons qu'un sous-ensemble X d'un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel localement convexe E est *borné* si $p^n x_n \to 0$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X. Si E est un banach défini par une valuation v, cela équivaut à l'existence de $N\in\mathbf{Z}$ tel que $v(x)\geq N$, quel que soit $x\in X$. Si E est un fréchet défini par une famille $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de valuations, cela équivaut à l'existence, pour tout $k\in\mathbf{N}$, de $N_k\in\mathbf{Z}$ tel que $v_k(x)\geq N_k$, quel que soit $x\in X$.

Si G est un groupe agissant continûment sur E, un élément x de E est dit *G-borné* si son orbite $\{g\cdot x,\ g\in G\}$ est bornée.

Proposition 2.12. — (i) *$H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ est l'espace des vecteurs G-bornés de $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$.*

(ii) *Si M est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module supercuspidal, libre de rang 2 sur $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{Q}_p^{\rm nr}$, alors $H^1_{\text{ét}}[M]$ est l'espace des vecteurs G-bornés de $H^1_{\text{proét}}[M]$.*

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) (prendre la M-partie permet de travailler en niveau fini). Démontrons donc le (i). Soit X_i une suite croissante d'affinoïdes dont la réunion est $\mathscr{M}_n$. Alors $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ est la limite projective des $H^1_{\text{ét}}(X_i, L(1))$, et chacun des $H^1_{\text{ét}}(X_i, L(1))$ est un banach dont la boule unité est $H^1_{\text{ét}}(X_i, \mathscr{O}_L(1))$ puisque $H^1_{\text{ét}}(X_i, \mathscr{O}_L(1))$ est sans torsion. Un sous-ensemble A de $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ est donc borné si et seulement si il existe une suite k_i d'entiers tels que $\mathrm{Res}_{X_i}(A)\subset p^{-k_i}H^1_{\text{ét}}(X_i, \mathscr{O}_L(1))$, pour tout i. En particulier, $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_i, \mathscr{O}_L(1)) = \varprojlim_i H^1_{\text{ét}}(X_i, \mathscr{O}_L(1))$ est borné, et comme il est invariant par G, cela implique qu'il est G-borné, et donc que $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ est inclus dans l'ensemble des vecteurs G-bornés.

Montrons maintenant que tout vecteur G-borné de $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ appartient à $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$. Pour cela, choisissons un sous-groupe cocompact Γ de G opérant sans point fixe sur l'arbre de $\mathbf{PGL}_2$. Choisissons aussi des affinoïdes $Y_1,\dots,Y_r$ de $\mathscr{M}_n$ avec les propriétés suivantes :

- Les $\gamma\cdot Y_i$, pour $\gamma\in\Gamma$ et $1\leq i\leq r$, forment un recouvrement de $\mathscr{M}_n$.
- Les intersections de trois $\gamma\cdot Y_i$, correspondant à des couples (γ, i) distincts deux à deux, sont vides.

(Pour construire de tels Y_i, on peut prendre un système de représentants des noeuds du squelette de $\mathscr{M}_n$ modulo l'action de Γ – comme Γ est cocompact, ce système est fini, notons $x_1, \dots, x_r$ ses éléments – et, si $1 \le i \le r$, prendre un affinoïde correspondant à une étoile assez grande du squelette, de sommet x_i, mais ne contenant aucun autre noeud.)

On a alors des suites exactes :

$$\prod_{(\gamma,i)\neq(\gamma',i')} H^0_{\text{ét}}((\gamma\cdot Y_i)\cap(\gamma'\cdot Y_{i'}), \mathscr{O}_L(1))) \to H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, \mathscr{O}_L(1)) \to \prod_{(\gamma,i)} H^1_{\text{ét}}(\gamma\cdot Y_i, \mathscr{O}_L(1))$$

$$\prod_{(\gamma,i)\neq(\gamma',i')} H^0_{\text{ét}}((\gamma\cdot Y_i)\cap(\gamma'\cdot Y_{i'}), L(1))) \xrightarrow{\beta} H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1)) \to \prod_{(\gamma,i)} H^1_{\text{ét}}(\gamma\cdot Y_i, L(1))$$

Les composantes connexes des $(\gamma\cdot Y_i)\cap(\gamma'\cdot Y_{i'})$ ne forment qu'un nombre fini d'orbites sous l'action de Γ. L'image de β dans $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ est donc, topologiquement, engendrée par les translatés sous Γ d'un nombre fini d'éléments $v_1, \dots, v_t$. Soit alors Y un affinoïde contenant $Y_1, \dots, Y_r$ et tel que les images de $v_1, \dots, v_t$ dans $H^1_{\text{ét}}(Y, L(1))$ soient non nulles (il suffit de prendre pour Y un des X_i ci-dessus, pour $i \gg 0$). Alors $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1)) \to \prod_\gamma H^1_{\text{ét}}(\gamma\cdot Y, L(1))$ est injective et $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, \mathscr{O}_L(1))$ s'identifie à l'ensemble des $v \in H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ tels que $\text{Res}_{\gamma\cdot Y}(v) \in H^1_{\text{ét}}(\gamma\cdot Y, \mathscr{O}_L(1))$, pour tout $\gamma\in\Gamma$, ce qui équivaut à $\text{Res}_Y(\gamma\cdot v) \in H^1_{\text{ét}}(Y, \mathscr{O}_L(1))$, pour tout $\gamma\in\Gamma$.

Or un élément G-borné v de $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{M}_n, L(1))$ est a fortiori Γ-borné et donc vérifie, en particulier, que l'ensemble $\{\text{Res}_Y(\gamma\cdot v),\ \gamma\in\Gamma\}$ est borné dans $H^1_{\text{ét}}(Y, L(1))$, et donc est contenu dans $p^{-N}H^1_{\text{ét}}(Y, \mathscr{O}_L(1))$, pour N assez grand. D'après ce qui précède, ceci implique $v \in p^{-N}H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_n, \mathscr{O}_L(1))$, ce qui permet de conclure. □

Dans le reste de ce paragraphe, on suppose que $F = \mathbf{Q}_p$.

2.2.2. Sous-représentations galoisiennes de $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))$. — Soit M un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, supercuspidal de pente $\frac{1}{2}$, libre de rang 2 sur $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$. On dispose des L-modules M_{dR} et $X^+_{\text{st}}(M)$ (§ 2.1) et des L-représentations $V_{M,\mathscr{L}}$ de $\mathscr{G}_F$ (n° 2.1.4).

Corollaire 2.13. — *Si $\mathscr{L}$ est une L-droite de M_{dR}, alors*

$$\text{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{ét}}[M]) \cong \Pi(V_{M,\mathscr{L}})^*.$$

En particulier, $\text{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{ét}}[M]) \neq 0$.

Démonstration. — Il résulte de la prop. 2.12 que $\text{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{ét}}[M])$ est l'ensemble des vecteurs G-bornés de $\text{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{proét}}[M])$. Or les prop. 2.10 et 2.9 permettent d'identifier ce dernier espace à $(\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\text{an}})^*$ et le résultat est une traduction, par dualité, de ce que $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})$ est le complété universel de $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})^{\text{an}}$ [**18**, th. VII.11]. □

Remarque 2.14. — Ce résultat suggère que, si $F \neq \mathbf{Q}_p$, la G-représentation

$$\Pi_{\text{geo}}(V_{M,\mathscr{L}}) := \text{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{ét}}[M])^*$$

pourrait être celle que l'on cherche en vue d'une correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(F)$.

Théorème 2.15. — *Soit V une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors*

(i) $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{ét}}[M]) \neq 0$ *si et seulement s'il existe*[11] $\mathscr{L}$ *tel que* $V_{M,\mathscr{L}}$ *soit un quotient de* V.

(ii) *Le G-banach* $\Pi_M(V) = \mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{ét}}[M])^*$ *est admissible, de longueur finie, et ses facteurs de Jordan-Hölder sont isomorphes à des* $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})$ *pour certains* $\mathscr{L}$.

La preuve de ce résultat est faite au n° 2.2.3. On en tire, en utilisant le cor. 2.13 et le fait que toute représentation supercuspidale, de dimension 2, à poids 0 et 1, est de la forme $V_{M,\mathscr{L}}$ (cf. rem. 2.6), la conséquence suivante qui montre que :

• À part pour des caractères lisses provenant de $\Omega_{\mathrm{Dr}} \times \pi_0(\mathscr{M}_\infty)$, *le socle de* $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty)$ *ne contient que des représentations supercuspidales de dimension 2, à poids 0 et 1.*

• *La cohomologie étale p-adique de la tour de Drinfeld encode la correspondance de Langlands locale p-adique* pour les représentations supercuspidales de dimension 2, à poids 0 et 1.

Corollaire 2.16. — *Soit V une L-représentation absolument irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension ≥ 2.*

(i) *Si V est supercuspidale, de dimension 2, à poids 0 et 1,*

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))) = \mathrm{JL}(V) \otimes \Pi(V)^*.$$

(ii) *Dans le cas contraire,* $\mathrm{Hom}_{L[\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))) = 0$.

2.2.3. Démonstration du th. 2.15. — Passons à la preuve du th. 2.15. On a déjà prouvé que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V_{M,\mathscr{L}}, H^1_{\text{ét}}[M]) \neq 0$ (cf. cor. 2.13). Il s'ensuit que, si V a un quotient isomorphe à $V_{M,\mathscr{L}}$, alors $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{ét}}[M]) \neq 0$. Il s'agit donc de prouver la réciproque, et le (ii).

Soit donc V une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; notons simplement H_M et H_C les modules $H_M(V)$ et $H_C(V)$ (n° 2.1). La prop. 2.4 fournit une identification

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{proet}}[M]) \simeq \{\omega \in H_C \otimes_L \Omega^1[M],\ \pi_{\mathrm{dR}}(\omega) \in H_M \otimes_L \mathrm{LL}(M)^*\}.$$

Appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, -)$ à la suite exacte

$$0 \to V_{M,\mathscr{L}} \to X^+_{\mathrm{st}}(M) \to C \otimes_{\mathbf{Q}_p} (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L}) \to 0$$

fournit le résultat suivant.

11. On se permet de remplacer, si besoin, L par une extension finie.

Lemme 2.17. — *Si $\mathscr{L}$ est une L-droite de M_{dR}, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, V_{M,\mathscr{L}}) = 0$.

(ii) $\iota : H_M \to M_{\mathrm{dR}} \otimes_L H_C$ *induit une injection* $H_M \to (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L}) \otimes_L H_C$.

Fixons un $\mathscr{L}_0$ tel que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, V_{M,\mathscr{L}_0}) = 0$. Soit m_1 une base de $\mathscr{L}_0$, et complétons m_1 en une base m_1, m_2 de M_{dR}. On peut écrire $x \in H_M$ sous la forme $x = m_1 \otimes a(x) + m_2 \otimes b(x)$, avec $a(x), b(x) \in H_C$, et le lemme 2.17 implique que $b : H_M \to H_C$ est injective. En notant $S = \mathrm{Im}(b) \subset H_C$, on en déduit l'existence d'une application linéaire $A : S \to H_C$ telle que

$$H_M = \{m_1 \otimes A(x) + m_2 \otimes x,\ x \in S\}.$$

Supposons maintenant que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, V_{M,\mathscr{L}}) = 0$ pour tout $\mathscr{L}$ (en se permettant de remplacer L par une extension finie). Nous allons montrer que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{ét}}[M]) = 0$. Par le lemme 2.17, l'application $\iota : H_M \to M_{\mathrm{dR}} \otimes_L H_C$ induit une injection $H_M \to (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L}) \otimes_L H_C$ pour tout $\mathscr{L}$. Comme

$$H_M = \{m_1 \otimes A(x) + m_2 \otimes x,\ x \in S\},$$

on en déduit que $A - \lambda \cdot \mathrm{id}$ est injective pour tout λ, et donc que le seul sous-espace de S stable par A est 0.

Fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ deux à deux distincts, avec $n = \dim H_C$. Grâce au lemme 2.18 ci-dessous, A s'étend en un endomorphisme $u : H_C \to H_C$, diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Quitte à changer de base dans H_C, on peut donc supposer que u est représenté par la matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Soit $\mathscr{L}_i$ la droite engendrée par $m_2 + \lambda_i m_1$ dans M_{dR}. On obtient une inclusion $H_M \subset \oplus_{i=1}^n \mathscr{L}_i$ qui, combinée avec l'identification (cf. ci-dessus)

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\mathrm{proet}}[M]) \simeq \{\omega \in H_C \otimes_L \Omega^1[M],\ \pi_{\mathrm{dR}}(\omega) \in H_M \otimes_L \mathrm{LL}(M)^*\},$$

induit un plongement (prop. 2.9)

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\mathrm{proet}}[M]) \subset \bigoplus_{i=1}^n (\Pi(V_{M,\mathscr{L}_i})^{\mathrm{an}})^*.$$

En passant aux vecteurs G-bornés comme dans la preuve du cor. 2.13, on obtient un plongement

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{ét}}[M]) \subset \bigoplus_{i=1}^n \Pi(V_{M,\mathscr{L}_i})^*$$

Puisque les λ_i sont arbitraires (deux à deux distincts) et les $\Pi(V_{M,\mathscr{L}_i})^*$ sont des G-modules topologiques simples, on en déduit que $\mathrm{Hom}_{L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]}(V, H^1_{\text{ét}}[M]) = 0$.

Cela termine la preuve du (i) du théorème ; passons au (ii). On sait déjà (cor. 2.13), que $\Pi_M(V_{M,\mathscr{L}}) = \Pi(V_{M,\mathscr{L}})$. Si V n'a pas de quotient isomorphe à un $V_{M,\mathscr{L}}$, alors $\Pi_M(V) = 0$ d'après le (i). Dans le cas contraire, on a une suite exacte

$$0 \to V' \to V \to V_{M,\mathscr{L}} \to 0$$

pour un certain $\mathscr{L}$, et on démontre le résultat, par récurrence sur la dimension de V, en utilisant la suite exacte

$$0 \to \Pi_M(V_{M,\mathscr{L}})^* \to \Pi_M(V)^* \to \Pi_M(V')^*$$

et les propriétés [**57**] de la catégorie des représentations unitaires admissibles de G.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à prouver le résultat d'algèbre linéaire suivant.

Lemme 2.18. — *Soit $A : S \to H_C$ une application linéaire telle que le seul sous-espace de S stable par A soit 0, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$, avec $n = \dim_L H_C$, deux à deux distincts. Alors A admet un prolongement à H_C de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant trivial.

Si $v \in S$ est non nul, on note $k(v)$ le plus grand entier tel que $v, Av, \dots, A^{k(v)} \in S$. Si $\sum_{i \le k(v)+1} \lambda_i A^i v = 0$, on a $\lambda_{k(v)+1} = 0$ puisque $A^{k(v)+1}v \notin S$, alors que $A^i v \in S$ si $i \le k(v)$; on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout i puisque A ne laisse pas invariant le sous-espace engendré par $v, Av, \dots, A^{k(v)}v$. Autrement dit, $v, Av, \dots, A^{k(v)+1}v$ sont linéairement indépendants et, en particulier, $k(v) \le n-2$.

Si $k(v) = n-2$, alors les $e_i = A^{i-1}v$, pour $1 \le i \le n$, forment une base de H_C dans laquelle la matrice de A est une matrice à n lignes et $n-1$ colonnes avec des 1 en dessous de la diagonale et des 0 partout ailleurs. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, poser $Ae_n = \sigma_n e_1 + \sigma_{n-1} e_2 + \cdots + \sigma_1 e_n$ fournit une extension de A ayant les propriétés voulues.

