Séminaire BOURBAKI Janvier 2023
75e année, 2022–2023, n$^{\text{o}}$ 1201

LA CONJECTURE DU FACTEUR DIRECT [d'après André et Bhatt]

par **Gabriel Dospinescu**

La conjecture du facteur direct (théorème 1.1 ci-dessous) est un énoncé d'algèbre commutative presque aussi élémentaire que le Théorème de Fermat et qui est resté ouvert pendant près de 50 ans : énoncée en 1969 (cf. Hochster (1973) pour la version publiée), elle a été démontrée par André en 2016 (cf. André (2018a) pour la version publiée). Cet énoncé fait partie d'un faisceau de conjectures, les « conjectures homologiques » dont la liste et les relations donnent un peu le tournis [(1)]. En particulier, Hochster (1975, 1983) avait prouvé que l'existence de A-algèbres (ou même seulement de A-modules) de Cohen–Macaulay (voir § 1.5), pour tout anneau local noethérien A, impliquait la plupart de ces conjectures, par exemple celle du facteur direct. Hochster et Huneke (1992) avaient aussi montré [(2)] l'existence de telles A-algèbres dans le cas d'égale caractéristique, i.e. quand A contient un corps.

Le but de cet exposé est d'expliquer les techniques introduites par André dans ses trois articles monumentaux (André, 2018a,b, 2020), en particulier comment les espaces perfectoïdes introduits par Scholze (2012) permettent de construire des algèbres de Cohen–Macaulay pour les anneaux locaux noethériens d'inégale caractéristique et donc de prouver la conjecture du facteur direct. [(3)] Les travaux récents et spectaculaires de Bhatt (2020) poussent encore plus loin les techniques perfectoïdes (via la théorie prismatique de Bhatt et Scholze (2022) et la correspondance de Riemann–Hilbert p-adique de Bhatt et Lurie (2023)) et établissent (théorème 1.16 ci-dessous) un analogue en inégale caractéristique d'un célèbre théorème de Hochster et Huneke (1992) (en caractéristique positive), qui implique tous les résultats exposés ici, et bien plus.

La preuve du résultat de Bhatt est un véritable tour de force, et tous les détails ne sont pas encore (à notre connaissance) disponibles, nous avons donc décidé de nous

1. Voir le théorème 1.12 pour un condensé loin d'être exhaustif, ainsi que Hochster (2007), Roberts (1992) et Hochster (1983).

2. L'existence de A-modules de Cohen–Macaulay pour A d'égale caractéristique avait été établie bien avant, cf. Hochster, 1975.

3. Que les espaces perfectoïdes soient un outil indispensable en théorie de Hodge p-adique ne faisait guère de doute après leurs premières applications spectaculaires (Scholze, 2012, 2013, 2015). Qu'ils puissent aussi résoudre les conjectures homologiques était moins clair : la plupart de ces problèmes concernent des anneaux noethériens, propriété quasiment jamais satisfaite par les anneaux perfectoïdes.

concentrer sur les articles d'André dans cet exposé, en fournissant des preuves complètes (autant que faire se peut) des résultats principaux des trois articles mentionnés ci-dessus, tout en utilisant des idées de Bhatt (2018) pour simplifier certains arguments. [(4)] Le chemin que nous avons choisi pour arriver à la preuve de la conjecture du facteur direct n'est pas le plus court (la géodésique se trouve dans l'article Bhatt, 2018) ; il nous fera visiter des résultats plus puissants que la conjecture elle-même. Pour des applications de ces idées et techniques à la théorie (naissante) des singularités en caractéristique mixte nous renvoyons aux travaux de Ma et Schwede (2018, 2021) et Ma, Schwede, Tucker, Waldron et Witaszek (2022) (entre autres) et pour de vastes généralisations des résultats présentés ici le lecteur pourra consulter le livre (de longueur presque infinie...) de Gabber et Ramero (2018).

Convention : Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires, et les morphismes d'anneaux sont unitaires. Si I est un idéal d'un anneau A, on dit que A est *I-complet* si A est séparé complet pour la topologie I-adique. Pour $a \in A$ on dit que A est *a-complet* si A est aA-complet, et on note $A/a := A/aA$. On note $A[I]$ l'idéal de A des éléments annulés par tous les éléments de I. Si $a_1, \ldots, a_d$ sont des éléments de A, on note $(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{i=1}^{d} a_i A$ l'idéal de A qu'ils engendrent.

Remerciements : Mes plus vifs remerciements vont à Yves André, Bharghav Bhatt, Nicolas Bourbaki, Kęstutis Česnavičius, Pierre Colmez, Luc Illusie, Wiesława Nizioł et Olivier Taïbi. Leurs commentaires et leurs suggestions ont permis au béotien du sujet d'éviter bon nombre de pièges et ont grandement amélioré le contenu et la lisibilité de ce rapport. Je remercie tout particulièrement Yves André pour sa disponibilité, son enthousiasme et ses multiples remarques.

1. LES MULTIPLES VISAGES DE LA CONJECTURE

Le but de cette section est d'énoncer les principaux résultats d'algèbre commutative « classique » [(5)] démontrés par André et Bhatt, et d'expliquer les liens qu'ils entretiennent.

1.1. Les anneaux réguliers, sources de problèmes

Un anneau local noethérien A de dimension d est dit *régulier* si son unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ est engendré par d éléments (c'est le nombre minimal possible de générateurs). Des exemples typiques de tels anneaux sont les anneaux locaux des variétés algébriques

4. On trouvera deux preuves de l'existence de A-algèbres de Cohen–Macaulay dans ce rapport. Elles partagent un ingrédient fondamental, le lemme de platitude d'André ; l'une utilise le théorème de presque pureté de Faltings (1988, 2002), raffiné et étendu par Scholze (2012) et par Kedlaya et Liu (2015), l'autre n'en fait pas usage.

5. Les perfectoïdes n'apparaissent donc pas dans cette section. Le lecteur trouvera dans André (2018c) un survol des preuves fait par le maître, et qui semble impossible à dépasser en terme de présentation.

lisses sur un corps (ou sur un anneau de valuation discrète), ainsi que leurs complétés, par exemple $K[[X_1, \dots, X_n]]$ (K étant un corps ou un anneau de valuation discrète), mais aussi $\mathbf{Z}_p[[X, Y, Z]]/(p - X^5 - Y^7 - Z^9)$, etc.

En dépit de leur définition très simple, les anneaux locaux réguliers sont une source inépuisable de problèmes délicats, et il n'est pas facile d'établir même des propriétés très basiques comme la stabilité de la régularité par localisation en un idéal premier (cela se déduit de l'interprétation homologique de la régularité fournie par le théorème de Serre), ce qui permet de globaliser [(6)] la notion de régularité. Il n'est pas difficile de montrer que tout anneau local régulier est intègre, mais il faut se fatiguer un peu pour montrer qu'il est normal [(7)], et bien plus pour montrer qu'il est même factoriel (théorème d'Auslander–Buchsbaum).

Si $(A, \mathfrak{m})$ est un anneau local régulier, son complété $\hat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$ est un anneau local régulier complet (pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique), et le théorème de structure de Cohen montre que $\hat{A}$ a l'une des formes suivantes, à isomorphisme près :

- ou bien $V[[X_1, \dots, X_n]]$ avec V un corps ou un anneau de valuation discrète complet et non ramifié (i.e. l'idéal maximal de V est engendré par un nombre premier p). On dira alors que $\hat{A}$ est *non ramifié* ;
- ou bien $V[[X_1, \dots, X_n]]/(p - f)$ pour un anneau de valuation discrète complet et non ramifié V, de caractéristique résiduelle p, et un élément f dans $(p, X_1, \dots, X_n)^2$ mais pas dans $pV[[X_1, \dots, X_n]]$ (on dira que $\hat{A}$ est *ramifié* dans ce cas).

1.2. Énoncé de la conjecture du facteur direct

La conjecture du facteur direct de Hochster (1973), à laquelle cet exposé est consacré, est l'énoncé suivant, à l'air parfaitement innocent :

THÉORÈME 1.1. — *Toute extension finie d'un anneau régulier est scindée.*

Précisons l'énoncé : une *extension d'anneaux* est un morphisme injectif d'anneaux $f\colon A \to B$, elle est dite *finie* si f fait de B un A-module de type fini, et *scindée* si A est un facteur direct du A-module B, autrement dit s'il existe une application A-linéaire [(8)] $r\colon B \to A$ telle que $r(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$.

Remarque 1.2. — Bhatt (2018) revisite et simplifie la preuve d'André (2018a), ce qui lui permet d'établir la version dérivée suivante du théorème 1.1, conjecturée par de Jong : si A est un anneau régulier et si $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme propre et surjectif, alors le morphisme $A \to \mathrm{R}\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est scindé dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(A)$. Si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre cela se déduit des travaux de Kovács (2000), le cas $\mathrm{car}(A) = p$ avait été traité par Bhatt (2012).

---

6. Un anneau noethérien est régulier si ses localisés en des idéaux premiers quelconques sont des anneaux locaux réguliers.
7. Autrement dit intégralement clos dans son corps des fractions.
8. On ne demande pas à r d'être un morphisme d'anneaux.

Hochster (1973) a démontré le théorème 1.1 pour les anneaux réguliers contenant un corps, et a réduit, par un argument très indirect (cf. théorème 6.1 de Hochster, 1983) le cas général à celui d'un anneau local régulier complet, non ramifié, de corps résiduel algébriquement clos. Une avancée spectaculaire est due à Heitmann (2002) : il a démontré la conjecture quand $\dim A = 3$ (le cas $\dim A \leq 2$ est une conséquence de la formule d'Auslander–Buchsbaum).

Le lien entre les techniques perfectoïdes (plus précisément les presque mathématiques et le théorème de presque pureté de Faltings (1988, 2002)) et la conjecture du facteur direct semble avoir été remarqué depuis un certain temps [9], mais ce n'est qu'en 2014 que Bhatt (2014a) a obtenu le premier résultat un peu général via ces techniques, en traitant le cas où $B[\frac{1}{p}]$ est étale sur $A[\frac{1}{p}]$ (et même sous des hypothèses plus faibles). C'est ce cercle d'idées qui mènera à la preuve de la conjecture, mais il a fallu attendre les travaux d'André (2018a,b) pour traiter le cas général.

Remarque 1.3. — a) Une extension finie $f\colon A \to B$ d'anneaux noethériens est scindée si et seulement si l'extension induite $A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}}$ l'est pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A : l'existence d'un scindage équivaut à la surjectivité de l'application [10]

$$\mathrm{ev}_1\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(B, A) \to A,\ r \mapsto r(1),$$

qui peut se tester en localisant en tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, or $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(B, A)_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_{\mathfrak{m}}}}(B_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{m}})$ puisque B est un A-module de présentation finie. De même, f est scindée si et seulement si l'extension $C \to C \otimes_A B$ l'est pour une extension fidèlement plate C de A, car on peut tester la surjectivité de ev_1 après changement de base à C.

b) La preuve du théorème 1.1 se ramène au cas d'une extension finie $f\colon A \to B$ avec A local régulier complet et B intègre (donc local et complet). En effet, par a) on peut supposer que A est local, puis complet, en utilisant l'extension fidèlement plate $A \to \widehat{A}$. Si $\wp$ est un idéal premier de B tel que $\dim(B/\wp) = \dim B$, alors $\dim A/(\wp \cap A) = \dim A$, puis $\wp \cap A = \{0\}$ (car A est local et intègre), et tout scindage de l'extension finie $A \to B/\wp$ en fournit un pour $A \to B$.

c) Si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre intègre et normale, alors toute extension finie $f\colon A \to B$ est scindée. En effet, comme dans b) on peut supposer que B est intègre. Si K et L sont les corps des fractions de A et de B, par normalité de A la trace $\mathrm{Tr}_{L/K}\colon L \to K$ envoie B dans A, et $\frac{1}{[L:K]}\mathrm{Tr}_{L/K}\colon B \to A$ fournit un scindage. Donc pour les $\mathbf{Q}$-algèbres le théorème 1.1 est trivial, et pas optimal.