Si $k(v) < n-2$, choisissons un supplémentaire S' de $S_v = Lv \oplus \cdots \oplus LA^{k(v)}v$ dans S. Alors $AS' \cap (S_v + AS_v) = 0$: en effet, si $Av' = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i A^i v$, alors $\lambda_0 = 0$, sinon $v \in AS$, ce qui est contraire à la maximalité de $k(v)$, et donc $v' \in S_v$ puisque A est injective. On peut donc trouver un supplémentaire H'_C de $S_v + AS_v$ dans H_C, qui contient AS', et appliquer l'hypothèse de récurrence à $A : S_v \to (S_v + AS_v)$ et $A : S' \to H'_C$, en partitionnant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en deux ensembles de cardinaux $\dim_L(S_v + AS_v)$ et $\dim_L H'_C$.

Ceci permet de conclure. □

3. Méthodes perfectoïdes

3.1. Quelques faisceaux pro-étales. — Considérons un espace adique lisse X/C (dans les applications X sera une variété rigide lisse, de dimension 1). On dispose [**52**] du site pro-étale $X_{\text{proét}}$ de X et d'une projection $\nu : X_{\text{proét}} \to X_{\text{ét}}$ vers le site étale $X_{\text{ét}}$ de X, ainsi que des faisceaux suivants sur $X_{\text{proét}}$:

• les faisceaux $\mathbf{Z}_p = \varprojlim_n \mathbf{Z}/p^n$ et $\mathbf{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n}$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathbf{Z}_p$-modules sur $X_{\text{proét}}$, on note $\mathscr{F}(1) = \mathscr{F} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(1)$.

• le faisceau $\mathscr{O}_X^+$ (pullback du faisceau $\mathscr{O}_X^+$ sur $X_{\text{ét}}$), et ses complétés $\widehat{\mathscr{O}}_X^+ = \varprojlim_n \mathscr{O}_X^+/p^n$ et $\widehat{\mathscr{O}}_X = \widehat{\mathscr{O}}_X^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$.

Nous allons utiliser systématiquement dans la suite le résultat suivant de Scholze [**53**, lemma 3.24].

Proposition 3.1. — *Le morphisme naturel $\mathscr{O}_{X_{\text{ét}}} \to \nu_* \widehat{\mathscr{O}}_X$ est un isomorphisme, et on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathscr{O}_{X_{\text{ét}}}$-linéaire $\Omega^1_{X_{\text{ét}}} \simeq R^1\nu_*\widehat{\mathscr{O}}_X(1)$.*

Une conséquence très utile pour la suite est la suivante :

Lemme 3.2. — *On dispose d'une suite exacte canonique*

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) \to H^1_{\text{proét}}(X, \widehat{\mathscr{O}}_X) \to \Omega^1(X)(-1) \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X).$$

Si X est affinoïde ou Stein, alors on a un isomorphisme canonique

$$H^1_{\text{proét}}(X, \widehat{\mathscr{O}}_X) \simeq \Omega^1(X)(-1).$$

Démonstration. — La première partie découle de la suite spectrale

$$H^i_{\text{ét}}(X, R^j\nu_*\widehat{\mathscr{O}}_X) \Rightarrow H^{i+j}_{\text{proét}}(X, \widehat{\mathscr{O}}_X),$$

combinée avec la proposition 3.1, la seconde est une conséquence du théorème de Kiehl (dans le cas Stein) et Tate (si X est affinoïde). □

3.2. Le diagramme (tautologique) fondamental. — Soit X une variété rigide analytique lisse sur C. La construction des anneaux de Fontaine A_{inf}, $\mathrm{B}^+_{\text{cris}}$, B^+_{dR}, etc. se faisceautise et donne naissance à des faisceaux $\mathbb{A}_{\text{inf}}$, $\mathbb{B}^+_{\text{cris}}$, $\mathbb{B}^+_{\text{dR}}$, etc. sur le site proétale de X.

On a un diagramme de faisceaux pour la topologie proétale, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Q}_p(1) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{B}^+_{\text{cris}})^{\varphi=p} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathscr{O}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\mathscr{O}}(1) \arrow[r] & \mathbb{B}^+_{\text{dR}}/t^2 \arrow[r] & \widehat{\mathscr{O}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Définissons le groupe $\widetilde{\mathrm{HK}}(X)$ par :

$$\widetilde{\mathrm{HK}}(X) = \mathrm{Ker}\big[H^1_{\text{proét}}(X, (\mathbb{B}^+_{\text{cris}})^{\varphi=p}) \to H^1_{\text{proét}}(X, \widehat{\mathscr{O}})\big].$$

Théorème 3.3. — *Soit X/C une courbe lisse, Stein, avec un nombre fini de composantes connexes. Alors on dispose d'un diagramme commutatif canonique, à lignes exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \otimes \mathbf{Z}[\pi_0(X)] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}(X) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H^1(X, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & \widetilde{\mathrm{HK}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{can}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \otimes \mathbf{Z}[\pi_0(X)] \arrow[r] & \mathscr{O}(X) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(X) \arrow[r, "\pi_{\mathrm{dR}}"] & H^1_{\mathrm{dR}}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De plus :

- *toutes les flèches sont d'image fermée,*

• $\mathrm{Ker}\,\iota_{\mathrm{can}} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{dlog}$ *s'identifie naturellement à un sous espace fermé de* $H^1_{\mathrm{dR}}(X)(1)$.

Démonstration. — On peut supposer que X est connexe. Si X est une courbe Stein, $H^0_{\mathrm{proét}}(X,\widehat{\mathscr{O}}) = \mathscr{O}(X)$ et $H^1_{\mathrm{proét}}(X,\widehat{\mathscr{O}}) = \Omega^1(X)(-1)$ (lemme 3.2). En passant à la cohomologie, et en posant

$$\widetilde{\mathrm{DR}}(X) = \mathrm{Ker}\big[H^1_{\mathrm{proét}}(X,\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2) \to H^1_{\mathrm{proét}}(X,\widehat{\mathscr{O}})\big],$$

on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Q}_p(1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{\mathrm{proét}}(X,(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\mathrm{proét}}(X,\mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{HK}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(X)(1) \arrow[r] & H^0_{\mathrm{proét}}(X,\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2) \arrow[r] & \mathscr{O}(X) \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{DR}}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme :

• $\mathscr{O}(X) \to H^1_{\mathrm{proét}}(X,\mathbf{Q}_p(1))$ est l'exponentielle : plus précisément, si $g \in \mathscr{O}(X)$, et si U est un ouvert affinoïde de X, alors $p^{-n} \otimes \exp(p^n g)$ définit, si $n \gg 0$, un élément de $\mathbf{Q}_p \otimes \mathscr{O}(U)^*$ qui ne dépend pas de n et dont le symbole en cohomologie (pro)étale (donné par l'application de Kummer) ne dépend pas non plus de n ; les classes ainsi obtenues se recollent et l'application ci-dessus s'obtient par limite inverse sur un recouvrement croissant de X par des affinoïdes.

• D'après [**53**, lemma 3.24], $H^1_{\mathrm{proét}}(X,\mathbf{Q}_p(1)) \to \Omega^1(X)$ est compatible avec les symboles : si $f \in \mathscr{O}(X)^*$ elle envoie le symbole $(f)_{\mathrm{ét}}$ de f en cohomologie proétale (donnée par l'application de Kummer) sur $\frac{df}{f}$.

Il en résulte que $\mathscr{O}(X) \to \Omega^1(X)$ (en bas) est juste d et donc que $\widetilde{\mathrm{DR}}(X) = H^1_{\mathrm{dR}}(X)$.

On en déduit que le noyau de exp est juste les constantes, ce qui nous donne le diagramme commutatif annoncé, et permet aussi de prouver que

$$H^0_{\mathrm{proét}}(X,(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}) = (\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p} \otimes \mathbf{Z}[\pi_0(X)]. \tag{3.4}$$

Le fait que d soit d'image fermée est classique, cf. [**40**, cor. 3.2]. Montrons que exp est d'image fermée. Si $f_n \in \mathscr{O}(X)$ et $c \in H^1_{\mathrm{proét}}(X,\mathbf{Q}_p(1))$ sont tels que $\lim_{n\to\infty}\exp(f_n) = c$, alors $\lim_{n\to\infty}\mathrm{dlog}(\exp(f_n)) = \mathrm{dlog}(c)$ dans $\Omega^1(X)$, et donc $\lim_{n\to\infty} df_n = \mathrm{dlog}(c)$, ce qui montre que f_n converge dans $\mathscr{O}(X)/C$. Ainsi $c = \exp(\lim_{n\to\infty} f_n)$, d'où le résultat.

Le fait que dlog et ι_{can} soient d'image fermée est prouvé au n° 3.2.2 et l'énoncé concernant le noyau de ι_{can} au n° 3.2.3. □

3.2.1. Exemples concrets : disques et couronnes ouverts. — Soit $D = \{|z| < 1\}$ le disque unité ouvert sur C. Nous allons calculer $H^1_{\mathrm{proét}}(D,\mathbf{Q}_p(1))$ et décrire les applications dlog et exp introduites ci-dessus.

Soit B_r la boule fermée de rayon $r<1$. Alors

$$H^1_{\text{proét}}(D,\mathbf{Q}_p(1))=\varprojlim_{r\to 1} H^1_{\text{proét}}(B_r,\mathbf{Q}_p(1))=\varprojlim_{r\to 1} H^1_{\text{ét}}(B_r,\mathbf{Q}_p(1)).$$

La suite de Kummer fournit un isomorphisme

$$H^1_{\text{ét}}(B_r,\mathbf{Q}_p(1))\simeq(\mathscr{O}(B_r)^*/C^*)\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p.$$

La décomposition $\mathscr{O}(B_r)^*=C^*\mathscr{O}(B_r)_1^{**}$, où $\mathscr{O}(B_r)_1^{**}=\{f\in\mathscr{O}(B_r)^{**},\ f(1)=1\}$, fournit une application $\log:\mathscr{O}(B_r)^*/C^*\to\mathscr{O}(B_r)/C$ (la série définissant le logarithme converge si $f\in\mathscr{O}(B_r)_1^{**}$). Cette application *ne se prolonge pas au complété p-adique*, mais elle se prolonge pour tout $r'<r$ en une application $\log$: $(\mathscr{O}(B_r)^*/C^*)\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p\to\mathscr{O}(B_{r'})/C$ (si $f\in\mathscr{O}(B_r)_1^{**}$, alors $v_{B_{r'}}(f-1)\geq c$ pour une constante $c>0$, qui dépend de r et r'). En passant à la limite projective, on obtient une application

$$\log: H^1_{\text{proét}}(D,\mathbf{Q}_p(1))\to\varprojlim_{r'\to 1}\mathscr{O}(B_{r'})/C=\mathscr{O}(D)/C.$$

En utilisant la compatibilité de $H^1_{\text{proét}}(X,\mathbf{Q}_p(1))\to\Omega^1(X)$ avec les symboles et la définition de l'application $\exp$ ci-dessus (preuve du th. 3.3), on en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.5. — *Les applications* $\exp$ *et* $\log$ *induisent un isomorphisme*

$$\mathscr{O}(D)/C\simeq H^1_{\text{proét}}(D,\mathbf{Q}_p(1)),$$

l'application dlog *s'identifiant à $d\circ\log$, où $d:\mathscr{O}(D)/C\to\Omega^1(D)$ est la dérivation. En particulier,* dlog *: $H^1_{proet}(D,\mathbf{Q}_p(1))\to\Omega^1(D)$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée.*

On laisse au lecteur le soin de démontrer (avec les mêmes arguments) :

Proposition 3.6. — *Soit $\mathscr{C}$ une couronne ouverte (des deux côtés) sur C. On a une suite exacte*

$$0\to\mathscr{O}(\mathscr{C})/C\to H^1_{\text{proét}}(\mathscr{C},\mathbf{Q}_p(1))\to\mathbf{Q}_p\to 0,$$

et l'application dlog *: $H^1_{\text{proét}}(\mathscr{C},\mathbf{Q}_p(1))\to\Omega^1(\mathscr{C})$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée.*

3.2.2. L'image de dlog

Convention 3.7. — On écrit simplement $H^1(Z)$ au lieu de $H^1_{\text{proét}}(Z,\mathbf{Q}_p(1))$ dans la suite de ce paragraphe.

Que l'image de ι_{can} soit fermée équivaut à ce que celle de dlog le soit ; nous allons montrer que celle de dlog l'est. Cela repose sur le résultat suivant.

Proposition 3.8. — *Soit $U \Subset V$ une inclusion stricte d'affinoides lisses de dimension* 1 *sur C.*

a) *Si $c_n \in H^1(V)$ sont tels que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dlog}(c_n) = 0$ dans $\Omega^1(V)$, alors il existe $d_n \in H^1(U)^{\mathrm{dlog}=0}$ tels que $\lim_{n\to\infty}(c_n|_U + d_n) = 0$ dans $H^1(U)$.*

b) *L'image de $H^1(V)^{\mathrm{dlog}=0}$ dans $H^1(U)^{\mathrm{dlog}=0}$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — a) On peut supposer que U est connexe. D'après **[62]** on peut trouver une courbe propre et lisse, connexe Z/C, telle que $D := Z \setminus U$ soit une réunion disjointe finie de disques ouverts $D_1, ..., D_s$. Fixons des paramètres z_i sur D_i pour identifier chaque D_i au disque $\{|z_i| < 1\}$. Soit $r < 1$ et considérons l'affinoïde $U(r)$, complémentaire de la réunion des disques ouverts $D_i(r) \subset D_i$ de rayon r. Les $U(r)$ (pour $r \to 1$) forment une base de voisinages stricts de U, donc on peut supposer que $V = U(r)$ pour un $r < 1$. Notons $\mathscr{C}(r) = D \cap U(r)$, une réunion disjointe de couronnes $\mathscr{C}_i(r)$ définies par $r \leq |z_i| < 1$, et soit $\mathscr{C}(r)^-$ la réunion des couronnes ouvertes associée.

Le recouvrement (admissible) de Z par D et $U(r)$ induit une suite de Mayer-Vietoris s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(Z) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & H^1(U(r)) \oplus H^1(D) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & H^1(\mathscr{C}(r)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & H^2(Z) \\
\Omega^1(Z) \arrow[r] & \Omega^1(U(r)) \oplus \Omega^1(D) \arrow[r] & \Omega^1(\mathscr{C}(r)) &
\end{tikzcd}$$

Soient maintenant $c_n \in H^1(U(r))$ tels que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dlog}(c_n) = 0$. Alors $\mathrm{dlog}(\beta(c_n, 0))$ tend vers 0 dans $\Omega^1(\mathscr{C}(r))$. La proposition 3.6 montre alors que la restriction de $\beta(c_n, 0)$ à la couronne ouverte $\mathscr{C}(r)^-$ tend vers 0. Fixons $r' \in (r, 1)$. Nous avons un diagramme analogue à celui ci-dessus avec r remplacé par r', et on note α', β' les applications correspondantes, et c'_n la restriction de c_n à $U(r')$. On vient de montrer que $\beta'(c'_n, 0)$ tend vers 0 dans $H^1(\mathscr{C}(r'))$. Mais β' est un homéomorphisme sur son image (lemme 3.9 ci-dessous), d'où l'existence d'une suite $x_n \in H^1(Z)$ telle que $\alpha'(x_n) + (c'_n, 0) \to 0$ dans $H^1(U(r')) \oplus H^1(D)$. Le diagramme ci-dessus montre alors que $\mathrm{dlog}(x_n) \to 0$. En appliquant encore le lemme 3.9 on obtient l'existence de $y_n \in H^1(Z)^{\mathrm{dlog}=0}$ tels que $x_n - y_n \to 0$ dans $H^1(Z)$. Il suffit de poser $d_n = y_n|_U$, alors $d_n \in H^1(U)^{\mathrm{dlog}=0}$ et par construction $d_n + c_n|_U \to 0$.

b) Nous gardons les notations introduites ci-dessus. Si $c \in H^1(U(r))^{\mathrm{dlog}=0}$, alors la restriction de $\beta(c, 0)$ à $\mathscr{C}(r)^-$ est nulle (prop. 3.6). Le diagramme ci-dessus montre que la restriction de c à $U(r')$ provient d'une classe de $H^1(Z)$. On en déduit que l'image de $H^1(V)^{\mathrm{dlog}=0}$ dans $H^1(U)^{\mathrm{dlog}=0}$ est un quotient de $H^1(Z)$, donc de dimension finie. □

Lemme 3.9. — *Soit $f : U \to V$ une application continue entre des L-fréchets. Si le conoyau est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(f)$ est fermée et f induit un homéomorphisme $U/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$.*

Démonstration. — Conséquence directe du théorème de l'image ouverte. □

Revenons à la preuve du fait que dlog est d'image fermée. L'argument est familier, mais pour le confort du lecteur on donne les détails. Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ un recouvrement croissant de type Stein de X. On notera $x^{(k)}$ la restriction à U_k d'une classe x définie sur un ouvert contenant U_k. Soient $c_n \in H^1(X)$ et $\omega \in \Omega^1(X)$ tels que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dlog}(c_n) = \omega$.

Fixons $k \geq 1$. On a $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dlog}(c_n^{(k+1)}) = \omega^{(k+1)}$, donc $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dlog}(c_{n+1}^{(k+1)} - c_n^{(k+1)}) = 0$. La proposition 3.8 fournit une suite $(d_n^{(k)})$ d'éléments de $H^1(U_k)^{\mathrm{dlog}=0}$ telle que $\lim_{n\to\infty} c_{n+1}^{(k)} - c_n^{(k)} - d_n^{(k)} = 0$. En posant $e_n^{(k)} = d_1^{(k)} + \ldots + d_{n-1}^{(k)}$, il s'ensuit que $s_k := \lim_{n\to\infty}(c_n^{(k)} - e_n^{(k)})$ existe dans $H^1(U_k)$, et puisque $\mathrm{dlog}(e_n^{(k)}) = 0$ on a

$$\mathrm{dlog}(s_k) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dlog}(c_n^{(k)}) = \omega^{(k)}.$$

On a donc obtenu une suite de classes $s_k \in H^1(U_k)$ telles que $\mathrm{dlog}(s_k) = \omega^{(k)}$ pour tout k. Nous avons $s_{k+1}^{(k)} - s_k \in H^1(U_k)^{\mathrm{dlog}=0}$ pour tout k. Comme $R^1 \varprojlim H^1(U_k)^{\mathrm{dlog}=0} = 0$ (d'après le b) de la proposition 3.8), il existe $\alpha_k \in H^1(U_k)^{\mathrm{dlog}=0}$ tels que $u := (s_1 - \alpha_1, s_2 - \alpha_2, \ldots) \in \varprojlim_k H^1(U_k) = H^1(X)$. On obtient donc une section globale $u \in H^1(X)$ telle que $u^{(k)} = s_k - \alpha_k$ pour tout k, et donc $\mathrm{dlog}(u^{(k)}) = \mathrm{dlog}(s_k) = \omega^{(k)}$ pour tout k. On en déduit que $\mathrm{dlog}(u) = \omega$, ce qui montre que dlog est d'image fermée.

3.2.3. Le noyau de ι_{can}. — Nous aurons aussi besoin de contrôler le noyau de ι_{can} ou, ce qui revient au même grâce au diagramme du th. 3.3, le noyau de dlog. Soit X/C un espace adique lisse, affinoïde ou Stein. Le morphisme $\mathbf{Q}_p(1) \to \widehat{\mathscr{O}}(1)$ utilisé pour définir dlog se factorise à travers $\mathbf{Q}_p(1) \to (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^2)(1) \to \widehat{\mathscr{O}}(1)$. D'où une application naturelle (cf. preuve du th. 3.3 (début) pour l'isomorphisme $\widetilde{\mathrm{DR}} \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X)$)

$$\lambda_X : H^1(X)^{\mathrm{dlog}=0} \to \widetilde{\mathrm{DR}}(1) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X)(1).$$

Proposition 3.10. — *Si X/C est un espace Stein, lisse de dimension 1, alors λ_X est injective, d'image fermée.*

Démonstration. — Si $X = \cup_k U_k$ est un recouvrement de type Stein de X, alors λ_X est la limite inverse des λ_{U_k}. En raisonnant comme dans la preuve du fait que l'image de ι_{can} est fermée, on ramène l'injectivité de λ_X à l'énoncé local ci-dessous (le fait que λ_X est d'image fermée découle facilement du fait que l'image de $H^1(U_{k+1})^{\mathrm{dlog}=0}$ dans $H^1(U_k)^{\mathrm{dlog}=0}$ est de dimension finie, cf. prop. 3.8). □

Lemme 3.11. — *Soit $U \Subset V$ une inclusion stricte d'affinoides lisses sur C, de dimension 1. Si $c \in H^1(V)^{\mathrm{dlog}=0}$ est tel que $\lambda_V(c) = 0$, alors $c|_U = 0$ dans $H^1(U)$.*

Démonstration. — Reprenons les notations du paragraphe 1 de la preuve de la proposition 3.8 : on a donc $U = Z \setminus D$, avec Z une courbe propre et lisse, connexe. On peut supposer que $V = U(r)$ pour un $r < 1$. Fixons $r' \in (r, 1)$. On va montrer que

$c|_{U(r')} = 0$ dans $H^1(U(r'))$, ce qui permettra de conclure. Comme nous l'avons déjà remarqué (cf. la preuve du point b) de la proposition 3.8), la restriction $c|_{U(r')}$ de c à $U(r')$ se relève en une classe $s \in H^1(Z)$, nulle en restriction à D. Considérons le diagramme obtenu à partir de la suite de Mayer-Vietoris pour le recouvrement de Z par $U(r')$ et D, où l'on a posé $\mathscr{F} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^2(1)$.

$$\begin{tikzcd}
H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r')) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Z) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(U(r')) \oplus H^1(D) \arrow[d] \\
H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(U(r'), \mathscr{F}) \oplus H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(D, \mathscr{F}) \arrow[d] \\
H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \widehat{\mathscr{O}}(1)) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \widehat{\mathscr{O}}(1)) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(U(r'), \widehat{\mathscr{O}}(1)) \oplus H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(D, \widehat{\mathscr{O}}(1))
\end{tikzcd}$$

Comme $\lambda_{U(r')}(c) = 0$, l'image s' de s dans $H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \mathscr{F})$ vient d'une section $\alpha \in H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \mathscr{F})$. La composée

$$H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \mathscr{F}) \to H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \widehat{\mathscr{O}}(1)) \to H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \widehat{\mathscr{O}}(1))$$

est nulle, puisque l'image de $H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \mathscr{F}) \to H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \widehat{\mathscr{O}}(1))$ s'identifie à $\mathrm{Ker}(\mathscr{O}(\mathscr{C}(r'))(1) \to \Omega^1(\mathscr{C}(r'))(1))$ (utiliser la suite exacte $0 \to \widehat{\mathscr{O}}(2) \to \mathscr{F} \to \widehat{\mathscr{O}}(1) \to 0$), et ce dernier espace est contenu dans $\mathrm{Ker}(H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{C}(r'), \widehat{\mathscr{O}}(1)) \to H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \widehat{\mathscr{O}}(1)))$ (car l'image de $\mathscr{O}(D)(1)$ est contenue dans le dernier noyau). Donc s a une image nulle dans $H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \widehat{\mathscr{O}}(1))$ et puisque $H^1(Z) \to H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z, \widehat{\mathscr{O}}(1))$ est injective [**52**], on obtient $s = 0$. Cela permet de conclure. □

3.3. Courbes propres

Proposition 3.12. — *Si $X = X_K \otimes_K C$, où K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et X_K est une courbe propre et lisse sur K, alors on a des isomorphismes naturels*

$$\widetilde{\mathrm{HK}}(X) \simeq (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} D_{\mathrm{pst}}(H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathbf{Q}_p)))^{\varphi=p, N=0} = (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} H^1_{\mathrm{HK}}(X))^{\varphi=p, N=0}.$$

Démonstration. — Soient $V = H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathbf{Q}_p)$, $M = D_{\mathrm{pst}}(V)$ et $M_{\mathrm{dR}} = D_{\mathrm{dR}}(V)$. Alors V est une représentation potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate $0, -1$ et $\mathrm{Fil}^1(M_{\mathrm{dR}}) \cong \Omega^1(X_K)$ et $M \cong H^1_{\mathrm{HK}}(X)$ d'après le théorème de comparaison semi-stable [**61**].

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathbf{Q}_p)(1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p} \otimes H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathbf{Q}_p) \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathbf{Q}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\alpha_X"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X, (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X, \widehat{\mathscr{O}}) &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont exactes et α_X est un isomorphisme, cf. [**52**]. D'où un isomorphisme naturel :

$$(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}\otimes_{\mathbf{Q}_p}H^1_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_p)\xrightarrow{\sim}H^1_{\text{proét}}(X,(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}).$$

L'isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V\simeq\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M$ nous donne

$$\begin{aligned}(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V&\simeq\mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{\varphi=p,N=0}\\&=(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{\varphi=p,N=0}\cap\big(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K M_{\mathrm{dR}}+\tfrac{1}{t}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K\Omega^1(X_K)\big).\end{aligned}$$

On en déduit que le noyau du morphisme [12] $(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V\to\Omega^1(X_K)(-1)$ est

$$(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{\varphi=p,N=0}\cap\big(\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K M_{\mathrm{dR}}\big)=(\mathrm{B}^+_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}M)^{\varphi=p,N=0}.$$

Mais, d'après ce qui précède, ce noyau s'identifie à $\widetilde{\mathrm{HK}}(X)$, d'où le résultat. □

4. Cohomologie de de Rham à support compact de $\mathscr{M}_\infty$

4.1. Cohomologie des tours de Drinfeld et de Lubin-Tate

Soit $(\mathrm{LT}_j)_{j\geq 0}$ la tour de Lubin-Tate. On note $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ le complété de la limite projective LT_∞ de la tour des $(\mathrm{LT}_j)_{j\geq 0}$, et $\widehat{\mathscr{M}_\infty}$ celui de $\mathscr{M}_\infty$. Les tours complétées $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ et $\widehat{\mathscr{M}_\infty}$ sont des espaces perfectoïdes [**55**, th. 6.5.4], munis d'actions de $G\times\check{G}$ (voir [**24**, chap. 3] pour les détails concernant ces actions), et isomorphes en tant que $(G\times\check{G})$-espaces perfectoïdes [**55**, th. 7.2.3] (cet isomorphisme précise l'isomorphisme de Faltings-Fargues [**32, 33**] et nous utiliserons pleinement ce raffinement).

Fixons une uniformisante ϖ de F et notons simplement $\widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_\infty$ et $\widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_\infty$ (resp. LT^{ϖ}_j et $\mathscr{M}^{\varpi}_j$) les quotients de $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ et $\widehat{\mathscr{M}_\infty}$ (resp. LT_j et $\mathscr{M}_j$) par l'action de ϖ vu comme élément du centre de G (ou de $\check{G}$, cela revient au même).

Enfin, posons

$$G_j=\begin{cases}\mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_F) & \text{si } j=0,\\ 1+\varpi^j\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_F) & \text{si } j\geq 1,\end{cases}\qquad \check{G}_n=\begin{cases}\mathscr{O}_D^* & \text{si } n=0,\\ 1+\varpi_D^n\mathscr{O}_D & \text{si } n\geq 1.\end{cases}$$

Le but de ce chapitre est d'établir le résultat suivant :

Théorème 4.1. — *Si $j,n\in\mathbf{N}$, on a des isomorphismes naturels :*

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}^{\varpi}_n)^{G_j}\cong H^1_c(\widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_\infty,\mathscr{O})^{G_j\times\check{G}_n}\cong H^1_c(\widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_\infty,\mathscr{O})^{G_j\times\check{G}_n}\cong H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}^{\varpi}_j)^{\check{G}_n},$$

et donc un isomorphisme naturel

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}^{\varpi}_\infty)\simeq H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}^{\varpi}_\infty)$$

qui munit les deux membres d'une structure de $C[\check{G}\times G]$-module lisse, admissible déjà en tant que G-module.

12. Induit par l'inclusion $(\mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V\subset\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K M_{\mathrm{dR}}+\frac{1}{t}\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K\Omega^1(X_K)$ et l'application $x\mapsto\theta(tx)(-1)$.

4.2. Quelques rappels sur la tour de Lubin-Tate

Nous faisons des rappels très succincts sur la tour de Lubin-Tate, en renvoyant le lecteur à [**27, 24, 64**] pour plus de détails. La théorie de Lubin-Tate fournit un schéma formel $\mathrm{Spf}(A_0)$ sur $\mathscr{O}_{\breve{F}}$, classifiant les déformations par quasi-isogénies de l'unique $\mathscr{O}_F$-module formel de dimension 1 et de hauteur 2 (relativement à F) sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. En ajoutant des structures de niveau à ces déformations, Drinfeld [**27**] a construit une tour de schémas formels $(\mathrm{Spf}(A_n))_{n\geq 1}$ sur $\mathscr{O}_{\breve{F}}$. La fibre générique adique $\breve{\mathrm{LT}}_n$ de $\mathrm{Spf}(A_n)$ est un revêtement fini étale galoisien, de groupe de Galois $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_F/\varpi^n)$ de $\breve{\mathrm{LT}}_0$, ce dernier étant une réunion disjointe dénombrable de copies du disque unité ouvert sur $\breve{F}$. On note $\mathrm{LT}_n = \breve{\mathrm{LT}}_n \times_{\breve{F}} C$. On peut définir (voir [**24**]) une action de $G\times\check{G}$ sur la tour $(\mathrm{LT}_n)_{n\geq 0}$ (contrairement à la tour de Drinfeld, on n'a pas d'action de $G\times\check{G}$ sur chaque étage de la tour). Soit $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ le complété de la limite projective de la tour des $(\mathrm{LT}_j)_{j\geq 0}$.

Proposition 4.2. — (i) *Si U est un domaine rationnel de LT_j, l'image inverse de U dans $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ est un affinoïde perfectoïde.*

(ii) *Si U est un domaine rationnel de $\mathscr{M}_j$, l'image inverse de U dans $\widehat{\mathscr{M}_\infty}$ est un affinoïde perfectoïde.*

Démonstration. — La structure de niveau universelle sur A_1 donne naissance à deux éléments X_1, Y_1 de A_1. Weinstein [**64**, lemme. 2.10.1] a montré que les sous-espaces de $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ définis par les inégalités $|X_1|^n \leq |\varpi|$ et $|Y_1|^n \leq |\varpi|$ sont des affinoïdes perfectoïdes. Il s'ensuit que $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ est une réunion croissante d'affinoïdes perfectoïdes et donc que tout domaine rationnel de $\widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ est affinoïde perfectoïde [**51**, th. 6.3]. On en déduit le (i) ; le (ii) s'ensuit grâce à l'isomorphisme $\widehat{\mathscr{M}_\infty} \cong \widehat{\mathrm{LT}}_\infty$ d'espaces perfectoïdes. $\square$

Remarque 4.3. — Si X est une composante connexe de $\mathscr{M}_0$ ou LT_0, on dispose d'une famille de domaines rationnels U_λ, $\lambda\in\mathbf{Q}_+$, strictement croissante, telle que $U_\lambda \smallsetminus \mathring{U}_{\lambda'}$ est rationnel si $\lambda' < \lambda$, $X = \cup_{\lambda\in\mathbf{Q}_+} U_\lambda$ et $U_\lambda = \cap_{\lambda'>\lambda} U_{\lambda'}$. En particulier, X et $X\smallsetminus U_\lambda$ sont des réunions croissantes strictes de domaines rationnels.