9. Par exemple, voici ce que m'écrit Wiesława Nizioł : « in 2001 Lorenzo Ramero visited me in Utah and gave a talk at the Number Theory seminar on his work with Gabber and their attempt to prove the almost purity conjecture. Paul Roberts was in the audience and was really surprised by the similarity of almost math techniques with the recent proof by Heitmann of the direct summand conjecture in dim 3. Heitmann worked in the almost setting and then at some point was able to descend to the usual setting (via some finiteness properties ?). Roberts got all excited about this and we had a seminar running for a semester on almost math and commutative algebra. It did not get anywhere because, of course, we did not have the almost purity in general at that time. »

10. On note Mod_A la catégorie des A-modules.

d) Si $\dim A \leq 2$ le théorème 1.1 se déduit de la formule d'Auslander–Buchsbaum. Si A est de caractéristique positive on dispose de toute une variété de preuves pas (trop) difficiles du théorème 1.1, voir l'exemple 1.3 de Bhatt (2012) pour une preuve cohomologique, et le paragraphe 6.2 de Hochster (1983) pour une preuve courte.

1.3. Fragmenteurs

Appelons *fragmenteur* (*splinter* en anglais) un anneau intègre A tel que toute extension finie de A soit scindée. Le théorème 1.1 affirme que les anneaux réguliers sont fragmenteurs. Tout fragmenteur est normal [(11)], et la réciproque est vraie pour les $\mathbf{Q}$-algèbres intègres (remarque 1.3). La situation est nettement plus compliquée en caractéristique positive ou mixte. Hochster et Huneke (1992, 1995) ont montré que les fragmenteurs noethériens de caractéristique positive et localement excellents [(12)] sont des anneaux de Cohen–Macaulay, et Bhatt (2020) vient de montrer, dans son travail spectaculaire, que cela reste vrai en caractéristique mixte (toujours sous des hypothèses d'excellence).

Une source importante de fragmenteurs est la théorie des représentations des groupes (linéairement) réductifs : si un tel groupe G agit sur une k-algèbre R qui est un anneau régulier (k étant un corps), alors l'anneau des invariants R^G est un fragmenteur (car l'inclusion $R^G \to R$ est scindée, via l'opérateur de Reynolds, R est un fragmenteur, et un facteur direct d'un fragmenteur en est encore un).

Voici un exemple (dû à Hochster, 1973) d'anneau normal, de Cohen–Macaulay (même intersection complète), et non fragmenteur. Soient k un corps de caractéristique 2 et $R = k[X,Y,Z]/(X^3+Y^3+Z^2) = k[x,y,z]$. Le morphisme $R \to k[U,V]$ envoyant x, y, z sur U^2, V^2, U^3+V^3 est fini, injectif et non scindé : s'il était scindé on aurait $R \cap Ik[U,V] = I$ pour tout idéal I de R, or $z \notin (x,y)$ et $U^3+V^3 \in (U^2,V^2)$.

Un schéma S est dit *fragmenteur* si pour tout morphisme fini surjectif $f\colon X \to S$ le morphisme $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ est scindé dans la catégorie $\mathrm{Coh}(S)$ des faisceaux cohérents sur S. On dit que S est un *D-fragmenteur* si pour tout morphisme propre surjectif $f\colon X \to S$ le morphisme $\mathcal{O}_S \to \mathrm{R}f_*\mathcal{O}_X$ est scindé dans $D(\mathrm{Coh}(S))$. Bhatt (2012) a montré qu'un $\mathbf{F}_p$-schéma noethérien est fragmenteur si et seulement s'il est D-fragmenteur. Pour comparer, pour un $\mathbf{Q}$-schéma le caractère fragmenteur est (plus ou moins, i.e. sous des hypothèses faibles) équivalent à la normalité, alors que le caractère D-fragmenteur est (plus ou moins) équivalent, par un théorème de Kovács (2000), au fait que les singularités de S sont au pire rationnelles, cf. exemples 1.1 et 1.2 de Bhatt (2012).

Voir André et Fiorot (2022) et Bhatt (2012) pour plus de détails et d'exemples concernant les fragmenteurs.

11. Si $x \in \mathrm{Frac}(A)$ est entier sur A, alors $A \to A[x]$ est une extension finie et elle n'est pas scindée si $x \notin A$, puisque toute rétraction A-linéaire $r\colon A[x] \to A$ doit envoyer x sur lui-même (si $x = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in A$ et $b \neq 0$, alors $a = r(a) = r(bx) = br(x)$).

12. i.e. dont les localisés en tout idéal maximal sont excellents.

1.4. Scindage et pureté

Un morphisme d'anneaux $f\colon A \to B$ est dit *pur* s'il est *universellement injectif*, i.e. si le morphisme induit $C \to B \otimes_A C$ reste injectif pour toute A-algèbre C, auquel cas il reste injectif pour tout A-module C. Toute extension scindée est clairement pure. Voici deux incarnations importantes de la notion de pureté :

• d'un point de vue catégorique, un morphisme $f\colon A \to B$ est pur si et seulement si le foncteur $(-) \otimes_A B\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ est fidèle. Rappelons que f est dit *plat* (resp. *fidèlement plat*) si le foncteur $(-) \otimes_A B$ est exact (resp. exact et fidèle). Ainsi tout morphisme fidèlement plat est pur ;

• Olivier (1973) a montré qu'un morphisme $f\colon A \to B$ est pur si et seulement si la théorie de la descente fonctionne bien [(13)] pour les B-modules. Comme il a été remarqué dans André et Fiorot (2022), cela permet de voir les morphismes purs comme les recouvrements pour la topologie canonique [(14)] sur la catégorie des schémas affines, ce qui en fournit une interprétation géométrique.

La conjecture du facteur direct se réincarne (cf. théorème 1.7) en un énoncé de pureté grâce au résultat suivant :

Proposition 1.4. — *Toute extension finie et pure d'anneaux noethériens est scindée.*

Démonstration. — On peut supposer que A est local et complet (remarque 1.3). Si E est une enveloppe injective du corps résiduel de A, le morphisme $E \to E \otimes_A B$ est injectif par pureté. Puisque E est un A-module injectif l'identité de E se prolonge en un morphisme de A-modules $u\colon E \otimes_A B \to E$, d'où un morphisme A-linéaire $B \to \mathrm{End}_A(E)$. Par dualité de Matlis on a $\mathrm{End}_A(E) \simeq A$, et la composée $B \to \mathrm{End}_A(E) \simeq A$ est un scindage de f. □

On peut utiliser les liens entre scindage et pureté pour obtenir des conséquences importantes du théorème 1.1. Nous allons mentionner deux telles applications. Si $f\colon A \to B$ est une extension pure, alors $A \cap IB = I$ pour tout idéal I de A (cela ne fait que traduire l'injectivité du morphisme $A/I \to B/IB = B \otimes_A A/I$). Sous des hypothèses faibles cette propriété de contraction d'idéaux caractérise la pureté : Hochster (1977) a montré qu'une extension finie $A \to B$ d'un anneau noethérien intègre et normal est scindée si $A \cap IB = I$ pour tout idéal I de A. La conjecture du facteur direct et le théorème suivant sont donc équivalents (une implication étant triviale, comme remarqué ci-dessus).

Théorème 1.5. — *Si $f\colon A \to B$ est une extension finie d'un anneau régulier A, alors $A \cap IB = I$ pour tout idéal I de A.*

---

13. Autrement dit le foncteur envoyant $M \in \mathrm{Mod}_A$ sur $B \otimes_A M$ muni de sa donnée de descente canonique induit une équivalence entre Mod_A et la catégorie des B-modules N munis d'un isomorphisme $N \otimes_A B \simeq B \otimes_A N$ de $B \otimes_A B$-modules vérifiant la condition usuelle de cocycle.

14. Il s'agit de la topologie de Grothendieck la plus fine pour laquelle tous les préfaisceaux représentables sont des faisceaux.

Pour la deuxième application, rappelons qu'un morphisme d'anneaux $f\colon A \to B$ *descend la platitude* si pour tout $M \in \mathrm{Mod}_A$ la platitude sur B de $B \otimes_A M$ force celle de M. Par exemple, toute extension pure descend la platitude (Olivier, 1973). Raynaud et Gruson (1971) ont montré, généralisant un théorème de Ferrand, que toute extension finie descend la platitude. Ils ont demandé (question 1.4.3, Seconde Partie de loc.cit.) si toute extension entière d'un anneau noethérien [15] A descend la platitude, et ont aussi expliqué qu'il suffit de résoudre ce problème quand A est régulier ; or dans ce cas le théorème 1.1 permet de conclure puisque toute extension entière $A \to B$ est pure, en tant que colimite filtrante d'extensions finies, donc pures. Donc la conjecture du facteur direct fournit une réponse positive à la question de Raynaud et Gruson. Ohi (1996) a montré que les théorèmes 1.6 et 1.1 sont en fait équivalents.

Théorème 1.6. — *Toute extension entière d'un anneau noethérien descend la platitude.*

Si A est un anneau et si $f\colon M \to N$ et $g\colon N \to P$ sont des morphismes de A-modules tels que $g \circ f$ soit pur, alors f est clairement pur. Le théorème 1.1 devient ainsi une conséquence directe du théorème fondamental suivant (qui sera discuté dans le § 1.5) et de la proposition 1.4.

Théorème 1.7. — *Pour toute extension finie $A \to B$ d'un anneau régulier A il existe un morphisme d'anneaux $B \to C$ tel que $A \to C$ soit fidèlement plat.*

Remarque 1.8. —

1. Géométriquement, on peut (suivant André et Fiorot, 2022) reformuler le théorème 1.1 (resp. 1.7) comme suit : si Y est un schéma noethérien régulier, alors tout morphisme fini surjectif $f\colon X \to Y$ est un recouvrement pour la topologie canonique (respectivement pour la topologie [16] fpqc) sur la catégorie des schémas.
2. Si l'on part d'une extension finie et pure $A \to B$, il est possible qu'un anneau C comme dans le théorème 1.7 n'existe pas (même avec A normal), i.e. la topologie fpqc est strictement plus faible que la topologie canonique. L'exemple 5.5 d'André et Fiorot (2022) est particulièrement simple (à énoncer, pas à prouver…) : l'inclusion $A := \mathbf{C}[X,Y]^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} \to B := \mathbf{C}[X,Y]$ (l'élément non trivial de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ agissant par $(X,Y) \mapsto (-X,-Y)$) est pure (immédiat) mais pas un recouvrement fpqc (cela utilise les constructions de Raynaud et Gruson (1971) (1.4.1.1), les premiers à avoir fourni des contre-exemples).