On en déduit, en utilisant la prop. 4.2, que si $j\geq 0$, alors $\widehat{X} = \widehat{\mathrm{LT}}_\infty^\varpi \cong \widehat{\mathscr{M}_\infty^\varpi}$ admet un recouvrement croissant par des affinoïdes perfectoïdes $\widehat{U}_n$ images inverses d'affinoïdes U_n de LT_j^ϖ (resp. $\mathscr{M}_j^\varpi$) tels que $\widehat{X}\smallsetminus\widehat{U}_n$ admette aussi un recouvrement croissant par des affinoïdes perfectoïdes images inverses d'affinoïdes de LT_j^ϖ (resp. $\mathscr{M}_j^\varpi$).

4.3. Cohomologie de $\mathscr{O}(\widehat{\mathscr{M}_\infty^\varpi})$ et cohomologie de de Rham de $\mathscr{M}_\infty^\varpi$

4.3.1. Cohomologie galoisienne de $\mathscr{O}(\widehat{\mathscr{M}_\infty^\varpi})$. — Si K est un groupe profini, on note simplement $H^i(K,-)$ les groupes de cohomologie continue de K. Nous aurons besoin du résultat technique suivant.

Lemme 4.4. — *Soit X un affinoïde ou une courbe Stein, et soit $\widehat{X}$ un revêtement proétale perfectoïde de X, galoisien de groupe de Galois K. Si X est une courbe Stein, on suppose de plus que l'on peut écrire X comme une réunion croissante stricte d'affinoïdes X_n dont les images inverses dans X sont des affinoïdes perfectoïdes. Alors on dispose d'isomorphismes canoniques*

$$H^0(K, \mathscr{O}(\widehat{X})) = \mathscr{O}(X), \quad H^1(K, \mathscr{O}(\widehat{X})) \simeq \Omega^1(X).$$

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où X est un affinoïde. Par hypothèse $\widehat{X} \to X$ est un recouvrement dans $X_{\text{proét}}$, de groupe de Galois K. Comme $\widehat{X} \times_X \widehat{X} = K \times \widehat{X}$, le complexe de Čech du faisceau $\widehat{\mathscr{O}}$ attaché à ce recouvrement est $(\mathscr{C}^0(K^j, \mathscr{O}(\widehat{X})))_j$ (cela utilise [**52**, cor. 6.6]). Puisque tous les objets que l'on considère sont quasi-compacts et séparés et puisque le faisceau $\widehat{\mathscr{O}}$ n'a pas de cohomologie en degré > 0 sur les affinoïdes perfectoïdes, on en déduit un isomorphisme $H^j(K, \mathscr{O}(\widehat{X})) = H^j_{\text{proét}}(X, \widehat{\mathscr{O}})$. Le lemme 3.2 permet de conclure.

Supposons maintenant que X est Stein et que l'on peut écrire X comme une réunion croissante stricte d'affinoïdes X_n, dont l'image inverse $\widehat{X}_n$ de X_n dans $\widehat{X}$ est affinoïde perfectoïde. Comme $\widehat{X}_n \to X_n$ est galoisien de groupe de Galois K, pour déduire le résultat du cas perfectoïde, il suffit donc de vérifier que $H^i(K, \varprojlim_n \mathscr{O}(\widehat{X}_n)) = \varprojlim_n H^i(K, \mathscr{O}(\widehat{X}_n))$. C'est immédiat si $i = 0$ et, si $i = 1$, cela suit de ce que X est supposé Stein et donc $\widehat{X}$ est aussi Stein (de type généralisé, cf. [**46**, 2.6, lemma. 2.6.3]), et donc

$$\mathrm{R}^1 \varprojlim \mathscr{O}(X_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{R}^1 \varprojlim \mathscr{O}(\widehat{X}_n) = 0,$$

et de la suite exacte (où $B_n = \mathscr{O}(\widehat{X}_n)$)

$$\mathrm{R}^1 \varprojlim H^0(K, B_n) \to H^1(K, \varprojlim_n B_n) \to \varprojlim_n H^1(K, B_n) \to H^0(K, \mathrm{R}^1 \varprojlim B_n). \quad \square$$

Proposition 4.5. — *On dispose d'isomorphismes canoniques*

$$H^0(G_j, \mathscr{O}(\widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_{\infty})) = \mathscr{O}(\mathrm{LT}^{\varpi}_j) \quad \text{et} \quad H^1(G_j, \mathscr{O}(\widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_{\infty})) = \Omega^1(\mathrm{LT}^{\varpi}_j),$$
$$H^0(\check{G}_j, \mathscr{O}(\widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_{\infty})) = \mathscr{O}(\mathscr{M}^{\varpi}_j) \quad \text{et} \quad H^1(\check{G}_j, \mathscr{O}(\widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_{\infty})) = \Omega^1(\mathscr{M}^{\varpi}_j).$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme 4.4 utilisé pour $(X, \widehat{X}, K) = (\mathrm{LT}^{\varpi}_j, \widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_{\infty}, G_j)$ ou $(\mathscr{M}^{\varpi}_j, \widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_{\infty}, \check{G}_j)$, les hypothèses étant satisfaites grâce à la rem. 4.3. $\square$

4.3.2. Cohomologie à support compact. — Si X est un des espaces LT^{ϖ}_j, $\mathscr{M}^{\varpi}_j$ on note

$$\mathscr{O}(\partial X) = \varinjlim_U \mathscr{O}(X \setminus U),$$

la limite inductive étant prise sur les affinoïdes U d'un recouvrement Stein de X. On définit par le même procédé l'espace $\Omega^1(\partial X)$. On définit alors l'espace $H^1_c(X, \mathscr{O})$ comme le quotient $\mathscr{O}(\partial X)/\mathscr{O}(X)$.

De même, si $\widehat{X} = \widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_{\infty} \cong \widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_{\infty}$, on pose $\mathscr{O}(\partial\widehat{X}) = \varinjlim_U \mathscr{O}(\widehat{X}\setminus U)$, la limite inductive étant prise sur les domaines rationnels de $\widehat{X}$ (ce sont des affinoïdes perfectoïdes). Comme $\widehat{X}$ admet des recouvrements croissants par les images inverses d'affinoïdes de TL^{ϖ}_j (resp. $\mathscr{M}^{\varpi}_j$), on peut ne considérer que des U provenant de TL^{ϖ}_j (resp. $\mathscr{M}^{\varpi}_j$) pour calculer $\mathscr{O}(\partial\widehat{X})$ et on peut même supposer (rem. 4.3) que $\widehat{X} \setminus U$ admet des recouvrements croissants par les images inverses d'affinoïdes de TL^{ϖ}_j (resp. $\mathscr{M}^{\varpi}_j$). On définit $H^1_c(\widehat{X}, \mathscr{O})$ par la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(\widehat{X}) \to \mathscr{O}(\partial\widehat{X}) \to H^1_c(\widehat{X}, \mathscr{O}) \to 0.$$

Remarque 4.6. — Les définitions ci-dessus sont parfaitement ad hoc, mais donnent le même résultat que la définition naturelle ci-dessous ou que la définition habituelle [**8, 63**] dans le cas de X. Si $Z = X, \widehat{X}$, on définit le pro-objet ∂Z comme la limite projective des $Z \setminus U$, où U varie dans les domaines rationnels. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur Z, on définit $\mathrm{R}\Gamma(\partial Z, \mathscr{F})$ comme la limite inductive $\varinjlim \mathrm{R}\Gamma(Z\setminus U, \mathscr{F})$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(Z, \mathscr{F})$ comme le cône $[\mathrm{R}\Gamma(Z, \mathscr{F}) \to \mathrm{R}\Gamma(\partial Z, \mathscr{F})]$. On a alors une suite exacte longue

$$0 \to H^0_c(Z, \mathscr{F}) \to H^0(Z, \mathscr{F}) \to H^0(\partial Z, \mathscr{F}) \to H^1_c(Z, \mathscr{F}) \to H^1(Z, \mathscr{F})$$

Dans le cas qui nous intéresse, à savoir $\mathscr{F} = \mathscr{O}$, on a $H^0_c(Z, \mathscr{F}) = 0$ et $H^1(Z, \mathscr{F}) = 0$ (cf. [**46**, 2.6, lemma 2.6.3] pour $Z = \widehat{X}$), ce qui justifie les définitions ci-dessus.

Corollaire 4.7. — *On a des isomorphismes naturels :*

$$H^1_c(\mathrm{LT}^{\varpi}_j, \mathscr{O}) = H^1_c(\widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_{\infty}, \mathscr{O})^{G_j} \quad \text{et} \quad H^1_c(\mathscr{M}^{\varpi}_n, \mathscr{O}) = H^1_c(\widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_{\infty}, \mathscr{O})^{\check{G}_n}.$$

Démonstration. — Soit $(X, \widehat{X}, K) = (\mathrm{LT}^{\varpi}_j, \widehat{\mathrm{LT}}^{\varpi}_{\infty}, G_j)$ ou $(\mathscr{M}^{\varpi}_n, \widehat{\mathscr{M}}^{\varpi}_{\infty}, \check{G}_n)$. Comme $\Omega^1(X) \to \Omega^1(\partial X)$ est injective, on déduit de la prop. 4.5 (et de son analogue pour $\widehat{X}$ privé d'un affinoïde perfectoïde du type de la rem. 4.3 auquel on peut appliquer le lemme 4.4) une suite exacte $0 \to \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(\partial X) \to H^1_c(\widehat{X}, \mathscr{O})^K \to 0$ qui, combinée avec la suite exacte $0 \to \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(\partial X) \to H^1_c(X, \mathscr{O}) \to 0$, permet de conclure. □

Si X est un des espaces LT^{ϖ}_j, $\mathscr{M}^{\varpi}_j$, la dualité de Serre [**2, 8, 63**] fournit des isomorphismes naturels

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X) \simeq (H^{2-i}_{\mathrm{dR,c}}(X))^*, \quad H^i_{\mathrm{dR,c}}(X) \simeq (H^{2-i}_{\mathrm{dR}}(X))^*, \quad \Omega^1(X)^* \simeq H^1_c(X, \mathscr{O}_X).$$

En dualisant la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(X)/H^0_{\mathrm{dR}}(X) \to \Omega^1(X) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X) \to 0,$$

on obtient donc la suite exacte d'espaces de type compact

$$0 \to H^1_{\mathrm{dR,c}}(X) \to \Omega^1(X)^* \simeq H^1_c(X, \mathscr{O}) \to \mathscr{O}(X)^* \to H^0_{\mathrm{dR}}(X)^* \to 0.$$

Compte-tenu du cor. 4.7, le th. 4.1 est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 4.8. — (i) *On a* $[\mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^*]^{G_j} = 0$ *et* $[\mathscr{O}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})^*]^{\check{G}_n} = 0$.

(ii) *On dispose d'isomorphismes canoniques*

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^{G_j} = H^1_c(\mathscr{M}_n^{\varpi}, \mathscr{O})^{G_j} \quad \text{et} \quad H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})^{\check{G}_n} = H^1_c(\mathrm{LT}_j^{\varpi}, \mathscr{O})^{\check{G}_n}.$$

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence directe du (i) et de suite exacte ci-dessus. Pour montrer le (ii), on montre d'abord que l'action de G_j (resp. $\check{G}_n$) sur $\mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^*$ (resp. $\mathscr{O}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})^*$) peut se dériver (et l'opérateur $\mathrm{Lie}(G_j) \to \mathrm{End}(\mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^*)$ ainsi obtenu est $\mathscr{O}_F$-linéaire), en raisonnant comme dans la preuve du théorème 3.2 de [**26**]. Il suffit donc de montrer que $[\mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^*]^{\mathrm{Lie}(G)} = 0$ et $[\mathscr{O}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})^*]^{\mathrm{Lie}(\check{G})} = 0$.

Montrons-le d'abord du côté Drinfeld. Soit z la "variable" sur $\mathbf{P}^1$ et soit a^+ (resp. u^+) l'action infinitésimale de $\left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (resp. de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). Un calcul direct en niveau 0 combiné avec le fait que $\mathscr{M}_n^{\varpi} \to \mathscr{M}_0^{\varpi}$ est étale montre que :

$$u^+(f) = -f' \quad \text{et} \quad a^+(f) = -zf' = u^+(zf) + f$$

pour tout $f \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})$. Si $\lambda \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})^*$ est tuée par $\mathrm{Lie}(G)$, on obtient

$$\lambda(f) = \lambda(a^+(f) - u^+(zf)) = -(a^+\lambda)(f) + (u^+\lambda)(zf) = 0$$

pour tout $f \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})$, donc $\lambda = 0$.

L'argument est similaire, mais un peu plus subtil du côté Lubin-Tate. Soit $\pi_{\mathrm{GH}} = \mathrm{LT}_0^{\varpi} \to \mathbf{P}^1$ l'application des périodes de Gross-Hopkins : on a $\pi_{\mathrm{GH}}(z) = A(z)/B(z)$ où A, B sont des fonctions analytiques sur LT_0^{ϖ} (qui, rappelons-le, est juste une réunion disjointe de disques unités ouverts), sans zéros communs. Notons

$$g = AB' - A'B,\ f_1 = \frac{A^2}{g},\ f_2 = \frac{B^2}{g},\ f_3 = \frac{AB}{g}.$$

Gross et Hopkins (voir la toute dernière page de [**37**]) montrent que g est inversible dans $\mathscr{O}(\mathrm{LT}_0^{\varpi})$ et que les opérateurs $\partial_i = f_i \frac{d}{dz}$ donnent l'action infinitésimale de $\check{G}/Z(\check{G})$ sur [13] $\mathscr{O}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})$. Supposons que $\lambda \in \mathscr{O}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})^*$ est tuée par $\mathrm{Lie}(\check{G})$, donc $\lambda(f_i \cdot f') = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $f \in \mathscr{O}(\mathrm{LT}_j^{\varpi})$. En particulier $\lambda(f_1 \cdot (f_2 f)') = 0$ et $\lambda(f_2 \cdot (f_1 f)') = 0$ pour tout f, d'où $\lambda((f_1 f_2' - f_2 f_1') f) = 0$. Un calcul direct montre que $f_1 f_2' - f_2 f_1' = 2f_3$. Donc $\lambda(f_3 f) = 0$ pour tout f. On obtient de la même manière $\lambda(f_1 f) = \lambda(f_2 f) = 0$ pour tout f, donc λ est nulle sur les fonctions dans l'idéal engendré par f_1, f_2, f_3. Cet idéal est dense car les f_i n'ont pas de zéro commun. On a donc $\lambda = 0$, ce qui permet de conclure. □

5. Applications de la compatibilité local-global

Dans ce chapitre, nous utilisons des méthodes globales pour prouver les th. 0.4 et 0.8. Nous allons commencer (§ 5.2, prop. 5.7) par identifier la multiplicité de $\mathrm{JL}(M)^* \otimes \mathrm{LL}(M)^*$ dans $H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_\infty)$ en tant que représentation de WD_F avant de

13. Cela est vrai à priori pour $j = 0$, mais reste vrai pour tout j car $\mathrm{LT}_j^{\varpi} \to \mathrm{LT}_0^{\varpi}$ est étale.

déterminer (§ 5.3) celle qui nous intéresse pour le th. 0.4, à savoir celle de $\mathrm{JL}(M)^*$ comme représentation de $G \times \mathrm{WD}_F$. Enfin, dans le § 5.4, nous prouvons le th. 0.8.

5.1. Notations et remarques préliminaires. — Il n'y a pas que les M supercuspidaux qui contribuent à la cohomologie de $\mathscr{M}_\infty$: tout M indécomposable de rang 2 (i.e. pas somme directe de deux objets de rang 1) contribue mais, si M n'est pas supercuspidal, sa contribution est éparpillée façon puzzle entre le H^0 et le H^1 (pour rassembler les morceaux, il faudrait passer à la catégorie dérivée [**24**]). Pour tenir compte de ce phénomène, on définit des représentations $\mathrm{WD}^i(M)$, $\mathrm{LL}^i(M)$ et $\mathrm{JL}^i(M)$, pour $i = 0, 1$.

Notons qu'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module M de rang 2 qui est indécomposable est soit supercuspidal soit un tordu $\mathrm{Sp} \otimes \eta$, où η est un caractère lisse de F^*, du module Sp défini par

$$\mathrm{Sp} = \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} e_1 \oplus \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} e_2, \quad \varphi(e_1) = e_1, \ \varphi(e_2) = p e_2, \ \ N e_1 = 0, \ \ N e_2 = e_1.$$

Dans ce cas, M est dit *spécial.*

- Si M est supercuspidal, on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{WD}^0(M) = 0 \quad &\text{et} \quad \mathrm{WD}^1(M) = \mathrm{WD}(M), \\ \mathrm{LL}^0(M) = 0 \quad &\text{et} \quad \mathrm{LL}^1(M) = \mathrm{LL}(M), \\ \mathrm{JL}^0(M) = 0 \quad &\text{et} \quad \mathrm{JL}^1(M) = \mathrm{JL}(M). \end{aligned}$$

- Si $M = \mathrm{Sp} \otimes \eta$ est spécial, on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{WD}^0(M) = L(N_{F/\mathbf{Q}_p}\eta) \quad &\text{et} \quad \mathrm{WD}^1(M) = L(\eta), \\ \mathrm{LL}^0(M) = \eta \circ \nu_G \quad &\text{et} \quad \mathrm{LL}^1(M) = \mathrm{St}^{\mathrm{lisse}} \otimes (\eta \circ \nu_G), \\ \mathrm{JL}^0(M) = \mathrm{JL}^1(M) &= \eta \circ \nu_{\check{G}}. \end{aligned}$$

Nous allons travailler avec le quotient $\mathscr{M}_\infty^\varpi$ de $\mathscr{M}_\infty$ par le sous-groupe $\varpi^{\mathbf{Z}}$ du centre de $\check{G}$, ce qui fournit un objet plus maniable (en particulier, $\mathscr{M}_n^\varpi$ est défini sur F au lieu de $\breve{F}$) et est inoffensif pour les problèmes qui nous intéressent : cela restreint l'ensemble de M contribuant à la cohomologie, mais les autres se récupèrent en tordant par un caractère non ramifié. Plus précisément, si $\alpha \in L^*$, notons nr_α le caractère de F^*, trivial sur $\mathscr{O}_F^*$ et envoyant ϖ sur α et, si $H = G, \check{G}, W_F$, notons $\mathrm{nr}_{\alpha,H}$ le caractère $\mathrm{nr}_\alpha \circ \nu_H$ de H. Si M est un L-$(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-module de rang 2, indécomposable, alors ϖ (vu comme élément du centre de $\check{G}$) agit par un scalaire $\lambda \in L$ sur $\mathrm{JL}^i(M)$. Si $\alpha^{-2} = \lambda$, alors ϖ agit trivialement sur $\mathrm{JL}^i(M) \otimes \mathrm{nr}_{\alpha,\check{G}}$ et, si $H^\bullet$ est une cohomologie raisonnable, on a

$$\mathrm{Hom}_{\check{G}}\big(\mathrm{JL}^i(M), H^i(\mathscr{M}_\infty)\big) = \mathrm{Hom}_{\check{G}}\big(\mathrm{JL}^i(M) \otimes \mathrm{nr}_{\alpha,\check{G}}, H^i(\mathscr{M}_\infty^\varpi)\big) \otimes \big(\mathrm{nr}_{\alpha,G}^{-1} \otimes \mathrm{nr}_{\alpha,W_F}^{-1}\big),$$

en tant que représentations de $G \times W_F$. Pour prouver les th. 0.4 et 0.8, on peut donc supposer que ϖ agit trivialement sur $\mathrm{JL}^i(M)$ et remplacer $\mathscr{M}_\infty$ par $\mathscr{M}_\infty^\varpi$.

On dit M est *ϖ-compatible* si ϖ (vu comme élément du centre de $\check{G}$) agit trivialement sur $\mathrm{JL}^i(M)$. Cela implique que M est de pente $\frac{1}{2}$ et, si $F = \mathbf{Q}_p$, que ϖ (vu comme élément du centre de G) agit trivialement sur $\Pi(V_{M,\mathscr{L}})$ pour toute droite $\mathscr{L}$ de M_{dR}. On note $\Phi\mathrm{N}^{\varpi}$ l'ensemble des $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-modules de rang 2, indécomposables, et ϖ-compatibles.

La théorie de Lubin-Tate non abélienne [**6, 7, 30**] (voir aussi [**64**] pour un énoncé compact) fournit le résultat suivant (dans lequel les coefficients de $\mathrm{JL}^i(M)$, $\mathrm{WD}^i(M)$ et $\mathrm{LL}^i(M)$ ont été étendus à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$) dont nous allons prouver l'analogue pour la cohomologie de de Rham à support compact (th. 5.8).

Proposition 5.1. — *Si $\ell \neq p$ et si $i = 0, 1$, alors*[14]

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} H^i_{\mathrm{\acute{e}t},c}(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty}, \mathbf{Q}_\ell) = \bigoplus_{M \in \Phi\mathrm{N}^{\varpi}} \mathrm{JL}^i(M) \otimes \mathrm{WD}^i(M) \otimes \mathrm{LL}^i(M)^{\vee},$$

en tant que représentations de $\check{G} \times W_F \times G$.

5.2. Multiplicité de $\mathrm{JL}(M)^* \otimes \mathrm{LL}(M)^*$**.** — Soit $M \in \Phi\mathrm{N}^{\varpi}$, supercuspidal. Soit $M_{\mathrm{dR}} = (M \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \overline{\mathbf{Q}}_p)^{\mathscr{G}_F}$, un $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F$-module libre de rang 2, et soit $\breve{M} = M \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \breve{\mathbf{Q}}_p$.

Pour alléger les notations, nous allons écrire

$$X[M] := \mathrm{Hom}_{L[\check{G}]}(\mathrm{JL}(M), X \otimes_{\mathbf{Q}_p} L)$$

si X est un $\check{G}$-module. Notons que le foncteur $X \mapsto X[M]$ est exact sur la catégorie des $\check{G}$-modules lisses avec action triviale de ϖ (car $\check{G}/\varpi^{\mathbf{Z}}$ est profini).

Nous fixons n assez grand pour que $\mathrm{JL}(M)$ soit triviale sur $1 + \varpi_D^n \mathscr{O}_D$, ce qui est possible car $\mathrm{JL}(M)$ est lisse et de dimension finie sur L.

5.2.1. Courbes de Shimura et compatibilité local-global. — On choisit :

- un corps totalement réel E ayant une place $\mathfrak{p}$ au-dessus de p telle que $E_{\mathfrak{p}} = F$.
- une place infinie ∞_0 de E,
- une algèbre de quaternions $\check{B}$ déployée en ∞_0, compacte (modulo le centre) aux autres places infinies de E et ramifiée en $\mathfrak{p}$.

On note :

- $\mathbf{A}$ les adèles de E et $\mathbf{A}_f$ (resp. $\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}}$) les adèles finies, (resp. finies hors de $\mathfrak{p}$).
- B l'algèbre de quaternions ayant mêmes invariants que $\check{B}$ en dehors de ∞_0 et $\mathfrak{p}$, compacte modulo le centre en ∞_0 (et donc en toutes les places infinies de E) et déployée en $\mathfrak{p}$.
- $\mathbb{G}$ et $\check{\mathbb{G}}$ les groupes algébriques associés à B^* et $\check{B}^*$: si R est une E-algèbre, alors $\mathbb{G}(R) = (B \otimes_E R)^*$ et $\check{\mathbb{G}}(R) = (\check{B} \otimes_E R)^*$.
- Γ et $\check{\Gamma}$ les groupes $\mathbb{G}(E) = B^*$ et $\check{\mathbb{G}}(E) = \check{B}^*$.

On fixe des isomorphismes

$$\mathbb{G}(E_{\mathfrak{p}}) \simeq G, \quad \check{\mathbb{G}}(E_{\mathfrak{p}}) \simeq \check{G}, \quad \check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}}) \cong \mathbb{G}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}}).$$

14. $\mathrm{LL}^i(M)^{\vee}$ est la contragrédiente de $\mathrm{LL}^i(M)$, i.e. l'ensemble des vecteurs lisses de $\mathrm{LL}^i(M)^*$.

Soit $\mathrm{SD}_2(\check{\mathbb{G}})$ l'ensemble des représentations automorphes $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ de $\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A})$ telles que $\mathrm{Hom}_{\check{B}_\infty^*}(\sigma_2, \pi_\infty) \neq 0$, où σ_2 est la représentation de $\check{\mathbb{G}}(\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} E) = \prod_{v|\infty} \check{\mathbb{G}}(E_v)$ triviale aux places $v \neq \infty_0$ et série discrète holomorphe de poids 2 et de caractère central trivial en la place ∞_0. Si $n \geq 1$, soit $\mathrm{SD}_{2,n} \subset \mathrm{SD}_2$ l'ensemble des π telles que $\check{G}_n$ agisse trivialement sur $\pi_{\mathfrak{p}}$.

On fixe :

- $M \in \Phi N^{\varpi}$ supercuspidal,
- $\check{\Pi} \in \mathrm{SD}_{2,n}$ définie [15] sur L et telle que $\check{\Pi}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{JL}(M)$.

On note :

- Π – la représentation automorphe de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ qui correspond à $\check{\Pi}$ par la correspondance de Jacquet-Langlands globale ; on a donc $\Pi_f^{\mathfrak{p}} = \check{\Pi}_f^{\mathfrak{p}}$ et $\Pi_{\mathfrak{p}} = \mathrm{LL}(M)$.

Si $n \geq 1$ et si U est un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit de $\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})$, notons $\mathrm{Sh}_n(U)_E$ la courbe de Shimura, définie sur E, dont les $\mathbf{C}$-points [16] sont donnés par

$$\mathrm{Sh}_n(U)_E(\mathbf{C}) = \check{\Gamma}\backslash[(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times (\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f)/(U \times \check{G}_n))].$$

Si K est un corps contenant E, on note $\mathrm{Sh}_n(U)_K$ la courbe sur K obtenue par extension des scalaires et simplement $\mathrm{Sh}_n(U)$ si $K = C$.

Si H est une des cohomologies $H^1_{\mathrm{dR}}(-)$, $H^1_{\mathrm{HK}}(-)$ ou $H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(-, L)$, si $n \geq 1$, et si K est une extension de E (contenant F si $H = H^1_{\mathrm{HK}}$), soit [17]

$$H(\mathrm{Sh}_{n,K}) = \varinjlim_U H(\mathrm{Sh}_n(U)_K),$$

la limite inductive étant prise sur les sous-groupes ouverts compacts U de $\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})$. Le résultat suivant est une conséquence des théorèmes de compatibilité local-global de Carayol [**6**] et Saito [**56**].

Proposition 5.2. — *On a des isomorphismes*

$$\mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})}(\Pi_f^{\mathfrak{p}}, L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n)) = \mathrm{JL}(M) \otimes_L M$$
$$\mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})}(\Pi_f^{\mathfrak{p}}, L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_{n,K})) = \mathrm{JL}(M) \otimes_L (K \otimes_F M_{\mathrm{dR}}), \quad \text{si } F \subset K.$$

Démonstration. — L'espace $H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathrm{Sh}_{n,\overline{\mathbf{Q}}}, L)$ est muni d'actions qui commutent de $\mathscr{G}_E := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ et $\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f)$. Les théorèmes de Carayol et Saito fournissent un

15. Pour pouvoir globaliser [**9**] il faut ajuster le caractère central, et donc on peut être amené à tordre tout par un caractère (et donc à changer ϖ) ; cela peut aussi demander de remplacer L par une extension finie.

16. Où $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ est le quotient habituel de $\mathbf{GL}_2(E_{\infty_0}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

17. Si $K = C$, on le fait disparaître de la notation.

isomorphisme de $\mathscr{G}_E \times \check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f)$-modules [18]

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Sh}_{n,\overline{\mathbf{Q}}}, L) \otimes_L \overline{\mathbf{Q}}_p \simeq \bigoplus_{\pi \in \mathrm{SD}_{2,n}} (\pi_f \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}_p} \rho_\pi(-1))$$

où la représentation $\rho_\pi : \mathscr{G}_E \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ est telle que, pour toute place finie v de E, l'on ait un isomorphisme [19]

$$\pi_v \simeq \mathrm{JL}(\mathrm{WD}(\rho_{\pi,v})).$$

Il suffit alors de restreindre cette représentation à $\mathscr{G}_F = \mathscr{G}_{E_\mathfrak{p}}$, d'appliquer les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}$ à l'isomorphisme ci-dessus, d'utiliser les théorèmes de comparaison p-adiques et l'isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(\rho_{\check{\Pi},\mathfrak{p}}(-1)) = M$ (qui découle de l'hypothèse $\Pi_\mathfrak{p} \simeq \mathrm{JL}(M)$) et d'appliquer ensuite le foncteur $\mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})}(\Pi_f^\mathfrak{p}, -)$ en utilisant le fait que $\Pi_f^\mathfrak{p}$ détermine $\Pi_\mathfrak{p}$ (théorème de multiplicité 1 fort). □

En appliquant $\mathrm{Hom}_{\check{G}}(\mathrm{JL}(M), L \otimes -)$, on déduit de la prop. 5.2 un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})}(\Pi_f^\mathfrak{p}, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n)[M]) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \check{M} \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})}(\Pi_f^\mathfrak{p}, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n)[M]) \arrow[r, "\simeq"] & M_{\mathrm{dR}} \otimes_F C \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

5.2.2. Uniformisation p-adique. — Gardons les notations introduites dans le paragraphe précédent. Nous allons donner, en utilisant l'uniformisation p-adique des courbes de Shimura, une autre description des espaces $\mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})}(\Pi_f^\mathfrak{p}, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n)[M])$ et $\mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})}(\Pi_f^\mathfrak{p}, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n)[M])$ apparus dans le diagramme (5.3).

Si U est un sous-groupe ouvert de $\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})$, on peut aussi voir U comme un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})$. On note $S^\mathfrak{p}(U)$ le quotient

$$S^\mathfrak{p}(U) = \mathbb{G}(\mathbf{A}_f^\mathfrak{p})/U.$$

C'est un ensemble discret muni d'une action de Γ. Le théorème d'uniformisation suivant est dû à Čerednik-Drinfeld et Boutot-Zink [**4**] (dans ce contexte).

18. Rappelons que l'on se permet de voir π_f comme une représentation sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ en utilisant l'isomorphisme fixé entre $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathbf{C}$.

19. $\rho_{\pi,v}$ est la restriction de ρ_π à $\mathscr{G}_{E_v} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/E_v)$ vu comme sous-groupe de $\mathscr{G}_E$ via le choix d'un plongement de $\overline{E}$ dans $\overline{E}_v$, et $\mathrm{JL}(\mathrm{WD}(\rho_{\pi,v}))$ est la représentation de $\check{\mathbb{G}}(E_v)$ qui lui est associée par les recettes habituelles : $\mathrm{WD}(\rho_{\pi,v})$ est la représentation de Weil-Deligne obtenue via le théoréme de monodromie ℓ ou p-adique et la recette de Fontaine si $\ell = p$, et $\mathrm{JL}(\mathrm{WD}(\rho_{\pi,v}))$ est la représentation attachée à $\mathrm{WD}(\rho_{\pi,v})$ par la correspondance de Langlands locale, combinée éventuellement avec celle de Jacquet-Langlands si $\check{B}$ est ramifiée en v.