15. L'hypothèse que A soit noethérien n'est pas superflue !
16. Attention, on dit bien la topologie et non pas la pré-topologie (l'énoncé en question serait faux pour la pré-topologie fpqc). Un morphisme $f\colon X \to Y$ de schémas affines est un recouvrement pour la topologie fpqc s'il existe un morphisme $X' \to X$ de schémas affines tel que $X' \to Y$ soit fidèlement plat.

1.5. Algèbres de Cohen–Macaulay pour les anneaux locaux noethériens

Contrairement à la conjecture du facteur direct, le théorème 1.7 ci-dessus est très difficile même quand A est une $\mathbf{Q}$-algèbre (toutes les preuves existantes passent par une réduction, via la technique des ultrafiltres, au cas des anneaux de caractéristique positive, où le Frobenius fait des merveilles). Démontré par Hochster et Huneke (1992) quand A contient un corps, et par André (2018a) (et récemment par Bhatt (2020)) pour A d'inégale caractéristique, ce théorème est une reformulation d'une conjecture de Hochster (1979) concernant l'existence d'une A-algèbre de Cohen–Macaulay pour tout anneau local noethérien A. Pour expliquer le lien, nous devons faire quelques rappels.

Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien. Une suite $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dans $\mathfrak{m}$ est un *système de paramètres* (ou *suite sécante maximale*) si $d = \dim A$ et si $A/(x_1, \ldots, x_d)$ est de dimension 0, autrement dit s'il existe $t \geq 1$ tel que $\mathfrak{m}^t \subset (x_1, \ldots, x_d)$. D'autre part, une suite $z = (z_1, \ldots, z_k)$ d'éléments de A est une *suite régulière* dans un A-module M si $M/(z_1, \ldots, z_k)M \neq 0$ et si la multiplication par z_{i+1} est injective dans $M/(z_1, \ldots, z_i)M$ pour tout $0 \leq i < k$. On dit que M est un *A-module de Cohen–Macaulay* si tout système de paramètres dans A est une suite régulière dans M. On dit qu'une A-algèbre B est une *A-algèbre de Cohen–Macaulay* si B est un A-module de Cohen–Macaulay. Aucune hypothèse de finitude n'étant imposée à B, il ne faut donc pas confondre [17] cette définition avec celle d'un anneau de Cohen–Macaulay qui se trouve être une A-algèbre [18].

Le résultat suivant (Bartijn et Strooker, 1983, théorème 1.7 et Hochster et Huneke, 1995, 2.1.d) fait le lien avec le théorème 1.7.

Proposition 1.9. — *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien et soit M un A-module.*

a) Si A possède un système de paramètres qui est une suite régulière dans M, alors le complété $\mathfrak{m}$-adique de M est un A-module de Cohen–Macaulay.

b) Si A est régulier, un A-module est de Cohen–Macaulay si et seulement s'il est fidèlement plat sur A.

Compte tenu de cette proposition, le théorème 1.7 devient une conséquence [19] du résultat suivant, qui répond à la conjecture [20] de Hochster mentionnée ci-dessus.

---

17. Les diverses appellations dans la littérature anglophone donnent un peu le tournis : ce que nous définissons ici correspond à une *balanced (big) CM A-algebra*.

18. Le langage de l'algèbre commutative n'est pas vraiment commutatif…

19. Voici l'argument, suivant André, 2018a : soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A, soit $\widehat{A}_{\mathfrak{m}} := \varprojlim_n A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^n A_{\mathfrak{m}}$ et soit $\wp$ un idéal premier minimal de $B \otimes_A \widehat{A}_{\mathfrak{m}}$ tel que $\widehat{A}_{\mathfrak{m}} \to B' := (B \otimes_A \widehat{A}_{\mathfrak{m}})/\wp$ reste injectif et fini (cf. remarque 1.3, point b)). Alors B' est local, et on choisit une B'-algèbre de Cohen–Macaulay $C(\mathfrak{m})$. Alors $C(\mathfrak{m})$ est fidèlement plate sur $\widehat{A}_{\mathfrak{m}}$ (proposition 1.9). Comme A est noethérien, $C := \prod_{\mathfrak{m}} C(\mathfrak{m})$ est plate sur A, et même fidèlement plate puisque l'image de $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A)$ est stable par générisation (par platitude) et ne contient pas de point fermé par construction.

20. À l'origine elle concernait l'existence de A-modules de Cohen–Macaulay : Hochster (1979) professe un certain pessimisme concernant l'existence de A-algèbres de Cohen–Macaulay…

Théorème 1.10. — *Pour tout anneau local noethérien A il existe une A-algèbre de Cohen–Macaulay.*

Les constructions d'André que l'on verra dans la suite de cet exposé font intervenir des anneaux perfectoïdes, et les A-algèbres de Cohen–Macaulay qui en sortent ne sont presque jamais noethériennes. Ce n'est pas une grande surprise, puisque Hochster a déjà montré (théorème 6.1 de Hochster, 1979) que si A est un anneau local noethérien complet, normal, non Cohen–Macaulay, et contenant $\mathbf{Q}$, alors A n'admet pas de A-algèbre de Cohen–Macaulay noethérienne. Voir aussi Bhatt (2014b) pour des obstructions cohomologiques à l'existence de « petites algèbres de Cohen–Macaulay » [21] en caractéristique positive.

Le théorème 1.10 était connu pour des anneaux A d'égale caractéristique ou quand $\dim A \leq 3$, grâce aux travaux de Hochster et Huneke (1992) et Hochster (2002) (le cas d'inégale caractéristique en dimension 3 utilise de manière cruciale les travaux de Heitmann, 2002). Le cas restant est dû à André (2018a) (voir le § 1.7 pour l'approche de Bhatt). Cependant, pour l'instant ces techniques ne semblent pas permettre des avancées vers une autre conjecture célèbre de Hochster [22] : *tout anneau local noethérien complet A possède un A-module de Cohen–Macaulay de type fini.* Cette conjecture a un intérêt particulier puisqu'elle entraîne la conjecture de Serre (ouverte aussi depuis environ 50 ans) sur la (stricte) positivité des multiplicités d'intersection, mais en dehors du cas de la dimension ≤ 2 très peu de choses sont connues.

Remarque 1.11. — Dans une direction un peu différente mentionnons la conjecture de macaulayfication de Faltings : pour tout schéma noethérien quasi-excellent X il existe un schéma de Cohen–Macaulay $\tilde{X}$ et un morphisme projectif birationnel $\pi\colon \tilde{X} \to X$ qui est un isomorphisme au-dessus du lieu (ouvert) de Cohen–Macaulay de X. Voir Česnavičius (2021) pour une preuve, même sous des hypothèses plus faibles.

1.6. Les conjectures homologiques

On trouvera d'excellentes présentations, par exemple dans Hochster (2007) et Roberts (1992), de l'écheveau des « conjectures homologiques » et de leurs diverses imbrications, nous nous contentons dans ce paragraphe de quelques extraits, qui découlent (par les travaux de Hochster (1983), Peskine et Szpiro (1972) et Evans et Griffith (1981)) de l'existence d'algèbres (ou même seulement de modules) de Cohen–Macaulay pour les anneaux locaux noethériens.

Théorème 1.12. — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien, soit $x \in R$ et soient M, N des modules non nuls de type fini sur R.*

a) (conjecture de M. Auslander) *Si M est de dimension projective finie et sans x-torsion, alors R est sans x-torsion.*

21. i.e. des algèbres de Cohen–Macaulay qui sont des extensions finies de l'anneau de base.
22. On m'informe que l'on conjecture désormais le contraire...

b) (question de Bass) *Si M est de dimension injective finie alors R est Cohen–Macaulay.*

c) (conjecture d'intersection de Peskine–Szpiro) *Si $M \otimes_R N$ est de longueur finie, alors* $\dim N \leq \mathrm{pd}(M)$.

d) (« improved new intersection conjecture ») *Soit C un complexe de R-modules libres de type fini, concentré en degrés $[0, d]$, et tel que $H_{>0}(C)$ soit de longueur finie. Si $H_0(C)$ possède un générateur minimal non nul c tué par une puissance de $\mathfrak{m}$, alors* $\dim R \leq d$.

e) (« conjecture des syzygies d'Evans–Griffith ») *Supposons que R est intègre de Cohen–Macaulay. Si M est un kième module de syzygies, de dimension projective finie et non libre, alors M est de rang $\geq k$.*

Tous les résultats ci-dessus étaient connus à l'époque de l'article de Hochster (1979) quand l'anneau local contient un corps ou est de dimension ≤ 2, et ouverts dans les cas restants. Evans et Griffith avaient montré [23] que l'existence de modules de Cohen–Macaulay implique le point d), qui implique e). En combinant les travaux de Hochster (1983) et Dutta (1987), on montre que d) est équivalent à la conjecture du facteur direct, et il implique c). Le point c) avait été démontré par Peskine et Szpiro (1972) en présence d'un corps, et par Roberts (1987) en général. Peskine et Szpiro ont montré que c) implique b) et a).

Hochster (1983, théorème 6.1) a montré que la conjecture du facteur direct est équivalente à cette autre conjecture, la *conjecture monomiale*, tout aussi charmante :

Théorème 1.13. — *Si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de paramètres d'un anneau local noethérien $(A, \mathfrak{m})$, alors l'équation*

$$(x_1 \cdots x_n)^k = y_1 x_1^{k+1} + \cdots + y_n x_n^{k+1}$$

n'a pas de solutions $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ pour $k \geq 1$.

Ce théorème découle facilement du théorème 1.10, voici les grandes lignes de l'argument. Si $x_1, \ldots, x_n$ est une suite régulière dans un A-module M (pour un anneau A) et si $m_1, \ldots, m_n \in M$ vérifient $x_1 m_1 + \cdots + x_n m_n = 0$ alors $m_i \in (x_1, \ldots, x_n)M$ pour tout i [24]. On en déduit [25] que si a_i sont des entiers positifs et si $m, m_i \in M$ vérifient

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} m = x_1^{a_1+1} m_1 + \cdots + x_n^{a_n+1} m_n,$$

alors $m \in (x_1, \ldots, x_n)M$. En particulier, comme $M/(x_1, \ldots, x_n)M \neq 0$, on ne peut pas avoir $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in (x_1^{a_1+1}, \ldots, x_n^{a_n+1})$.

23. Sans le dire... voir la section 2 de Hochster (1983).

24. Comme x_n est non diviseur de zéro dans $M/(x_1, \ldots, x_{n-1})M$ on a $m_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i m_i'$ pour certains $m_i' \in M$. On a donc $\sum_{i=1}^{n-1} x_i(m_i + x_n m_i') = 0$, ce qui permet de conclure par récurrence.

25. Si tous les a_i sont nuls, cela est évident, soit donc i tel que $a_i \neq 0$ et posons $z = \prod_{j \neq i} x_j^{a_j}$ et $x_j' = x_j^{a_j+1}$ pour $j \neq i$. Comme $x_i^{a_i}(x_i m_i - zm) + \sum_{j \neq i} x_j' m_j = 0$ et $(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^{a_i}, x_{i+1}', \ldots, x_n')$ est une suite régulière, on obtient $x_i m_i - zm \in (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^{a_i}, x_{i+1}', \ldots, x_n')M$, donc $zm \in (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i, x_{i+1}', \ldots, x_n')M$. On conclut par récurrence sur le nombre de a_j non nuls.