Proposition 5.4. — *Il existe une famille d'isomorphismes d'espaces rigides analytiques*

$$\mathrm{Sh}_n(U)^{\mathrm{an}} \simeq \Gamma\backslash[\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U)],$$

compatibles avec la variation de U et n.

Remarque 5.5. — (i) $S^{\mathfrak{p}}(U)$ ne comporte qu'un nombre fini d'orbites $\Gamma x_1, \dots, \Gamma x_r$ sous l'action de Γ. Si on note Γ_i le stabilisateur de x_i dans Γ, alors les Γ_i sont des sous-groupes discrets et co-compacts de $\mathbb{G}(F) = G$, et

$$\mathrm{Sh}_n(U)^{\mathrm{an}} = \Gamma\backslash[\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U)] = \coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i\backslash\mathscr{M}_n.$$

(ii) Si $H^\bullet$ est une cohomologie raisonnable, on a [20]

$$\begin{aligned} &H^q(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U)) = \mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), H^q(\mathscr{M}_n)), \\ &H^p(\Gamma, H^q(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U))) = \oplus_{i=1}^r H^p(\Gamma_i, H^q(\mathscr{M}_n)), \end{aligned}$$

et une suite spectrale

$$H^p(\Gamma, H^q(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U))) \Longrightarrow H^{p+q}(\Gamma\backslash(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U))) = H^{p+q}(\mathrm{Sh}_n(U))$$

somme directe des suites analogues pour les revêtements $\mathscr{M}_n \to \Gamma_i\backslash\mathscr{M}_n$. En bas degrés, cette suite spectrale fournit la suite exacte

$$H^1(\Gamma, H^0(\mathscr{M}_n{\times}S^{\mathfrak{p}}(U))) \to H^1(\mathrm{Sh}_n(U)) \to H^0(\Gamma, H^1(\mathscr{M}_n{\times}S^{\mathfrak{p}}(U))) \to H^2(\Gamma, H^0(\mathscr{M}_n{\times}S^{\mathfrak{p}}(U))).$$

(iii) Si $H^0(X) = \mathbf{Z}[\pi_0(X)]\otimes H^0(\text{point})$ pour X ayant un nombre fini de composantes connexes (comme pour $H^\bullet_{\mathrm{dR}}$ ou $H^\bullet_{\mathrm{HK}}$), alors $\check{G}$ opère sur $H^0(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U))$ par la norme réduite, et donc $H^0(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U))[M] = 0$. La suite ci-dessus fournit donc un isomorphisme :

$$H^1(\mathrm{Sh}_n(U))[M] \simeq H^0(\Gamma, H^1(\mathscr{M}_n \times S^{\mathfrak{p}}(U))[M]).$$

5.2.3. Analyse fonctionnelle et réciprocité de Frobenius. — Soit $\mathscr{D}(G)$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(G)$) l'algèbre des distributions (resp. distributions algébriques) à support compact sur G : c'est le dual de l'espace $\mathrm{LA}(G, L)$ (resp. $\mathrm{LC}(G, L)$) des fonctions localement analytiques (resp. localement constantes) sur G. Alors $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(G)$ est le quotient de $\mathscr{D}(G)$ par l'idéal engendré par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G ; un $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(G)$ est donc la même chose qu'un $\mathscr{D}(G)$-module tué par $\mathfrak{g}$. Les masses de Dirac sont denses dans $\mathscr{D}(G)$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(G)$.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{D}(G)$-fréchet. Si U est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})$, on munit l'espace $\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \mathscr{F})$ d'une action de Γ par : $\gamma \cdot \phi(x) = \gamma(\phi(\gamma^{-1}x))$.

Comme $S^{\mathfrak{p}}(U)$ est discret, un élément de $\mathrm{LA}(G \times S^{\mathfrak{p}}(U))^*$ (resp. $\mathrm{LC}(G \times S^{\mathfrak{p}}(U))^*$ est une somme finie $\sum_i \mu_i \otimes \delta_{x_i}$, où les μ_i sont des éléments de $\mathscr{D}(G)$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(G)$),

20. $\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), X)$ désigne l'espace des fonctions continues de $S^{\mathfrak{p}}(U)$ dans X, mais comme $S^{\mathfrak{p}}(U)$ est discret, c'est l'espace de toutes les fonctions de $S^{\mathfrak{p}}(U)$ dans X.

$x_i \in S^{\mathfrak{p}}(U)$ et δ_{x_i} est la masse de Dirac en x_i. On munit $\mathrm{Hom}(\mathrm{LA}(G \times S^{\mathfrak{p}}(U))^*, \mathscr{F})$ d'actions de Γ et G commutant entre elles, en posant

$$(h * \lambda)(\delta_g \otimes \delta_x) = h(\lambda(\delta_{gh} \otimes \delta_x)), \quad (\gamma \cdot \lambda)((\delta_g \otimes \delta_x) = \lambda(\delta_{\gamma^{-1}g} \otimes \delta_{\gamma^{-1}x}).$$

On note $S(U)$ la variété p-adique (molle)

$$S(U) = \Gamma\backslash(G \times S^{\mathfrak{p}}(U)) = \Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}_f)/U.$$

C'est une variété compacte : $S(U) = \coprod_i \Gamma_i\backslash G$ et les Γ_i sont cocompacts dans G.

Lemme 5.6. — *Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(G)$-fréchet, on a un isomorphisme*[21]

$$H^0(\Gamma, \mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \mathscr{F})) = H^0(G, \mathrm{Hom}(\mathrm{LC}(S(U))^*, \mathscr{F})).$$

Démonstration. — Un élément de $\mathrm{Hom}(\mathrm{LA}(S(U))^*, \mathscr{F})$ est la même chose qu'un élément de $\mathrm{Hom}(\mathrm{LA}(G \times S^{\mathfrak{p}}(U))^*, \mathscr{F})$ invariant par Γ.

Soit $\iota : \mathscr{D}(G) \to \mathscr{D}(G)$ définie par $\iota(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}$. Si $\phi \in \mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \mathscr{F})^{\Gamma}$, posons $\lambda_\phi(\mu\otimes\delta_x) = \iota(\mu)\cdot\phi(x)$. Alors $\lambda_\phi(\gamma\mu\otimes\delta_{\gamma a}) = \iota(\mu)\gamma^{-1}\phi(\gamma\cdot a) = \iota(\mu)\cdot\phi(x) = \lambda_\phi(\mu\otimes\delta_x)$, ce qui prouve que λ_ϕ se factorise à travers $\mathrm{Hom}(\mathrm{LA}(S(U))^*, \mathscr{F})$. Comme $\mathfrak{g}$ tue $\mathscr{F}$, elle tue aussi $\mathrm{Hom}(\mathrm{LA}(G \times S^{\mathfrak{p}}(U))^*, \mathscr{F})$, et donc $\lambda_\phi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{LC}(S(U))^*, \mathscr{F})$. Enfin, $(h \cdot \lambda_\pi)(\delta_g \otimes \delta_x) = h(\lambda_\phi(\delta_{gh} \otimes \delta_x)) = h((gh)^{-1} \cdot \phi_\lambda(x)) = g^{-1} \cdot \phi_\lambda(x)$, ce qui prouve que λ_ϕ est invariant par G.

Réciproquement, si $\lambda \in H^0(G, \mathrm{Hom}(\mathrm{LC}(S(U))^*, \mathscr{F}))$, on définit ϕ_λ par $\phi_\lambda(x) = \lambda(\delta_1 \otimes \delta_x)$. Alors

$$\gamma(\phi_\lambda(\gamma^{-1}x)) = \gamma(\lambda(\delta_1 \otimes \delta_{\gamma^{-1}x})) = \lambda(\delta_{\gamma^{-1}} \otimes \delta_{\gamma^{-1}x}) = \lambda(\delta_1 \otimes \delta_x) = \phi_\lambda(x)$$

(on a utilisé l'invariance de λ par G puis par Γ) ; il s'ensuit que ϕ_λ est invariante par Γ.

Enfin, il est clair que $\phi_{\lambda_\phi} = \phi$ et que λ_{ϕ_λ} coïncide avec λ sur les masses de Dirac, et donc partout puisque les masses de Dirac engendrent un sous-espace dense. Il s'ensuit que $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ et $\phi \mapsto \lambda_\phi$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. $\square$

Proposition 5.7. — *Il existe un isomorphisme de $(\varphi, N, \mathscr{G}_F)$-modules*

$$\check{M} \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{LL}(M)^*, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M])$$

s'insérant dans un diagramme commutatif de $\mathscr{G}_F$-modules

$$\begin{tikzcd} \check{M} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(\mathrm{LL}(M)^*, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]) \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] \\ M_{\mathrm{dR}} \otimes_F C \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G(\mathrm{LL}(M)^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]) \end{tikzcd}$$

21. Tous les Hom sont des Hom d'espaces vectoriels topologiques, i.e. sont constitués d'applications linéaires continues.

Démonstration. — Le lemme 5.6, utilisé pour $\mathscr{F} = H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)$ et combiné avec la rem. 5.5, fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n(U))[M] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\mathrm{LC}(S(U))^*, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]) \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] \\ H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n(U))[M] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\mathrm{LC}(S(U))^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]) \end{tikzcd}$$

En passant à la limite sur U, on en déduit un diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n)[M] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\mathrm{LC}(\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}_f))^*, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]) \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] \\ H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n)[M] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\mathrm{LC}(\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}_f))^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]) \end{tikzcd}$$

Enfin, la décomposition de $\mathrm{LC}(\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}_f))$ en somme de représentations automorphes pour $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et le théorème de multiplicité 1 fort fournissent un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})}(\Pi_f^{\mathfrak{p}}, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n)[M]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] & \mathrm{Hom}_G(\mathrm{LL}(M)^*, H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]) \arrow[d, "\iota_{\mathrm{HK}}"] \\ \mathrm{Hom}_{\check{\mathbb{G}}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})}(\Pi_f^{\mathfrak{p}}, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_n)[M]) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_G(\mathrm{LL}(M)^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]). \end{tikzcd}$$

Pour conclure, il n'y a plus qu'à comparer ce diagramme avec le diag. (5.3). □

5.3. Cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato de de $\mathscr{M}_\infty^\varpi$

5.3.1. Cohomologie à support compact. — Soit $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^\varpi)$ la cohomologie de de Rham à support compact de $\mathscr{M}_n^\varpi$.

Théorème 5.8. — *On a une décomposition*[22]

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_\infty^\varpi) = \bigoplus_{M\in\Phi\mathrm{N}^\varpi} \mathrm{JL}^1(M)\otimes_C \mathrm{WD}^1(M)\otimes_C \mathrm{LL}^1(M)^\vee,$$

en tant que représentation de $\check{G}\times G$.

Démonstration. — On a une décomposition

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^\varpi) = \bigoplus_{M\in\Phi\mathrm{N}_n^\varpi} \mathrm{JL}^1(M)\otimes_C \mathrm{Hom}_{C[\check{G}]}(\mathrm{JL}^1(M), H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^\varpi)).$$

Notons que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^\varpi)$ est le C-dual de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)$ (cf. [**38**, th. 4.11]), et donc que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[M]$ est le C-dual de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^\varpi)[\check{M}]$, où $\check{M} = M^*[1]$, et que ce dernier a pour quotient $\check{M}_{\mathrm{dR}}\otimes_L \mathrm{LL}(\check{M})^* = \mathrm{WD}^1(\check{M})\otimes \mathrm{LL}^1(\check{M})^*$ si M est supercuspidal (prop. 5.7). Le calcul de la cohomologie de de Rham de $\Omega_{\mathrm{Dr}}\times\pi_0(\mathscr{M}_n^\varpi)$ montre que

22. Après extension des scalaires à C pour $\mathrm{JL}^1(M)$, $\mathrm{WD}^1(M)$ et $\mathrm{LL}^1(M)^\vee$.

cela reste vrai si M est spécial. En prenant une limite inductive sur n, on en déduit une surjection

$$H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty}) \to \bigoplus_{M\in\Phi\mathrm{N}^{\varpi}} \mathrm{JL}^1(M)\otimes_C \mathrm{WD}^1(M)\otimes_C \mathrm{LL}^1(M)^{\vee}.$$

On cherche à prouver que cette surjection de G-représentations lisses est en fait un isomorphisme. D'après le th. 4.1, le membre de gauche est aussi isomorphe à $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}^{\varpi}_{\infty})$, et donc ses G_j-invariants sont $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}^{\varpi}_j)$. Or LT^{ϖ}_j est une courbe analytique ouverte au sens de **[65]** et donc, si $\ell\neq p$, on a **[65]**

$$\dim_C H^1_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{LT}^{\varpi}_j)=\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H^1_{\mathrm{\acute{e}t},c}(\mathrm{LT}^{\varpi}_j,\mathbf{Q}_\ell),$$

et les deux membres sont finis. La théorie de Lubin-Tate non abélienne (cf. prop. 5.1) permet donc de montrer que les deux membres ont les mêmes invariants sous l'action de G_j (le foncteur des G_j-invariants est exact sur les représentations lisses car G_j est ouvert compact), et donc que la surjection ci-dessus est un isomorphisme. □

Remarque 5.9. — Soit $\check{G}'\subset\check{G}$ le noyau de la norme réduite. Les résultats du chap. 1 montrent que la cohomologie de $\Omega_{\mathrm{Dr}}\times\pi_0(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty})=\check{G}'\backslash\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty}$ est entièrement décrite par la contribution des M spéciaux et que, réciproquement, les M spéciaux ne contribuent qu'à la cohomologie de $\Omega_{\mathrm{Dr}}\times\pi_0(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty})$.

5.3.2. Preuve du th. 0.4. — Soit $M\in\Phi\mathrm{N}^{\varpi}$, supercuspidal. Le résultat suivant implique le th. 0.4.

Théorème 5.10. — *Il existe un isomorphisme de G-fréchets*

$$\mathrm{Hom}_{\check{G}}(\mathrm{JL(M)}, L\otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty}))\simeq \breve{M}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}(M)^*,$$

compatible avec les actions de φ et $\mathscr{G}_F$ et s'insérant dans un diagramme commutatif de G-modules

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\check{G}}(\mathrm{JL(M)}, L\otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty})) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \breve{M}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}(M)^* \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathrm{HK}}} & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\check{G}}\big(\mathrm{JL}(M), L\otimes_{\mathbf{Q}_p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{\infty})\big) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & C\widehat{\otimes}_F M_{\mathrm{dR}}\widehat{\otimes}_L\mathrm{LL}(M)^*
\end{array}$$

la flèche à gauche étant induite par l'isomorphisme de Hyodo-Kato et celle à droite par l'identification $M_{\mathrm{dR}}\otimes_F C=M\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}C=\breve{M}\otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p}C$.

Démonstration. — L'isomorphisme de la ligne du bas (pour la cohomologie de de Rham) se déduit, par C-dualité, du th. 5.8 en appliquant le foncteur $Z\mapsto Z[M]$. Le reste de l'énoncé se déduit alors de la prop. 5.7. □

5.4. Le diagramme fondamental. — Soient $M \in \Phi\mathrm{N}^{\varpi}$, supercuspidal, et $n \geq 1$ tel que $M \in \Phi\mathrm{N}_n^{\varpi}$. Posons

$$M_{\mathrm{dR}} = (M \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \overline{\mathbf{Q}}_p)^{\mathscr{G}_F}, \quad X_{\mathrm{st}}^+(M) = (B_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\varphi=p, N=0}.$$

Le résultat suivant implique le th. 0.8 de l'introduction.

Théorème 5.11. — *Il existe un diagramme commutatif de G-fréchets*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] & \xrightarrow{\exp} & H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}, L(1))[M] & \longrightarrow & X_{\mathrm{st}}^+(M)\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{dlog}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{O}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] & \longrightarrow & (C \otimes_F M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Démonstration. — On obtient le diagramme voulu avec $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ au lieu de $X_{\mathrm{st}}^+(M)\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^*$ en utilisant :

- le diagramme du th. 3.3 pour $X = \mathscr{M}_n^{\varpi}$, auquel on applique $Z \mapsto Z[M]$,
- la nullité de $\mathbf{Z}[\pi_0(\mathscr{M}_n^{\varpi})][M]$ ($\check{G}$ agit à travers la norme réduite sur $\pi_0(\mathscr{M}_n^{\varpi})$),
- l'isomorphisme $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \cong (C \otimes_F M_{\mathrm{dR}})\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^*$ du th. 5.10.

Il suffit donc de prouver que $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \cong X_{\mathrm{st}}^+(M)\widehat{\otimes}_L \mathrm{LL}(M)^*$, ce qui est fait au n° 5.4.2. □

La preuve s'appuie sur le résultat suivant qui décrit les fonctions à valeurs dans $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})$ en termes de la cohomologie de Hyodo-Kato de courbes de Shimura.

Proposition 5.12. — *Si U est un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit de $\mathbb{G}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})$, alors*

$$\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}))^{\Gamma}[M] = (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n(U)))^{N=0, \varphi=p}[M].$$

Démonstration. — Soient $\mathbb{U} = (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}$ et $\mathrm{U} = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}$ et écrivons $H^i(-)$ au lieu de $H^i_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(-)$. Le membre de droite est aussi (cf. prop. 3.12) égal à

$$\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n(U))[M] = \mathrm{Ker}\big[H^1(\mathrm{Sh}_n(U), \mathbb{U})[M] \to \Omega^1(\mathrm{Sh}_n(U)\big][M].$$

On a $\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}^{\varpi})) = \widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U))$, et on déduit de la définition de $\widetilde{\mathrm{HK}}$ que

$$\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}))^{\Gamma} = \mathrm{Ker}\big[H^1(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U), \mathbb{U})^{\Gamma} \to \Omega^1(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U))^{\Gamma}\big].$$

Comme $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ est Stein, et comme $\mathrm{Sh}_n(U) = \Gamma\backslash(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U))$, on a

$$\Omega^1(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U))^{\Gamma} = \Omega^1(\mathrm{Sh}_n(U)).$$

Pour conclure, il suffit donc de vérifier que

$$H^1(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U), \mathbb{U})^{\Gamma}[M] = H^1(\mathrm{Sh}_n(U), \mathbb{U})[M]$$

et, pour cela, il suffit, compte-tenu de la suite spectrale habituelle, de vérifier que $H^0(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U), \mathbb{U})[M] = 0$ (car alors $H^i(\Gamma, H^0(\mathscr{M}_n^{\varpi} \times S^{\mathfrak{p}}(U), \mathbb{U}))[M] = 0$), ou encore que $H^0(\mathscr{M}_n^{\varpi}, \mathbb{U})[M] = 0$.

Or $H^0(\mathscr{M}_n^{\varpi}, \mathbb{U}) = \mathbf{Z}[\pi_0(\mathscr{M}_n^{\varpi})] \otimes \mathrm{U}$ (cf. formule (3.4)). Le résultat est donc une conséquence du fait que $\check{G}$ agit à travers la norme réduite sur $\pi_0(\mathscr{M}_n^{\varpi})$, et donc que $\mathbf{Z}[\pi_0(\mathscr{M}_n^{\varpi})][M] = 0$. □

5.4.1. G-modules de Fréchet isotypiques. — Soit π une représentation lisse irréductible de G (dans les applications on aura $\pi = \mathrm{LL}(M)$).

Définition 5.13. — Un L-fréchet $\mathscr{F}$ muni d'une action continue de G est dit *π-isotypique* s'il existe un L-banach X et un isomorphisme de $L[G]$-modules topologiques (l'action de G sur X étant triviale) $\mathscr{F} \simeq \pi^* \widehat{\otimes}_L X$.

Proposition 5.14. — *Soit $\mathscr{F}$ un L-fréchet π-isotypique. Tout sous-fréchet G-stable de $\mathscr{F}$ est π-isotypique.*

Démonstration. — Écrivons $\mathscr{F} = \pi^* \widehat{\otimes}_L X$ pour un L-Banach X avec action triviale de G. Soit $\mathscr{F}'$ un sous-fréchet G-stable de $\mathscr{F}$. On peut remplacer X par l'adhérence de $Z := \sum_{f \in \mathscr{F}'} f(\pi)$ dans X, ce qui permet de supposer que Z est dense dans X. On va montrer que $\mathscr{F}'$ est dense dans $\mathscr{F}$, et donc $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ est π-isotypique. Supposons que ce n'est pas le cas, il existe donc $\mathscr{L} \in \mathscr{F}^*$ s'annulant sur $\mathscr{F}'$. Comme $\pi = \varinjlim_n V_n$ (réunion croissante, avec V_n de dimension finie), on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathscr{F}^* = (\varprojlim_n (V_n^* \otimes_L X))^* = \varinjlim_n (V_n \otimes_L X^*) = \pi \otimes_L X^*.$$

On peut donc écrire $\mathscr{L} = \sum_{i=1}^n v_i \otimes \lambda_i$, où les $v_i \in \pi$ forment une famille libre, et $\lambda_i \in X^*$. Fixons $f \in \mathscr{F}'$. Par hypothèse, $\sum_{i=1}^n \lambda_i(f(\mu \cdot v_i)) = 0$ pour tout $\mu \in L[G]$. Le théorème de densité de Jacobson **[43]** assure, pour tous $x_1, ..., x_n \in \pi$, l'existence de $\mu \in L[G]$ tel que $\mu \cdot v_i = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On en déduit que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(f(x_i)) = 0$ pour tous $x_1, ..., x_n \in \pi$. Donc λ_i est nulle sur $f(\pi)$ pour tout i et tout $f \in \mathscr{F}'$. Puisque $\sum_{f \in \mathscr{F}'} f(\pi)$ est dense dans X, on obtient $\lambda_i = 0$ pour tout i, en contradiction avec l'hypothèse $\mathscr{L} \neq 0$. Cela permet de conclure. □

Corollaire 5.15. — *L'image et le noyau de $\iota_{\mathrm{can}} : \widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] \to H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ sont $\pi := \mathrm{LL}(M)$-isotypiques.*

Démonstration. — $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ est défini sur F. Il s'ensuit que $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}) = C \widehat{\otimes} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_{n,F}^{\varpi})$, et nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la ligne du bas des diagrammes de la prop. 5.7 et du th. 5.10 s'obtiennent par extension des scalaires à C de la ligne analogue sur F. Il s'ensuit que $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ est π-isotypique. On conclut en combinant la proposition précédente avec le th. 3.3 et la prop. 3.10. □

5.4.2. Preuve du théorème 5.11. — Nous aurons besoin de la variante suivante de la loi de réciprocité de Frobenius.

Proposition 5.16. — *Soit π une représentation lisse de G, irréductible, et soit $\mathscr{F} = \pi^*\widehat{\otimes}_L X$ un L-fréchet π-isotypique. Alors, si U est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})$, on a un isomorphisme :*

$$\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \mathscr{F}) = H^0(G, \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{LC}(S(U))) \otimes X.$$

Démonstration. — D'après le lemme 5.6, on a

$$\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \mathscr{F}) = H^0(G, \mathrm{Hom}(\mathrm{LC}(S(U))^*, \pi^*\widehat{\otimes}_L X)).$$

Comme G opère trivialement sur X, on peut sortir X de la parenthèse, utiliser l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathrm{LC}(S(U))^*, \pi^*) = \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{LC}(S(U)))$ et la finitude de $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{LC}(S(U)))$ qui résulte du fait que $S(U)$ est compacte et donc $\mathscr{C}(S(U))$ et, par suite, $\mathrm{LA}(S(U))$ est une représentation admissible de G. $\square$

D'après le cor. 5.15, on peut écrire $\mathrm{Ker}(\iota_{\mathrm{can}})$ sous la forme $\pi^*\widehat{\otimes}_L X$, où X est un L-banach avec action triviale de G. Maintenant, il résulte de la prop. 5.2 que $H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n(U))$ est une somme de copies de M, et comme M est de pente $\frac{1}{2}$, le noyau $t(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes M)^{N=0,\varphi=1}$ de $\theta : (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes M)^{N=0,\varphi=1} \to C \otimes M_{\mathrm{dR}}$ est réduit à 0. On en déduit, en utilisant la prop. 5.12, que

$$\mathrm{Ker}\big(\mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), \widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}))[M] \to \mathscr{C}(S^{\mathfrak{p}}(U), H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi}))[M]\big)^{\Gamma} = 0,$$

pour tout U. En prenant U assez petit, cela prouve que $X = 0$ et donc que $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ s'identifie (via ι_{can}) à un sous L-fréchet de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$. Ce dernier étant π-isotypique (th. 5.10) il s'ensuit que $\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M]$ est π-isotypique (cor. 5.15).

Écrivons donc

$$\widetilde{\mathrm{HK}}(\mathscr{M}_n^{\varpi})[M] = \pi^*\widehat{\otimes}_L Z,$$

où Z est un L-banach avec action triviale de G. En combinant les prop. 5.16 et 5.12, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{LC}(U^{\mathfrak{p}})) \otimes_L Z \simeq (\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} H^1_{\mathrm{HK}}(\mathrm{Sh}_n(U)[M]))^{\varphi=p,N=0}.$$

En passant à la limite sur U, puis en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}(\mathbf{A}_f^{\mathfrak{p}})}(\Pi_f^{\mathfrak{p}}, -)$ et en utilisant la prop. 5.2, on obtient un isomorphisme

$$Z \simeq X_{\mathrm{st}}^+(M) := (M \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} B_{\mathrm{st}}^+)^{\varphi=p,N=0}$$

qui permet de conclure.

Appendice A

Modèles semi-stables équivariants des revêtements du demi-plan de Drinfeld

A.1. Modèles semi-stables des courbes algébriques. — Ce qui suit est un résumé de la théorie classique des modèles semi-stables des courbes [**47**] ; K est un corps de caractéristique 0 complet pour v_p supposée discrète.

A.1.1. Modèles minimaux. — Soit X une courbe projective lisse, géométriquement irréductible, définie sur K. Un *modèle minimal* pour X est un modèle $\mathscr{X}$ propre, régulier, de X, i.e. un schéma régulier $\mathscr{X}$, propre sur $\mathscr{O}_K$, dont la fibre générique est X, et ne contenant pas de courbe exceptionnelle du premier type [(23)]. Un modèle propre régulier existe d'après le théorème de Lipman de résolution des singularités sur les surfaces. De plus, si $\mathscr{X}$ est un tel modèle, on a une suite de morphismes

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_m \to \mathscr{X}_{m-1} \to \ldots \to \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_0$$

de modèles propres réguliers de X telle que chaque morphisme soit obtenu par contraction d'une courbe exceptionnelle du premier type et que $\mathscr{X}_0$ soit un modèle minimal. En particulier, il existe des modèles minimaux.

A.1.2. Modèles semi-stables. — Il existe une extension finie K' de K telle que tout modèle minimal de $X_{K'}$ soit étale semi-stable, i.e. semi-stable localement pour la topologie étale [(24)]. Un tel modèle est dit *minimal étale semi-stable.* Plus précisément, il existe une extension finie K' de K telle que, pour toute extension finie L de K', il existe des modèles minimaux sur L et, de plus, tout modèle minimal de X_L est étale semi-stable. En particulier, on peut imposer à L d'être une extension galoisienne de K.

Si X est de genre ≥ 1, un modèle minimal est unique (à isomorphisme unique près). Plus généralement, si $\mathscr{X}$ est un modèle minimal de X et $\mathscr{Y}$ est un modèle régulier propre, alors il existe un unique morphisme de modèles $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$; ce morphisme est une suite de contractions de courbes exceptionnelles du premier type. Si $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}'$ sont des modèles minimaux étale semi-stables de X et X' respectivement, alors tout morphisme $X' \to X$ s'étend, de manière unique, en un morphisme $\mathscr{X}' \to \mathscr{X}$. En particulier, si $X_{K'}$ a un modèle minimal étale semi-stable $\mathscr{X}$ sur une extension galoisienne K' de K, l'action naturelle du groupe $\mathrm{Aut}_K(X) \times \mathrm{Gal}(K'/K)$ s'étend à $\mathscr{X}$.

On peut aussi éclater tous les points d'auto-intersection des composantes de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$ pour obtenir un modèle semi-stable de $X_{K'}$; l'action de $\mathrm{Aut}_K(X) \times \mathrm{Gal}(K'/K)$ continue à s'étendre. Le résultat est *le modèle semi-stable minimal de* $X_{K'}$.

23. Un sous-schéma fermé E d'un schéma noethérien X est *une courbe exceptionnelle du premier type* si E est un diviseur de Cartier effectif sur X, il existe un corps k tel que $E \simeq \mathbf{P}^1_k$, et le pull-back du faisceau normal $\mathscr{N}_{E/X}$ est $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_k}(-1)$.

24. Les composantes irréductibles de la fibre spéciale peuvent avoir de l'autointersection.

A.1.3. Modèles stables. — Un *modèle stable* $\mathscr{X}$ d'une courbe projective lisse, géométriquement irréductible, définie sur K, est un schéma propre et plat sur $\mathscr{O}_K$ tel que $\mathscr{X}_K \simeq X$ et dont la fibre spéciale géométrique est une *courbe stable*, i.e. une courbe réduite, connexe, avec uniquement des singularités nodales, et dont toutes les composantes irréductibles de genre 0 rencontrent les autres composantes en au moins 3 points.

Si X est de genre ≥ 2, et si $\mathscr{X}$ est le modèle semi-stable minimal de $X_{K'}$ sur une extension galoisienne finie K' de K, alors le modèle stable $\mathscr{Y}$ de $X_{K'}$ est obtenu en contractant les courbes exceptionnelles de la fibre spéciale d'auto-intersection -2. Le modèle stable $\mathscr{Y}$ n'est pas forcément régulier ; il est stable par changement de corps de base et l'action de $\mathrm{Aut}_K(X) \times \mathrm{Gal}(K'/K)$ s'étend à $\mathscr{Y}$. Plus généralement, si $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Y}'$ sont les modèles stables de X et X' respectivement, alors tout morphisme $X' \to X$ s'étend, de manière unique, en un morphisme $\mathscr{Y}' \to \mathscr{Y}$.

A.2. Modèles semi-stables des courbes analytiques. — Passons aux modèles semi-stables des courbes de Berkovich [**28, 1, 60**].

A.2.1. Squelette analytique. — Soit X une courbe K-analytique. Rappelons que les points de X se répartissent en 4 types [**28**, 3.3.2] suivant la forme de leur corps résiduel complété. Si $Y \subset X$, on note $Y_{[i]}$ l'ensemble de ses points de type $i \in \{1,2,3,4\}$. L'ensemble des points de X ayant un voisinage qui est un disque ouvert virtuel [**28**, 3.6.34] est un ouvert de X [**28**, 5.1.8]. Le complémentaire $S^{\mathrm{an}}(X)$ de cet ensemble est le *squelette analytique* de X ; c'est un sous-graphe fermé de X. Il est localement fini et inclus dans tout sous-graphe analytiquement admissible [25] de X [**28**, 5.1.8]. Si X est lisse et si $S^{\mathrm{an}}(X)$ a une intersection non vide avec toutes les composantes connexes de X, alors il est analytiquement admissible et composé de points de type 2 ou 3 [**28**, 5.1.10].

Soient X une K-courbe analytique lisse et Γ un sous-graphe analytiquement admissible et localement fini de X tracé sur $X_{[2,3]}$. Un point x de Γ est *un noeud* [**28**, 5.1.12] s'il satisfait au moins une des conditions suivantes :

(1) x est de genre ≥ 1,

(2) x est un sommet topologique de Γ, i.e., la valence de (Γ, x) n'est pas 2,

(3) x est un point du bord $\partial^{\mathrm{an}} X$,

(4) $\mathfrak{s}(x)$ est [26] strictement inclus dans $\mathfrak{s}(\beta)$, où β est une branche de Γ partant de x.