Remarque 1.14. — Le théorème ci-dessus est à comparer avec l'énoncé suivant, qui découle du théorème de Briançon-Skoda : si A est un anneau régulier de dimension $\leq n$, alors

$$(x_1 \cdots x_{n+1})^n \in (x_1^{n+1}, \ldots, x_{n+1}^{n+1})$$

pour tous $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ (ce n'est déjà pas facile à démontrer pour $n = 2$!).

1.7. Algèbre dans la clôture intégrale absolue

Soit A un anneau intègre, et fixons une clôture algébrique K^+ du corps des fractions K de A. La *clôture intégrale absolue* A^+ de A est la clôture intégrale de A dans K^+. Elle est bien définie à isomorphisme près, et faiblement fonctorielle en A : tout morphisme $f\colon A \to B$ d'anneaux intègres induit [26] un morphisme $f^+\colon A^+ \to B^+$.

Pour voir le lien avec les conjectures discutées ci-dessus, mentionnons deux énoncés sympathiques. Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien complet et intègre. Si $\dim A \leq 2$ alors A^+ est une A-algèbre de Cohen–Macaulay (tout anneau noethérien intègre et normal de dimension 2 est de Cohen–Macaulay). À partir de la dimension 3 (resp. 4) et en égale caractéristique nulle (resp. en inégale caractéristique) A^+ n'est plus une A-algèbre de Cohen–Macaulay.

Dans un véritable tour de force d'algèbre commutative [27], Hochster et Huneke (1992) ont démontré le résultat suivant, qui implique immédiatement le théorème 1.10 en caractéristique positive, et même une forme plus forte, car la construction devient faiblement fonctorielle :

Théorème 1.15. — *Si A est un anneau local noethérien intègre et excellent* [28] *de caractéristique $p > 0$, alors A^+ est une A-algèbre de Cohen–Macaulay.*

Cette recette ne fonctionne plus si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre, et la preuve du théorème 1.10 (et la fonctorialité faible) passe par une réduction délicate à la caractéristique positive.

Nous finissons cette longue introduction avec le résultat spectaculaire suivant, dû à Bhatt (2020), et qui fournit un analogue du théorème de Hochster–Huneke en inégale caractéristique. Il entraîne immédiatement le théorème 1.10 en inégale caractéristique, ainsi que la fonctorialité faible des algèbres de Cohen–Macaulay. La preuve est très difficile et utilise toute la palette des développements en théorie de Hodge p-adique de ces dix dernières années, ainsi que la théorie prismatique de Bhatt et Scholze (2022) . Elle mériterait sans doute un exposé à part entière...

Théorème 1.16. — *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien intègre et excellent de caractéristique résiduelle $p > 0$. Le complété p-adique de A^+ est une A-algèbre de Cohen–Macaulay.*

---

26. Le cas d'une injection étant clair, supposons que f est surjectif ; on peut trouver un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A^+ au-dessus de $\wp := \ker f$, et alors $A/\wp$ s'injecte dans $A^+/\mathfrak{q}$, ce dernier étant isomorphe à B^+.
27. Voir l'article de Huneke et Lyubeznik (2007) pour une preuve plus simple.
28. Par exemple complet.

Remarque 1.17. — 1. Hochster (1983) a démontré que la conjecture du facteur direct est équivalente au sympathique énoncé suivant : pour tout anneau local noethérien complet et intègre $(A, \mathfrak{m})$ le A-dual de A^+ est non nul. Si A est de dimension n, par dualité locale cela équivaut à $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(A^+) \neq \{0\}$. Cette non annulation se voit facilement à partir du théorème 1.1 (le point délicat est que l'on peut aller dans l'autre sens) : par le théorème de Cohen on peut supposer [29] que A est aussi régulier, mais alors toute extension finie $A \to B$ dans A^+ est scindée, donc le morphisme $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(B)$ est injectif, et il en est de même de $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(A) \to \mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(A^+)$, ce qui permet de conclure puisque $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(A) \neq \{0\}$.

2. Dans la situation du théorème 1.16, on montre (c'est le coeur de l'article de Bhatt (2020)) que $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A^+/p)$ est nul pour $i < \dim(A/p)$ et $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A^+)$ est nul pour $i < \dim A$. Même en dimension 3 ce genre d'énoncé va beaucoup plus loin que ceux de Heitmann (2002) (on passe d'une presque nullité à une vraie nullité !). Cela lui permet de montrer que si A est un fragmenteur, alors A est de Cohen–Macaulay : par le même argument que ci-dessus la flèche $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A/p) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A^+/p)$ est injective (car A est un fragmenteur), donc $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A/p)$ est nul pour $i < \dim(A/p)$, et A est de Cohen–Macaulay.

2. ANNEAUX PERFECTOÏDES : ASPECTS ALGÉBRIQUES

Le but de cette section est de mettre ensemble un certain nombre de résultats sur les anneaux perfectoïdes « entiers », qui sont éparpillés façon puzzle dans la littérature. Nous renvoyons le lecteur aux articles fondamentaux de Bhatt, Morrow et Scholze (2018, section 3), Bhatt et Scholze (2022, sections 2 et 3), Česnavičius et Scholze (2019, section 2), au livre de Kedlaya et Liu (2015) et aux exposés de Fontaine (2013) et Morrow (2019) dans ce Séminaire pour plus de détails.

On fixe pour toute la suite un nombre premier p et on note $\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ la catégorie des $\mathbf{F}_p$-algèbres parfaites, i.e. celles dont le morphisme de Frobenius $\varphi\colon x \mapsto x^p$ est un automorphisme (une telle algèbre est donc réduite). La réduction modulo p et le foncteur $W(-)$ des vecteurs de Witt p-typiques induisent des équivalences quasi-inverses entre $\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et la catégorie des anneaux p-complets, sans p-torsion, dont la réduction modulo p est parfaite.

2.1. Vecteurs de Witt

Pour tout $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ il existe une unique application multiplicative, *mais pas forcément additive* $[\ ]\colon R \to W(R)$ telle que $[a] \equiv a \pmod p$ pour tout $a \in R$. Tout $x \in W(R)$ s'écrit $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]p^n$ pour une unique suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans R. Il sera très

29. Cela demande un petit peu de travail...

utile de considérer x comme une « fonction holomorphe de la variable p ». Il est donc tentant d'introduire la notation

$$x(0) := x_0, \ x'(0) := x_1.$$

L'application $x \mapsto x(0)$ induit un isomorphisme d'anneaux $W(R)/p \simeq R$, et un calcul immédiat montre que pour tous $x, y \in W(R)$ on a

$$(xy)'(0) = x(0)y'(0) + y(0)x'(0), \tag{1}$$

ce qui explique la notation. L'optimisme dégagé par cette observation est tempéré par le fait que $(x+y)'(0) \neq x'(0) + y'(0)$ en général. Cependant la relation ci-dessus jouera un rôle important à plusieurs reprises.

Remarque 2.1. — L'anneau $W(R)$ est muni d'un relèvement du Frobenius $\varphi\colon W(R) \to W(R)$, défini par $\varphi(\sum_{n\geq 0}[x_n]p^n) = \sum_{n\geq 0}[x_n^p]p^n$. L'application $\delta\colon W(R) \to W(R)$ définie par $\delta(x) := \frac{\varphi(x)-x^p}{p}$ est une p-dérivation (au sens de Buium) sur $W(R)$, i.e. elle vérifie

$$\delta(xy) = x^p\delta(y) + y^p\delta(x) + p\delta(x)\delta(y), \ \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{x^p + y^p - (x+y)^p}{p}$$

pour $x, y \in W(R)$. Cette application joue un rôle crucial dans Bhatt et Scholze (2022). Notons que $x'(0)^p$ est simplement la réduction modulo p de $\delta(x)$.

2.2. Constructions de Fontaine

Rappelons rapidement quelques constructions fondamentales dues à Fontaine.

DÉFINITION 2.2. — *Un* élément p-puissant *d'un anneau A est une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que $a_{n+1}^p = a_n$ pour tout n. On note $\varprojlim_{x\mapsto x^p} A$ l'ensemble des éléments p-puissants de A. On dira aussi, abusivement, qu'un élément $a \in A$ est p-puissant s'il est* muni *d'une suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} A$ telle que $a_0 = a$. On écrira $a^{p^{-n}}$ ou a^{1/p^n} au lieu de a_n et on notera $(a^{p^{-\infty}})$ l'idéal de A engendré par les a_n. Noter que l'expression « un élément p-puissant a de A » contient implicitement la donnée d'une suite de racines compatibles $(a^{p^{-n}})_{n\geq 0}$ de a.*

Par exemple, si $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ alors l'application $a \mapsto ([a^{1/p^n}])_{n\geq 0}$ induit une bijection entre R et $\varprojlim_{x\mapsto x^p} W(R)$. Plus généralement, soit B un anneau p-complet. La réduction modulo p induit une bijection multiplicative de $\varprojlim_{x\mapsto x^p} B$ sur le *basculé* $B^\flat := \varprojlim_{x\mapsto x^p} B/p$ de B, la $\mathbf{F}_p$-algèbre parfaite des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ dans B/p telles que $x_{n+1}^p = x_n$ pour tout n. L'inverse $\iota\colon B^\flat \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} B$ est construit comme suit : si $(x_n)_{n\geq 0} \in B^\flat$ et si $b_n \in B$ est un relèvement quelconque de x_n, alors la suite $(b_{n+k}^{p^k})_{k\geq 0}$ converge p-adiquement dans B vers un élément $\tilde{b}_n$ qui ne dépend pas du choix des b_n, et $\iota((x_n)_{n\geq 0}) = (\tilde{b}_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in B^\flat$ on a

$$\iota(x) = (\sharp(x), \sharp(x^{1/p}), \ldots),$$

où $\sharp\colon B^\flat \to B$ est l'application multiplicative (mais pas additive en général) obtenue en composant ι avec la projection sur la première composante $\varprojlim_{x\mapsto x^p} B \to B$, i.e.

$$\sharp(x_0, x_1, \ldots) = \tilde{b}_0 = \lim_{k\to\infty} b_k^{p^k}.$$

Un des grands classiques de la théorie de Fontaine est l'application

$$\theta_B\colon W(B^\flat) \to B,\ \theta_B(\sum_{n\geq 0}[a_n]p^n) = \sum_{n\geq 0} a_n^\sharp p^n.$$

Il s'agit de l'unique morphisme d'anneaux tel que $\theta_B([b]) = b^\sharp$ pour tout $b \in B^\flat$.