L'ensemble Σ des noeuds de Γ est un sous-ensemble fermé et discret de Γ.

On note $\Sigma^{\mathrm{an}}(X)$ l'ensemble des noeuds de $S^{\mathrm{an}}(X)$. Si X est l'analytification d'une courbe projective lisse de genre ≥ 2, alors $\Sigma^{\mathrm{an}}(X)$ n'est pas vide [**28**, 5.4.16].

25. Un sous-graphe fermé de X est *analytiquement admissible* si toutes les composantes connexes de $X \setminus \Gamma$ sont des disques ouverts virtuels relativement compacts dans X.

26. $\mathfrak{s}(\bullet)$ est le “corps des constantes” [**28**, 4.5.11]. Si K est algébriquement clos, aucun point ne satisfait cette condition ; il en est de même si on remplace K par une extension finie assez grande.

A.2.2. Triangulations. — Si X est une K-courbe analytique lisse, une *triangulation*[27] [**28**, 5.1.13] de X est la donnée d'un sous-ensemble fermé discret S de X, contenu dans $X_{[2,3]}$, tel que toutes les composantes connexes de $X \setminus S$ soient des disques ou couronnes ouverts virtuels relativement compacts dans X. Le squelette Γ d'une triangulation S [**28**, 5.1.14] est un graphe admissible et localement fini, tracé sur $X_{[2,3]}$, dont les noeuds appartiennent à S.

Si X est géométriquement connexe et compacte, et si $\Sigma^{\mathrm{an}}(X) \neq \varnothing$, alors tous les sommets de $S^{\mathrm{an}}(X)$ sont des noeuds, et $\Sigma^{\mathrm{an}}(X)$ est une triangulation de X contenue dans toutes les triangulations de X [**28**, 5.4.12].

Soit $\mathscr{X}$ une courbe formelle, plate et normale sur $\mathscr{O}_K$. Soit $S(\mathscr{X})$ l'ensemble des préimages (par la spécialisation) dans $\mathscr{X}_K$ des points génériques des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$. Tout automorphisme de la paire $(\mathscr{X}_K, S(\mathscr{X}))$ s'étend (de manière unique) en un automorphisme de $\mathscr{X}$ [**28**, 6.3.23]. Si $\mathscr{X}$ est semi-stable au sens large[28], alors $S(\mathscr{X})$ est une triangulation : cela suit de ce que la préimage (par l'application de spécialisation) d'un point non singulier est un disque ouvert et celle d'un point double est une couronne ouverte. Si $\mathscr{X}$ est le modèle stable de l'analytification d'une courbe projective lisse X de genre ≥ 2, alors la triangulation $S(\mathscr{X})$ est égale à $\Sigma^{\mathrm{an}}(X)$ et le squelette de $S(\mathscr{X})$ est égal à $S^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}})$ [**1**, Th. 4.22].

A.3. Modèles semi-stables équivariants de $\mathscr{M}_n$. — Nous allons utiliser la théorie des modèles semi-stables des courbes analytiques pour construire des modèles semi-stables équivariants de $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ *sur une extension finie L de F*. Comme $\mathscr{M}_n^{\varpi}$ n'est pas compacte, l'existence d'un tel modèle ne résulte pas directement du théorème de réduction semi-stable pour les courbes, mais on peut utiliser l'action de G pour se ramener au cas compact.

Soit $\Gamma \subset G/\varpi^{\mathbf{Z}}$ un sous-groupe de congruence suffisamment petit pour que Γ opère librement et discrètement sur l'arbre de Bruhat-Tits. Soit $X := \Gamma\backslash\Omega_{\mathrm{Dr},F}$. Notons $\Omega^+_{\mathrm{Dr},F}$ le modèle semi-stable standard de Ω_{Dr} [**3**] ; l'action de G sur $\Omega_{\mathrm{Dr},F}$ s'étend à $\Omega^+_{\mathrm{Dr},F}$. Soit $X^+ := \Gamma\backslash\Omega^+_{\mathrm{Dr},F}$ – c'est le modèle semi-stable minimal de X [**49**, 3.1], et c'est aussi son modèle stable.

Soit $X_n := \Gamma\backslash\mathscr{M}^{\varpi}_{n,F}$. Choisissons une extension galoisienne finie L de F telle que $X_{n,L}$ ait un modèle stable $X^+_{n,L}$. Notons $X^{\circ}_{n,L}$ le modèle semi-stable minimal (il est obtenu à partir de $X^+_{n,L}$, de manière fonctorielle, en éclatant les points non réguliers pour obtenir le modèle minimal étale semi-stable, puis en éclatant les points d'autointersection de ce modèle).

27. Ou *semistable vertex set* [**1**].
28. I.e., étale localement, de la forme $\mathrm{Spf}\, \mathscr{O}_K\{X,Y\}/(XY-a)$, $a \in \mathscr{O}_K \setminus \{0\}$.

Considérons les diagrammes commutatifs suivants de morphismes de courbes L-analytiques [29] et de schémas formels, respectivement.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_2"] & \Omega_{\mathrm{Dr,L}} \arrow[d, "p_1"] \\
X_{n,L} \arrow[r, "f_2"] & X_L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{\circ} \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & (\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+} \arrow[r, dotted, "f_1"] \arrow[d, dotted, "p_2^{+}"] & \Omega^{+}_{\mathrm{Dr,L}} \arrow[d, "p_1"] \\
X^{\circ}_{n,L} \arrow[r] & X^{+}_{n,L} \arrow[r, "f_2"] & X^{+}_{L}
\end{tikzcd}$$

Le premier diagramme est commutatif. En ce qui concerne le second diagramme, l'application f_2 est l'extension de $f_2 : X_{n,L} \to X_L$. Le modèle $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+}$ est défini comme le produit fibré de $X^{+}_{n,L}$ et $\Omega^{+}_{\mathrm{Dr,L}}$ au-dessus de X^{+}_{L}. Il est étale au-dessus de $X^{+}_{n,L}$ car $\Omega^{+}_{\mathrm{Dr,L}}$ l'est au-dessus de X^{+}_{L} ; c'est donc un modèle semi-stable généralisé de $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$. De même, le modèle $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{\circ}$ est défini comme le produit fibré de $X^{\circ}_{n,L}$ et $\Omega^{+}_{\mathrm{Dr,L}}$ au-dessus de X°_{L}. Comme il est étale au-dessus de $X^{\circ}_{n,L}$ c'est un modèle semi-stable de $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$.

Proposition A.1. — *$(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{\circ}$ est un modèle semi-stable de $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$ auquel l'action de $G \times \check{G} \times \mathscr{G}_F$ s'étend de manière compatible à l'action sur $\Omega^{+}_{\mathrm{Dr},L}$.*

Démonstration. — On a déjà vu que $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{\circ}$ est un modèle semi-stable de $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$; il suffit donc de vérifier que l'action de $\mathrm{Aut}_F(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})$ s'étend à ce modèle. On va commencer par prouver que l'action s'étend à $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+}$.

Comme $X^{+}_{n,L}$ est le modèle stable de $X_{n,L}$, la triangulation $S(X^{+}_{n,L})$ qu'elle définit est égale à l'ensemble des noeuds $\Sigma^{\mathrm{an}}(X_{n,L})$ du squelette analytique de $X_{n,L}$.

Comme l'action de Γ sur l'arbre de Bruhat-Tits est libre, il en est de même de son action sur $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$ et sur $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+}$. Si $x \in \mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$, le corps résiduel de x est donc égal à celui de son image $p_2(x)$ et p_2, étant étale, est un isomorphisme local en x [**45**, 3.1.5]. On en déduit que :

- la triangulation $S(X^{+}_{n,L})$ est le quotient de $S((\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+})$ par Γ.
- x appartient au squelette analytique (resp. est un noeud) de $\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}$ si et seulement si $p_2(x)$ appartient à celui (resp. est un noeud) de $X_{n,L}$, et donc $\Sigma^{\mathrm{an}}(X_{n,L}) = \Gamma\backslash\Sigma^{\mathrm{an}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})$.

On a $\Sigma^{\mathrm{an}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}) \subset S((\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+})$, et comme, d'après ce qui précède, les quotients par Γ sont égaux, on en déduit que $\Sigma^{\mathrm{an}}(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L}) = S((\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+})$. Cela implique que $S((\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+})$ est invariante par $\mathrm{Aut}_F(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})$, et donc que l'action de $\mathrm{Aut}_F(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})$ s'étend au modèle $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+}$. Comme $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{\circ}$ est obtenu fonctoriellement à partir de $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{+}$, l'action de $\mathrm{Aut}_F(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})$ s'étend aussi à $(\mathscr{M}^{\varpi}_{n,L})^{\circ}$. $\square$

29. Nous omettrons l'exposant $(\bullet)^{\mathrm{an}}$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

Références

[1] M. Baker, S. Payne et J. Rabinoff, Nonarchimedean geometry, tropicalization, and metrics on curves, Algebr. Geom. **3** (2016), 63–105.

[2] P. Bayer, On Serre duality for coherent sheaves on rigid-analytic spaces, Manuscripta Mathematica **93** (1997), 219–245.

[3] J.-F. Boutot et H. Carayol, Uniformisation p-adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et de Drinfel'd, Astérisque **196-197** (1991), 45–158.

[4] J.-F. Boutot et T. Zink, The p-adic uniformization of Shimura curves, preprint 2000, disponible à `https://www.math.uni-bielefeld.de/~zink/p-adicuni.ps`.

[5] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paškūnas et S. W. Shin, Patching and the p-adic local Langlands correspondence, Cambridge J. Math. **4** (2016), 197–287.

[6] H. Carayol, Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. ENS **19** (1986), 409–468.

[7] H. Carayol, Non-abelian Lubin-Tate theory, in L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, volume II*, 15–39. Academic Press, 1990.

[8] B. Chiarellotto, Duality in rigid analysis, in *p-adic analysis (Trento, 1989)*, 142–172, Lecture Notes in Math. **1454**, Springer, 1990.

[9] L. Clozel, On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms, Invent. math. **83** (1986), 265–284.

[10] R. Coleman, Reciprocity laws on curves, Compositio Math. **72** (1989), 205–235.

[11] R. Coleman et A. Iovita, The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties, Duke Math. J. **97** (1999), 171–215.

[12] P. Colmez, Périodes p-adiques des variétés abéliennes, Math. Ann. **292** (1992), 629–644.

[13] P. Colmez, Intégration sur les variétés p-adiques, Astérisque **248** (1998).

[14] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[15] P. Colmez, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque **319** (2008), 117–186.

[16] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[17] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. EMS, à paraître.

[18] P. Colmez et G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[19] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł, Cohomologie des courbes analytiques p-adiques, en préparation.

[20] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł, Cohomology of p-adic Stein spaces, en préparation.

[21] P. Colmez, G. Dospinescu et V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.

[22] P. Colmez et J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

[23] P. Colmez et W. Nizioł, Syntomic complexes and p-adic nearby cycles, Invent. math. **208** (2017) 1–108.

[24] J.-F. Dat, Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques, Invent. math. **169** (2007), 75-152.

[25] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[26] G. Dospinescu et A.-C. Le Bras, Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p-adique, Ann. of Math., à paraître.

[27] V. Drinfeld, Elliptic modules, Math. Sb. **94** (1974), 594–627.

[28] A. Ducros, *La structure des courbes analytiques*, livre en préparation, version partielle disponible à `https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html`

[29] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2011 !

[30] G. Faltings, The trace formula and Drinfeld's upper half-plane, Duke Math. J. **76** (1994) 467–481.

[31] G. Faltings, Almost étale extensions. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. Astérisque No. **279** (2002), 185–270.

[32] G. Faltings, A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld in *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math. **300** (2002), 115-129.

[33] L. Fargues, L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques, 1–325, Progr. Math. **262**, Birkhäuser 2008.

[34] J.-M. Fontaine et W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry (K. Ribet, ed.), Contemporary Math., vol. **67**, AMS, Providence, 1987, 179–207.

[35] J. M. Fontaine, Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables, Astérisque **223** (1994), 321–347.

[36] J. Fresnel et M. van der Put, *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics **218**, Birkhäuser 2004.

[37] B.H. Gross et M.J. Hopkins, Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate space, in *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, Contemp. Math. **158** (1994), 23–88.

[38] E. Grosse-Klönne, Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 73–95.

[39] E. Grosse-Klönne, Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfeld's symmetric space. J. Algebraic Geom. **14** (2005), 391–437.

[40] E. Grosse-Klönne, De Rham cohomology of rigid spaces, Math. Z. **247** (2004), 223-240.

[41] M. Harris, Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld's upper half-space ; elaboration of Carayol's program, Invent. math. **129** (1997) 75–119.

[42] M. Harris et R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, with an appendix by Vladimir G. Berkovich, Annals of Mathematics Studies **151**, Princeton University Press, 2001.

[43] N. Jacobson Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc., 57 : 228-245.

[44] H. Jacquet et R. Langlands, Automorphic forms on **GL**(2), Lect. Notes in Math. **114**, Springer 1970.

[45] J. de Jong et M. van der Put, Étale cohomology of rigid analytic spaces, Doc. Math. **1** (1996), 1–56.

[46] K. Kedlaya, R. Liu, Relative p-adic Hodge theory, II : Imperfect period rings, arXiv :1602.06899v2 [math.NT].

[47] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**. Oxford University Press 2002. xvi+576 pp.

[48] Y. Morita, A p-adic theory of hyperfunctions, I, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 17 (1981), 1-24.

[49] G. A. Mustafin, Non-Archimedean uniformization. Mat. Sb. (N.S.) 105(147) (1978), 207–237.

[50] J. Nekovář et W. Nizioł, Syntomic cohomology and p-adic regulators for varieties over p-adic fields, Algebra Number Theory **10** (2016), 1695–1790.

[51] P. Scholze, Perfectoid spaces, Publ. IHÉS **116** (2012), 245–313.

[52] P. Scholze, p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77 pp.

[53] P. Scholze, Perfectoid spaces – a survey, Current Developments in Mathematics, 2012.

[54] P. Scholze, On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Ann. ENS, à paraître.

[55] P. Scholze et J. Weinstein, Moduli of p-divisible groups, Cambridge J. Math. **1** (2013), 145–237.

[56] T. Saito, Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory, Compositio Math. **145** (2009), 1081–1113.

[57] P. Schneider et J. Teitelbaum, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. 127, p. 359-380, 2002.

[58] P. Schneider et U. Stuhler, The cohomology of p-adic symmetric spaces, Invent. math. **105** (1991), 47–122.

[59] M. Strauch, Geometrically connected components of of Lubin-Tate deformation spaces with level structures, Pure and Applied Mathematics Q. **4** (2008), 1215–1232.

[60] M. Temkin, Introduction to Berkovich analytic spaces, *Berkovich spaces and applications*, Springer Lecture Notes in Math. **2119** (2015), 3–66.

[61] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. Invent. math. **137** (1999), 233–411.

[62] M. van der Put, The class group of a one-dimensional affinoid space, Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 155–164.

[63] M. van der Put, Serre duality for rigid analytic spaces, Indag. Math. **3** (1992), 219–235.

[64] J. Weinstein, Semistable models for modular curves of arbitrary level, Invent. math. **205** (2016), 459–526.

[65] S. Wewers, Some remarks on open analytic curves over non-archimedian fields, arXiv :math/0509434 [math.AG].

Pierre Colmez, CNRS, IMJ-PRG, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* pierre.colmez@imj-prg.fr

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr

Wiesława Nizioł, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* wieslawa.niziol@ens-lyon.fr