Toutes ces constructions sont fonctorielles en l'anneau p-complet B et permettent de caractériser $W(R)$ (pour $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$) dans la catégorie plus grande des anneaux p-complets, comme suit. Soit B un anneau p-complet et soit $f\colon W(R) \to B$ un morphisme d'anneaux. On obtient un morphisme d'anneaux $f^\flat\colon R \to B^\flat$ en passant aux basculés, plus concrètement en envoyant a sur la suite des réductions modulo p des $f([a^{1/p^n}])$, $n \geq 0$. Réciproquement, un morphisme d'anneaux $g\colon R \to B^\flat$ en induit un autre $f := \theta_B \circ W(g)\colon W(R) \to B$, tel que $f^\flat = g$. On a donc

$$f(\sum_{n\geq 0}[a_n]p^n) = \sum_{n\geq 0} g(a_n)^\sharp p^n.$$

On peut résumer cette discussion comme suit :

Proposition 2.3. — *Soit $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$. Les applications $f \mapsto f^\flat$ et $g \mapsto \theta_B \circ W(g)$ induisent une bijection fonctorielle en l'anneau p-complet B*

$$\mathrm{Hom}(W(R), B) \simeq \mathrm{Hom}(R, B^\flat).$$

2.3. Anneaux perfectoïdes

Soit $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$. On dit que $\xi \in W(R)$ est *distingué* si $\xi'(0)$ est inversible dans R, autrement dit si $\xi = [\xi(0)] + pu$ avec u inversible dans $W(R)$. Ainsi ξ est un avatar d'une « fonction holomorphe de la variable p, biholomorphe au voisinage de 0 ».

Remarque 2.4. — Soit $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et soit $\xi \in W(R)$ un élément distingué.

a) Pour tout morphisme $R \to S$ dans $\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ l'image de ξ reste distinguée dans $W(S)$. On la notera encore (abusivement) ξ. Si R est $\xi(0)$-complet, la relation (1) montre que $u\xi$ est distingué dans $W(R)$ pour tout élément inversible u de $W(R)$.

b) L'élément ξ n'est pas un diviseur de zéro dans $W(R)$: si $\xi x = 0$ alors $\xi(0)x(0) = 0$ et « en prenant la dérivée en 0 », i.e. en utilisant la relation (1) on obtient $\xi'(0)x(0) + \xi(0)x'(0) = 0$. Ainsi $\xi'(0)x(0)^2 = 0$, et comme $\xi'(0)$ est inversible et R est parfait, on a $x(0) = 0$. Donc $x = px_1$ pour un $x_1 \in W(R)$, et $\xi x_1 = 0$, puis par itération $x \in \cap_{n\geq 1} p^n W(R) = \{0\}$. Le même argument montre que si $a, x \in W(R)$ vérifient $a \mid \xi x$, alors $x(0)^2 \in (a(0)x'(0), a(0)x(0), a'(0)x(0))$. En particulier, si $p^2 \mid \xi x$ alors $p \mid x$.

Introduisons maintenant, suivant le point de vue prismatique de Bhatt et Scholze (2022), la classe la plus générale (à ce jour...) d'*anneaux perfectoïdes* :

Définition 2.5. — *Un anneau A est dit* perfectoïde *s'il est isomorphe à un anneau $W(R)/(\xi)$ avec $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et $\xi \in W(R)$ distingué. On note* Perf *la catégorie des anneaux perfectoïdes, les morphismes étant ceux d'anneaux.*

Remarque 2.6. — Les premiers êtres du monde perfectoïde sont les corps perfectoïdes [(30)], par exemple le complété $\mathbf{C}_p$ d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Puis ont vu le jour (Scholze, 2012) les algèbres de Banach perfectoïdes sur un tel corps (certaines étaient déjà bien présentes dans les articles de Colmez et Fontaine (2000) et Colmez (2002)...). Fontaine (2013) a introduit dans son exposé une classe plus large d'anneaux perfectoïdes. Enfin, Bhatt, Morrow et Scholze (2018) introduisent la classe la plus générale d'anneaux perfectoïdes, équivalente à celle introduite ci-dessus. Voir aussi la proposition 2.12 pour le lien avec les définitions plus anciennes (et plus restreintes).

Exemple 2.7. —
1. Il est évident que $\mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ s'identifie à la sous-catégorie de Perf des objets tués par p (noter que $p \in W(R)$ est distingué). En particulier l'anneau nul, $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}_p[T^{1/p^\infty}] := \varinjlim_n \mathbf{F}_p[T^{1/p^n}]$ sont perfectoïdes.
2. Soit $A = W(R)/(\xi)$, avec $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et $\xi \in W(R)$ distingué. L'image π de $[\xi(0)^{1/p}]$ dans A, munie de la suite de racines donnée par les images des $[\xi(0)^{1/p^{n+1}}]$ $(n \geq 0)$, est un élément p-puissant (définition 2.2) de A. On a une égalité $(\pi^p) = (p)$ d'idéaux de A, puisque $\xi = \xi(0) + pu$ avec u inversible. Ainsi non seulement $\mathbf{Z}_p$ n'est pas perfectoïde, il n'y a même pas de morphisme d'un anneau perfectoïde vers $\mathbf{Z}_p$. Noter que si $\xi(0) = 0$ alors $\pi = 0$ et $A \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$.
3. Gardons le contexte ci-dessus. Le Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ s'identifie au Frobenius $R/\xi(0)^{1/p} \to R/\xi(0)$, et c'est un isomorphisme. Ainsi pour tout anneau perfectoïde A il existe un élément p-puissant $\pi \in A$ tel que $(\pi^p) = (p)$ (la proposition 2.8 ci-dessous montre que A est π-complet) et tel que le Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ soit un isomorphisme. Voir la proposition 2.12 pour une réciproque partielle.
4. Pour $R = \mathbf{F}_p[T^{1/p^\infty}]$ l'anneau $W(R)$ est isomorphe au complété p-adique de $\mathbf{Z}_p[T^{1/p^\infty}]$ (réduire modulo p pour s'en convaincre). L'élément $\xi = [T] - p$ est distingué et $W(R)/(\xi)$ est isomorphe au complété p-adique de $\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$. Le même genre d'argument montre que si A est un anneau perfectoïde, alors le complété p-adique $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ de $A[T^{1/p^\infty}] = \varinjlim_n A[T^{1/p^n}]$ l'est aussi.
5. Comme W commute aux produits, on voit facilement qu'un produit quelconque d'anneaux perfectoïdes est perfectoïde. Il n'est pas vrai (cf. remarque 2.13), et ceci posera de sérieux soucis plus tard, qu'une limite projective (dans la catégorie des anneaux) d'anneaux perfectoïdes est perfectoïde.

30. Attention : un corps perfectoïde n'est pas la même chose qu'un anneau perfectoïde (au sens de la définition 2.5) qui est aussi un corps. Tout n'est pas parfait dans le monde perfectoïde...

2.4. Basculement

Le résultat suivant sera constamment utilisé par la suite.

Proposition 2.8. — *Tout anneau perfectoïde est p-complet et sa torsion p-primaire est tuée par p.*

Démonstration. — On peut supposer que l'anneau est de la forme $A = W(R)/(\xi)$ avec $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et $\xi \in W(R)$ distingué. Pour montrer que p annule $A[p^\infty]$ il suffit de montrer que $A[p^2] = A[p]$, autrement dit que si $x \in W(R)$ vérifie $\xi \mid p^2x$ alors $\xi \mid px$, ce qui se déduit de la dernière phrase de la remarque 2.4. Montrons ensuite que A est p-complet [31]. Il suffit de voir que $(\xi) \subset W(R)$ est fermé pour la topologie p-adique. Mais on vient d'établir l'égalité $(\xi) \cap p^2W(R) = p((\xi) \cap pW(R))$, et une récurrence immédiate donne $(\xi) \cap p^{n+1}W(R) = p^n((\xi) \cap pW(R))$. □

Soit $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et soit $\xi \in W(R)$ un élément distingué. En posant $A = W(R)/(\xi)$, l'anneau A/p s'identifie à $R/\xi(0)$, en particulier *le Frobenius est surjectif sur A/p*. Cela implique, par réduction modulo p et le caractère p-complet des anneaux en présence, la surjectivité de l'application de Fontaine $\theta_A \colon W(A^\flat) \to A$. Pour étudier son noyau on commence par décrire $A^\flat$. Puisque R est parfait et $A/p \simeq R/\xi(0)$, les morphismes $x \mapsto x^{p^n}$ induisent un isomorphisme entre les systèmes projectifs $\{A/p\}$ et $\{R/\xi(0)^{p^n}\}$, les transitions étant induites par le Frobenius pour le premier et les projections canoniques pour le second. Donc $A^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A/p$ est isomorphe à la $\xi(0)$-complétion $\hat{R}$ de R, en particulier *$A^\flat$ est $\xi(0)$-complet*. Pour aller plus loin nous avons besoin du :

Lemme 2.9. — *Le morphisme $R \to \hat{R}$ induit un isomorphisme $A \simeq W(\hat{R})/(\xi)$.*

Démonstration. — Puisque A et $W(\hat{R})/(\xi)$ sont p-complets (proposition 2.8), il suffit de voir que le morphisme induit $A/p^n \to W(\hat{R})/(\xi, p^n)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 1$. Mais $\xi - [\xi(0)]$ engendre le même idéal que p, donc

$$A/p^n \simeq W(R)/(p^n, \xi) = W(R)/([\xi(0)]^n, \xi) \simeq (W(R)/[\xi(0)]^n)/(\xi) \simeq W(R/\xi(0)^n)/(\xi).$$

Comme $R/\xi(0)^n \simeq \hat{R}/\xi(0)^n$, le même argument montre que $W(R/\xi(0)^n)/(\xi) \simeq (W(\hat{R})/(\xi))/p^n$ via les flèches évidentes, ce qui finit la preuve. □

L'adjonction entre basculement et vecteurs de Witt (proposition 2.3) montre que le morphisme $\theta_A \colon W(A^\flat) \to A$ s'identifie, via les isomorphismes $A^\flat \simeq \hat{R}$ et $A \simeq W(\hat{R})/(\xi)$, à la projection canonique $W(\hat{R}) \to W(\hat{R})/(\xi)$, en particulier son noyau est engendré par ξ. On obtient ainsi l'isomorphisme

$$\theta_A \colon W(A^\flat)/(\xi) \simeq A, \tag{2}$$

d'où le premier résultat fondamental de la théorie :

31. Une manière savante est de remarquer que A est p-complet au sens dérivé et sa torsion p-primaire étant bornée le mot « dérivé » est superflu...

Théorème 2.10. — *Si A est un anneau perfectoïde et si $\xi \in W(A^\flat)$ est distingué et engendre* $\ker(\theta_A)$*, alors la catégorie des A-algèbres perfectoïdes est équivalente, via $B \mapsto B^\flat$ et $R \mapsto W(R)/(\xi)$, à celle des $A^\flat$-algèbres parfaites $\xi(0)$-complètes.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\theta_B \colon W(B^\flat)/(\xi) \simeq B$ et que $B^\flat$ est $\xi(0)$-complète pour toute A-algèbre perfectoïde B. On vient de voir que θ_B est surjective et qu'il existe un élément distingué $\xi_1 \in W(B^\flat)$ tel que $\ker(\theta_B) = (\xi_1)$, $B^\flat$ étant $\xi_1(0)$-complet. Comme B est une A-algèbre, la fonctorialité de la construction de l'application θ montre que $\xi \in \ker(\theta_B)$, donc $\xi = \xi_1 v$ pour un $v \in W(B^\flat)$. En « dérivant » on obtient (cf. relation (1)) $\xi'(0) = \xi_1'(0)v(0)+\xi_1(0)v'(0)$, donc $\xi_1'(0)v(0) = \xi'(0)-\xi_1(0)v'(0)$ est inversible (puisque $\xi'(0)$ l'est et que $B^\flat$ est $\xi_1(0)$-complet). Comme $\xi_1'(0)$ est inversible, $v(0)$ l'est tout autant et donc il en est de même de v, et $(\xi) = (\xi_1)$. En particulier $B^\flat$ est aussi $\xi(0)$-complète, ce qui finit la preuve. □

La propriété de stabilité suivante jouera un rôle crucial par la suite.

Corollaire 2.11. — *Soit A un anneau perfectoïde. Si B et C sont des A-algèbres perfectoïdes, alors le complété p-adique $B\widehat{\otimes}_A C$ de $B \otimes_A C$ est un anneau perfectoïde. Plus précisément, si ξ engendre le noyau de $\theta_A \colon W(A^\flat) \to A$, alors*

$$B\widehat{\otimes}_A C \simeq W(B^\flat \otimes_{A^\flat} C^\flat)/(\xi).$$

Démonstration. — La $A^\flat$-algèbre $R := B^\flat \otimes_{A^\flat} C^\flat$ est parfaite puisque $A^\flat, B^\flat, C^\flat$ le sont. Comme ξ reste distingué dans $W(R)$, l'anneau $T = W(R)/(\xi)$ est perfectoïde, donc p-complet. Les morphismes $B^\flat \to R$ et $C^\flat \to R$ combinés avec les isomorphismes canoniques (théorème 2.10) $W(A^\flat)/(\xi) \simeq A, W(B^\flat)/(\xi) \simeq B, W(C^\flat)/(\xi) \simeq C$ induisent un morphisme $B \otimes_A C \to T$, qui se prolonge en un morphisme $B\widehat{\otimes}_A C \to T$ puisque T est p-complet. Pour montrer que c'est un isomorphisme il suffit de voir qu'il induit une bijection $\mathrm{Hom}(T, S) \to \mathrm{Hom}(B\widehat{\otimes}_A C, S)$ pour tout anneau p-complet S. Comme

$$\mathrm{Hom}(B\widehat{\otimes}_A C, S) = \mathrm{Hom}(B \otimes_A C, S) = \mathrm{Hom}\Big(\frac{W(B^\flat)}{(\xi)}, S\Big) \times_{\mathrm{Hom}\left(\frac{W(A^\flat)}{(\xi)}, S\right)} \mathrm{Hom}\Big(\frac{W(C^\flat)}{(\xi)}, S\Big),$$

le résultat suit formellement de l'adjonction fournie par la proposition 2.3. □

2.5. Anneaux perfectoïdes et Frobenius

Le résultat fondamental suivant (lemmes 3.9 et 3.10 de Bhatt, Morrow et Scholze (2018)) fournit le critère le plus simple pour tester le caractère perfectoïde d'un anneau, sous des hypothèses faibles. Cela permet de fabriquer des tas d'anneaux perfectoïdes sans être obligé de fournir une présentation $W(R)/(\xi)$, et fait aussi le lien avec les définitions plus anciennes (cf. remarque 2.6).

Proposition 2.12. — *Soit A un anneau contenant un non diviseur de zéro $\pi \in A$ tel que $\pi^p \mid p$, A est π-complet et le Frobenius induit un isomorphisme $A/\pi \simeq A/\pi^p$. Alors A est perfectoïde.*

Démonstration. — Notons que A est p-complet car $\pi^p \mid p$ et A est π-complet. Pour montrer la surjectivité de $\theta_A \colon W(A^\flat) \to A$ il suffit donc de montrer celle du Frobenius sur A/p. Pour tout $x \in A$ la surjectivité du Frobenius modulo π^p et la π-complétude de A permettent d'écrire $x = x_0^p + \pi^p x_1^p + \pi^{2p} x_2^p + \cdots$ pour certains $x_n \in A$, et alors $x \equiv (x_0 + \pi x_1 + \pi^2 x_2 + \cdots)^p \pmod p$.

Ensuite, on construit un élément distingué dans le noyau de $\theta := \theta_A$. La surjectivité du Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ et la π-complétude de A fournissent [(32)] un élément p-puissant (définition 2.2) $u \in A$ tel que $\pi \equiv u \pmod{\pi^p}$. Comme A est π-complet, π et u engendrent le même idéal de A, donc on peut remplacer π par u et supposer que $\pi = f^\sharp$ pour un $f \in A^\flat$. Comme θ est surjective et $\pi^p \mid p$, il existe $x \in A^\flat$ tel que $p = \pi^p \theta(-x) = \theta(-x[f]^p)$. En posant $\xi = p + x[f]^p$, on a $\xi'(0) = 1 + x'(0) f^p$. On vérifie ensuite que $A^\flat$ est f-complet, donc ξ est distingué, et que $\ker(\theta) = (\xi)$. □

Remarque 2.13. — On déduit facilement de la proposition 2.12 les résultats suivants :

1. Soit A un anneau intègre, sans p-torsion, p-adiquement séparé et tel que $p \in \mathrm{Rad}(A)$. Alors le complété p-adique $\widehat{A^+}$ de la clôture intégrale absolue A^+ de A est perfectoïde.
2. L'anneau $\mathbf{Z}_p$ n'est pas perfectoïde (exemple 2.7), mais le théorème d'Ax–Sen–Tate l'exhibe comme l'anneau des invariants de $\widehat{\mathbf{Z}_p^+}$ sous l'action du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$. On voit donc qu'une limite projective d'anneaux perfectoïdes ne l'est plus forcément (un autre exemple est fourni par les sous-anneaux $\widehat{\mathbf{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}$ et $\widehat{\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}$ de $\widehat{\mathbf{Z}_p^+}$, qui sont perfectoïdes, mais dont l'intersection, égale à $\mathbf{Z}_p$, ne l'est pas).

Remarque 2.14. — Le lien entre anneaux perfectoïdes et Frobenius est rendu plus clair par la théorie prismatique de Bhatt et Scholze (2022). Soit A un anneau muni d'une p-dérivation δ (cf. remarque 2.1), et soit $\varphi(x) = x^p + p\delta(x)$ le relèvement du Frobenius induit par δ. Si I est un idéal de A, on dit que la paire (A, I) est un *prisme* si I définit un diviseur de Cartier dans $\mathrm{Spec}(A)$, A est (p, I)-complet (au sens dérivé) et $p \in I + \varphi(I)A$. Bhatt et Scholze montrent (théorème 3.10 de loc.cit.) que la catégorie des prismes parfaits (i.e. pour lesquels $\varphi \colon A \to A$ est un isomorphisme) est équivalente à celle des anneaux perfectoïdes, via les foncteurs $(A, I) \mapsto A/I$ et $R \mapsto (W(R^\flat), \ker(\theta_R))$.

2.6. Anneaux perfectoïdes et p-clôtures intégrales

Les articles de Roberts (2008) et d'André (2018b) mettent en avant une relation fondamentale entre la notion de p-clôture intégrale (ou simplement p-clôture, pour raccourcir) et celle d'anneau perfectoïde.

32. Prendre une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A telle que $a_0 = \pi$ et $a_{n+1}^p \equiv a_n \pmod{\pi^p}$ et poser $u = \lim_{n \to \infty} a_n^{p^n}$, la suite $(a_n^{p^n})_{n \geq 0}$ étant de Cauchy pour la topologie π-adique.

Définition 2.15. — *Soit A un sous-anneau d'un anneau B. On dit que A est* p-clos *dans B si pour tout $x \in B$ vérifiant $x^p \in A$ on a $x \in A$. Il existe un plus petit sous-anneau p-clos de B contenant A, que l'on appelle la* p-clôture de A dans B.

Les observations suivantes sont dues à Roberts (2008). On fixe dans la suite de ce paragraphe un anneau A muni d'un non diviseur de zéro π tel que $\pi^p \mid p$. On note $\varphi \colon A/\pi \to A/\pi^p$ le Frobenius.

Proposition 2.16. — *a) La p-clôture de A dans $A[\frac{1}{\pi}]$ est*

$$R = \Big\{x \in A\Big[\frac{1}{\pi}\Big] \mid \exists n \geq 0, x^{p^n} \in A\Big\}.$$

b) L'anneau A est p-clos dans $A[\frac{1}{\pi}]$ si et seulement si $\varphi \colon A/\pi \to A/\pi^p$ est injectif.

Démonstration. — a) La seule difficulté est de montrer que R est bien un sous-anneau de $A[\frac{1}{\pi}]$, et plus précisément qu'il est stable par addition. Prenons $x, y \in R$ et $n, k \geq 1$ tels que $x^{p^n}, y^{p^n}, \pi^k x, \pi^k y$ soient tous dans A, et montrons qu'en posant $N = 2p^n k + n$ on a $(x+y)^{p^N} \in A$, ce qui permettra de conclure que $x + y \in R$. Il suffit de voir que $\binom{p^N}{i} x^{p^N - i} y^i \in A$ pour tout $0 \leq i \leq p^N$. Cela est évident si $p^n \mid i$, supposons donc que ce n'est pas le cas. Puisque $v_p(i) < n$ on a $p^{N-n} \mid \binom{p^N}{i}$, donc $\pi^{2p^n k} \mid \binom{p^N}{i}$. Comme $x^{p^n}, y^{p^n} \in A$, il suffit de voir que $\pi^{2p^n k} x^u y^v \in A$ pour $0 \leq u, v < p^n$, ce qui est clair puisque $\pi^k x, \pi^k y \in A$.

b) Il est clair que φ est injectif si A est p-clos dans $A[\frac{1}{\pi}]$. Dans l'autre sens, soit $x \in A[\frac{1}{\pi}]$ tel que $x^p \in A$ et soit $n \geq 1$ tel que $\pi^n x \in A$. Alors $(\pi^n x)^p \in \pi^p A$, donc $\pi^n x \in \pi A$ et $\pi^{n-1} x \in A$. En itérant on obtient $x \in A$. $\square$

Nous aurons besoin du résultat suivant dans la preuve du théorème 4.3.

Proposition 2.17. — *Supposons que le Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ est un isomorphisme et que $g \in A$ est p-puissant (déf. 2.2) et non diviseur de zéro modulo π. Pour tout $n \geq 1$ la p-clôture de $A[\frac{g}{\pi^n}]$ dans $A[\frac{1}{\pi}]$ est $A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}, j \geq 0]$, et son complété π-adique est perfectoïde.*

Démonstration. — L'algèbre $C := A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}, j \geq 0]$ est la réunion croissante de ses sous-algèbres $A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}]$, et clairement contenue dans la p-clôture de $A[\frac{g}{\pi^n}]$ dans $A[\frac{1}{\pi}]$.

Notons $\varphi_R \colon R/\pi \to R/\pi^p$ le Frobenius d'une A-algèbre R. Il suffit de montrer que φ_C est bijectif : le complété π-adique de C sera perfectoïde par la proposition 2.12, et C sera p-close dans $C[\frac{1}{\pi}] = A[\frac{1}{\pi}]$ (proposition 2.16), donc égale à la p-clôture de $A[\frac{g}{\pi^n}]$ dans $A[\frac{1}{\pi}]$.

Posons $u_j = \pi^{n/p^j} X^{1/p^j} - g^{1/p^j} \in A[X^{1/p^j}]$. Puisque g n'est pas un diviseur de zéro modulo π, la remarque 2.18 ci-dessous fournit des isomorphismes $A[\frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}] \simeq A[X^{1/p^j}]/(u_j)$ compatibles avec la variation de j, d'où un isomorphisme $C \simeq B/I$ avec $B = A[X^{1/p^\infty}]$ et $I = (u_0, u_1, \dots)$. Puisque φ_A est bijectif, il en est de même de φ_B. En utilisant les congruences $u_{j+1}^p \equiv u_j \pmod{\pi^p B}$, on en déduit facilement que $\varphi_{B/I}$ est un isomorphisme. □

Remarque 2.18. — Soient R un anneau et $r \in R$ non diviseur de zéro. Si $s \in R$ est non diviseur de zéro modulo r, alors le morphisme naturel $R[X]/(rX - s) \to R[\frac{s}{r}] \subset R[\frac{1}{r}]$ est un isomorphisme (exercice !).

2.7. Deux résultats techniques importants

Nous travaillerons souvent avec des anneaux sans p-torsion, et le caractère perfectoïde d'un anneau a le bon goût de se propager à son quotient maximal sans p-torsion :

Proposition 2.19. — *Si $A \simeq W(R)/(\xi)$ (avec $R \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ et ξ distingué) est un anneau perfectoïde alors $A/A[p^\infty] \simeq W(R/\mathrm{Ann}(\xi(0)))/\xi$ l'est aussi.*

Démonstration. — Rappelons que $A[p^\infty] = A[p]$ (proposition 2.8). Écrivons $\xi = [\xi(0)] + pu$, avec u inversible dans $W(R)$ et notons que $S := R/\mathrm{Ann}(\xi(0))$ est parfait. La projection canonique $f \colon R \to S$ induit un morphisme $f \colon W(R) \to W(S)$. Si $a \in A[p]$ se relève en $x \in W(R)$, il existe $y \in W(R)$ tel que $px = \xi y$. On a $f(y) \in pW(S)$ puisque $\xi(0)y(0) = 0$ (donc $f(y(0)) = 0$). On en déduit que $f(x) \in (\xi)W(S)$ et que le morphisme $A \to W(S)/(\xi)$ se factorise en un morphisme $A/A[p] \to W(S)/(\xi)$, clairement surjectif. Il est aussi injectif : si $a \in A$ se relève en $x \in W(R)$ et a une image nulle dans $W(S)/(\xi)$, alors $f(x) = \xi y$ pour un $y \in W(S)$. Soit $z \in W(R)$ un relèvement de y, alors $[\xi(0)](x - \xi y) = 0$, puis $(\xi - pu)(x - \xi y) = 0$ et $\xi \mid px$, donc $a \in A[p]$. □

Le résultat suivant sera systématiquement utilisé par la suite. Sa preuve est assez astucieuse.

Proposition 2.20. — *Tout anneau perfectoïde A est réduit et, pour tout élément p-puissant (déf. 2.2) $a \in A$, la torsion a-primaire $A[a^\infty]$ de A est tuée par $(a^{p^{-\infty}})$.*

Démonstration. — Le second point est une conséquence formelle du premier : si $a^n x = 0$ pour un $x \in A$, alors $(a^{n/p}x)^p = 0$, donc $a^{n/p}x = 0$ puisque A est réduit. Soit $\pi \in A$ un élément p-puissant tel que $(\pi^p) = (p)$ (exemple 2.7). Supposons d'abord que A est sans p-torsion. Si $a \in A$ vérifie $a^p = 0$, l'isomorphisme $A/\pi \simeq A/\pi^p$ montre que $a = \pi b$ pour un $b \in A$. Comme $(\pi^p) = (p)$ et A est sans p-torsion, on a $b^p = 0$. Par itération cela force $a \in \cap_n \pi^n A = \cap_n p^n A = \{0\}$, ce qui permet de conclure.

Dans le cas général, par la proposition 2.19 et le caractère réduit (même parfait !) de $A/(\pi^{p^{-\infty}})$, il suffit de prouver l'injectivité du morphisme naturel $A \to A/A[p] \times A/(\pi^{p^{-\infty}})$. Soit $a \in A[p] \cap (\pi^{p^{-\infty}})$ et soit $x \in W(R)$ un représentant de a. Comme $a \in (\pi^{p^{-\infty}})$, on a $x(0) \in (\xi(0)^{p^{-\infty}})$. Soit $R = A^\flat$, donc $A \simeq W(R)/(\xi)$. Puisque $pa = 0$, il existe $y \in W(R)$ tel que $px = \xi y$. On a donc $\xi(0)y(0) = 0$ et $\xi'(0)y(0) + \xi(0)y'(0) = x(0)$, donc $y(0) \in (\xi(0)^{p^{-\infty}})$. Mais $\xi(0) \in \mathrm{Ann}(y(0))$ et R est parfait, donc $(\xi(0)^{p^{-\infty}}) \subset \mathrm{Ann}(y(0))$, ce qui force $y(0)^2 = 0$, puis $y(0) = 0$. On a donc $\xi \mid x$ et $a = 0$. □

3. ALGÈBRES PERFECTOÏDES : ASPECTS ANALYTIQUES

On fixe dans cette section (qui emprunte les notations de la précédente) un nombre premier p (d'où une notion d'anneau perfectoïde), ainsi qu'un corps K muni d'une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|\colon K \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, dont la boule unité K^0 est un anneau perfectoïde. Comme K^0 est p-complet (proposition 2.8), on a $p \in \mathrm{Rad}(K^0)$ et donc $|p| < 1$. On fixe un élément $\pi \in K^0$ comme suit :

- si $\mathrm{car}(K) = p$ on prend n'importe quel élément non nul $\pi \in K^0$ tel que $|\pi| < 1$.
- sinon, on choisit un générateur distingué $\xi \in W((K^0)^\flat)$ de $\ker(\theta_{K^0})$ et on note

$$\pi = \theta_{K^0}([\xi(0)^{1/p}]) = (\xi(0)^{1/p})^\sharp \in K^0.$$

Ainsi $\pi^p K^0 = pK^0$, donc $|\pi| < 1$ et tout anneau perfectoïde est π-complet. L'élément π muni du système de racines $(\pi^{1/p^n} := (\xi(0)^{1/p^{n+1}})^\sharp)_{n\geq 0}$ est p-puissant (définition 2.2).

Dans les deux cas, $K^0/\pi \simeq K^0/\pi^p$ via le Frobenius, π est p-puissant et $|\pi| < 1$.

Si A est une K^0-algèbre plate (i.e. sans π-torsion) on note

$$A_* = \pi^{-1/p^\infty} A := \{f \in A[\frac{1}{\pi}] \mid \pi^{1/p^n} f \in A \text{ pour tout } n \geq 0\},$$

une sous K^0-algèbre de $A[\frac{1}{\pi}]$ contenant A et contenue dans $\pi^{-1}A$.

Remarque 3.1. — On voit facilement que $(A_*)_* = A_*$ et que si A est π-complète (respectivement p-close (définition 2.15) dans $A[\frac{1}{\pi}]$), alors A_* l'est aussi. Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système projectif de K^0-algèbres plates, alors $(\varprojlim_{i\in I} A_i)_* \simeq \varprojlim_{i\in I} (A_i)_*$.

3.1. Algèbres de Banach uniformes

On note Ban_K la catégorie des *K-algèbres de Banach*, i.e. celle des K-algèbres A munies d'une norme ultramétrique $|\cdot|\colon A \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ sur le K-espace vectoriel A telle que $|ab| \leq |a||b|$ pour tous $a, b \in A$ (et $|1| = 1$ si $A \neq 0$) et qui fait de A un espace métrique complet pour la distance induite. Les morphismes dans Ban_K sont les applications lipschitziennes qui sont aussi des morphismes de K-algèbres.

Berkovich [(33)] a construit un foncteur de Ban_K vers les espaces topologiques compacts, en associant à $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Ban}_K$ son *spectre de Berkovich* $\mathcal{M}(A)$, i.e. l'ensemble des semi-normes multiplicatives [(34)] $x\colon A \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ telles que $x(f) \leq |f|$ pour tout $f \in A$, muni de la topologie la plus faible rendant continues les évaluations $x \mapsto x(f)$ pour $f \in A$. On écrira $|f(x)|$ au lieu de $x(f)$.

Soit $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Ban}_K$. Le sous-ensemble

$$A^0 = \{f \in A \mid \sup_{n\geq 1} |f^n| < \infty\}$$

33. On pourrait (ou devrait...) remplacer les espaces de Berkovich par ceux de Huber dans ce qui suit. Nous avons fait ce choix pour épargner au lecteur les multiples définitions intervenant dans la théorie de Huber, qui ne joueront pas de rôle sérieux dans cet exposé.

34. On demande donc que $x(f+g) \leq \max(x(f), x(g)), x(fg) = x(f)x(g)$ et $x(1) = 1$ si $A \neq 0$.

est une sous K^0-algèbre de A, contenant la boule unité de A, en particulier $A^0[\frac{1}{\pi}] = A$. On écrira A^0_* au lieu de $(A^0)_*$. Si l'on note

$$|f|_{\mathrm{sp}} = \lim_{n\to\infty} |f^n|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} |f^n|^{1/n}$$

la *semi-norme spectrale* d'un élément $f \in A$, on dispose des formules fondamentales [35]

$$|f|_{\mathrm{sp}} = \max_{x\in\mathcal{M}(A)} |f(x)| \text{ et } A^0_* = \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\}.$$

On dit que $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Ban}_K$ est *uniforme* si A^0 est une partie bornée de A. Cela arrive si et seulement si $|\cdot|$ est équivalente [36] à $|\cdot|_{\mathrm{sp}}$, auquel cas [37]

$$A^0 = A^0_* = \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\} = \{f \in A \,|\, |f(x)| \leq 1, \text{ pour tout } x \in \mathcal{M}(A)\} \qquad (3).$$

On note Ban^u_K la sous-catégorie pleine de Ban_K des K-algèbres de Banach uniformes.

On dit que A est *spectrale* si $|f| = |f|_{\mathrm{sp}}$ pour tout $f \in A$, ce qui arrive si et seulement si A^0 est la boule unité de A, auquel cas A est uniforme.

3.2. Dictionnaire analyse-algèbre, interprétation catégorique

Le lecteur trouvera un dictionnaire exhaustif analyse-algèbre dans le paragraphe 2.3 de l'article d'André (2018b).

Proposition 3.2. — *Soit $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Ban}^u_K$. La K^0-algèbre A^0 est plate, π-complète et p-close (déf. 2.15) dans $A = A^0[\frac{1}{\pi}]$. Ainsi le Frobenius $A^0/\pi \to A^0/\pi^p$ est injectif.*

Démonstration. — Le seul point non évident est le fait que A^0 est p-close, mais il suffit de contempler l'égalité (3) pour s'en convaincre. □

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des K^0-algèbres plates et π-complètes S, telles que S soit p-close dans $S[\frac{1}{\pi}]$ (définition 2.15) et $S_* = S$. Pour $S \in \mathcal{C}$ et $f \in A := S[\frac{1}{\pi}]$ on pose

$$|f| := \inf\{|k| \mid k \in K \setminus \{0\}, \frac{f}{k} \in S\}.$$

Alors [38] $(A, |\cdot|)$ devient une K-algèbre de Banach spectrale (donc uniforme) telle que $A^0 = S$. On obtient ainsi :

Proposition 3.3. — *Le foncteur $(A, |\cdot|) \mapsto A^0$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathrm{Ban}^u_K \simeq \mathcal{C}.$$

35. La première est la *formule du rayon spectral* de Berkovich ; la seconde découle facilement des inclusions évidentes $\{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} < 1\} \subset A^0 \subset \{f \in A \,|\, |f|_{\mathrm{sp}} \leq 1\}$.

36. Il faut et il suffit qu'il existe $n > 1$ et $c > 0$ tels que $|f^n| \geq c|f|^n$ pour tout $f \in A$.

37. Pour la première égalité noter que si $f \in A^0_*$ alors f^{p^n} reste dans le borné $p^{-1}A^0$ pour tout n.

38. Le fait que S est plate, π-complète et vérifie $S = S_*$ est suffisant pour montrer que $|\cdot|$ est une norme de K-algèbre de Banach sur A, de boule unité S. On déduit de la relation $S = \{f \in A |\, f^p \in S\}$ que $|f^p| = |f|^p$, puis que $|f| = \lim_{n\to\infty} |f^{p^n}|^{1/p^n} = |f|_{\mathrm{sp}}$ pour tout $f \in A$, donc A est bien spectrale.

La remarque 3.1 montre que $\mathcal{C}$ possède toutes les petites limites (qui se calculent comme dans la catégorie des K^0-algèbres) et toutes les colimites filtrantes : si $(S_i)_{i\in I}$ est un système inductif filtrant dans $\mathcal{C}$, sa colimite dans $\mathcal{C}$ est S_*, où S est le complété π-adique de la colimite dans la catégorie des anneaux $\varinjlim_{i\in I} S_i$.

Ainsi la catégorie Ban_K^u possède toutes les petites limites, et aussi toutes les colimites filtrantes. L'inclusion de Ban_K^u dans Ban_K admet un adjoint à gauche $A \mapsto A^u$, l'uniformisé A^u de A étant le séparé complété de A pour la semi-norme spectrale. Comme Ban_K possède des pushouts (donnés par le produit tensoriel complété), il en est de même de Ban_K^u : si $A \to B$ et $A \to C$ sont des morphismes dans Ban_K^u, le pushout correspondant est $B\widehat{\otimes}_A^u C := (B\widehat{\otimes}_A C)^u$. Le calcul de $(B\widehat{\otimes}_A^u C)^0$ n'est pas aisé, mais on verra qu'il est (presque) faisable dans le monde parfait des algèbres de Banach perfectoïdes.

3.3. Algèbres de Banach perfectoïdes

Il convient de garder en tête qu'une *K-algèbre de Banach perfectoïde* n'est *pas* la même chose qu'une K-algèbre qui est un anneau perfectoïde :

Définition 3.4. — *Une* K-algèbre de Banach perfectoïde *est un objet* $(A, |\cdot|)$ *de* Ban_K^u *tel que A^0 soit un anneau perfectoïde. On note* Perf_K *la sous-catégorie pleine de* Ban_K^u *dont les objets sont les K-algèbres de Banach perfectoïdes.*

Vérifions la compatibilité avec la définition originelle dans Scholze (2012) :

Proposition 3.5. — *Une K^0-algèbre plate et π-complète B est un anneau perfectoïde si et seulement si le Frobenius $B/\pi \to B/\pi^p$ est un isomorphisme, auquel cas B_* est un anneau perfectoïde et B est p-close dans $B[\frac{1}{\pi}]$ (déf. 2.15). En particulier $A \in \mathrm{Ban}_K^u$ est dans* Perf_K *si et seulement si le Frobenius $A^0/\pi \to A^0/\pi^p$ est un isomorphisme ou, de manière équivalente*[39]*, surjectif.*

Démonstration. — On peut supposer que $\mathrm{car}(K) = 0$. Si B est un anneau perfectoïde, le théorème 2.10 montre que $B \simeq W(B^\flat)/(\xi)$. Puisque $\pi = \theta_{K^0}([\xi(0)^{1/p}])$, le Frobenius $B/\pi \to B/\pi^p$ est un isomorphisme et donc (proposition 2.16) B est p-close dans $B[\frac{1}{\pi}]$. La réciproque découle de la proposition 2.12. Supposons que B est un anneau perfectoïde. Comme B_* est plate et π-complète, il suffit de voir (d'après ce que l'on vient de faire) que le Frobenius $B_*/\pi \to B_*/\pi^p$ est un isomorphisme. Mais B étant p-close dans $B[\frac{1}{\pi}]$, B_* l'est dans $B_*[\frac{1}{\pi}]$, donc $B_*/\pi \to B_*/\pi^p$ est injectif. Soit $x \in B_*$, alors $\pi x \in B$ donc $\pi x = a^p + \pi^p b$ avec $a, b \in A$. Puisque $x = (\pi^{-1/p}a)^p + \pi^{p-1}b$ et B_* est p-close dans $B[\frac{1}{\pi}]$, on a $\pi^{-1/p}a \in B_*$, donc $B_* = B_*^p + \pi B_*$. Par itération et en utilisant le fait que $\pi^p \mid p$, on obtient $B_* = B_*^p + \pi^p B_*$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 3.6. — 1. Le caractère perfectoïde de B_* n'est pas totalement gratuit : si $A \in \mathrm{Perf}_K$ et si $g \in A^0$ n'est pas un diviseur de zéro, il n'est pas connu (cf. la question 3.5.1 d'André (2018b)) si l'algèbre $g^{-1/p^\infty}A = \cap_{n\geq 1} g^{-1/p^n}A \subset A[\frac{1}{g}]$

39. Puisque A est uniforme, A^0 est p-close dans A, donc le Frobenius $A^0/\pi \to A^0/\pi^p$ est injectif.

est encore dans Perf_K. Cette algèbre interviendra naturellement par la suite (cf. théorème 5.1 par exemple).

2. Supposons que $\mathrm{car}(K) = 0$ et posons $K^\flat := (K^0)^\flat[\frac{1}{\xi(0)}]$, un corps perfectoïde de caractéristique p. En combinant la proposition ci-dessus et le théorème 2.10, on obtient facilement l'équivalence de catégories $\mathrm{Perf}_K \simeq \mathrm{Perf}_{K^\flat}$ de Scholze (2012), induite par les foncteurs $A \mapsto A^\flat := (A^0)^\flat[\frac{1}{\xi(0)}]$ et $R \mapsto W(R)[\frac{1}{\pi}]/(\xi)$ (cette approche est celle de Fontaine (2013) et du livre de Kedlaya et Liu (2015)).
3. La catégorie Perf_K possède toutes les colimites filtrantes, qui sont les mêmes que celles dans Ban_K^u : si $(B_i)_{i\in I}$ est un système inductif filtrant dans Perf_K alors $A := (\widehat{\varinjlim_{i\in I} B_i^0})_*$ est perfectoïde (proposition 3.5). L'équivalence $\mathrm{Perf}_K \simeq \mathrm{Perf}_{K^\flat}$ et la description explicite [40] de $\mathrm{Perf}_{K^\flat}$ montrent que Perf_K possède aussi toutes les petites limites, *mais si* $\mathrm{car}(K) = 0$ *elles ne sont pas les mêmes que celles dans* Ban_K^u*, et cela même pour les limites finies.* Voir les exemples prophylactiques 3.8.2 et 3.8.5 d'André (2018b). Le point 1) est un autre exemple de difficulté posée par la différence entre les limites dans Ban_K^u et celles dans Perf_K quand $\mathrm{car}(K) = 0$.

3.4. Le lemme d'approximation de Scholze

Nous aurons besoin du résultat technique mais fondamental ci-dessous. La preuve originelle (Scholze, 2012 dans un contexte un peu différent) est assez technique, voir aussi la preuve du lemme 2.3.1 dans Česnavičius et Scholze (2019), qui reprend un argument de Kedlaya.

Si A est un anneau et $\pi \in A$, on note $\mathrm{Spa}_\pi(A)$ l'ensemble des valeurs absolues [41] $|\cdot|\colon A \to \Gamma \cup \{0\}$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné (noté multiplicativement), telles que $|f| \leq 1$ pour tout $f \in A$ et $\lim_{n\to\infty} |\pi^n| = 0$. Si π est non diviseur de zéro on note $\mathrm{Spa}(A[\frac{1}{\pi}], A)$ le sous-ensemble des $|\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(A)$ qui se prolongent en une valeur absolue sur $A[\frac{1}{\pi}]$.

Théorème 3.7 (lemme d'approximation). — *Soit A un anneau perfectoïde et soit $\pi \in A$ tel que A soit π-complet et $\pi^p \mid p$. Pour tous $f \in A$ et $n \in \mathbf{N}$, il existe $g \in A$ p-puissant (déf. 2.2) tel que*

$$|f - g| \leq |p| \cdot \max(|g|, |\pi|^n), \ \textit{pour tout}\ |\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(A);$$

en particulier $|f| \leq |\pi|^n$ si et seulement si $|g| \leq |\pi|^n$.

Proposition 3.8. — *Soient A un anneau, $\pi \in A$, non diviseur de zéro et $x \in A[\frac{1}{\pi}]$.*

a) Si $|x| < 1$ pour tout $|\cdot| \in \mathrm{Spa}(A[\frac{1}{\pi}], A)$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $x^n \in \pi A$.

b) Si $y \in A[\frac{1}{\pi}]$ vérifie $|x - y| < 1$ pour tout $|\cdot| \in \mathrm{Spa}(A[\frac{1}{\pi}] = A[x][\frac{1}{\pi}], A[x])$, alors y est dans la p-clôture (déf. 2.15) de $A[x]$ dans $A[\frac{1}{\pi}]$.

40. Il s'agit de la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ban}_{K^\flat}^u$ des $K^\flat$-algèbres de Banach parfaites.
41. On demande que $|ab| = |a||b|$, $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$, pour $a, b \in A$, $|0| = 0$ et $|1| = 1$ si $A \neq \{0\}$.

Démonstration. — Le point a) est standard, voir le lemme 2.3.2 de Česnavičius et Scholze (2019) pour la preuve. Le b) s'en déduit [42]. □

3.5. Presque rappels de presque algèbre

On trouve dans le livre de Gabber et Ramero (2003) un exposé exhaustif de la théorie des presque mathématiques [43] de Faltings, et un excellent résumé des points essentiels dans la section 1 de l'article d'André (2018b).

On fixe un anneau V muni d'un élément p-puissant (définition 2.2) g, d'où un idéal idempotent $\mathfrak{m} = (g^{p^{-\infty}})$ (on dira aussi, simplement et abusivement, que l'on se place *dans le cadre* $g^{1/p^{\infty}}$). La proposition 2.1.7 de Gabber et Ramero (2003) montre que $\mathfrak{m} \otimes_V \mathfrak{m}$ est un V-module plat (cela est évident si V est sans g-torsion), donc les résultats de Gabber et Ramero (2003) s'appliquent.

Définition 3.9. — *Soit $f \colon M \to N$ un morphisme de V-modules. On dit que*

- *M est* presque nul *si $\mathfrak{m}M = 0$;*

- *f est* presque injectif (resp. presque surjectif, resp. un presque isomorphisme) *si* $\ker f$ *(resp.* $\operatorname{coker} f$*, resp. les deux) est presque nul ;*

- *M est* presque plat *si $M \otimes_V N \to M \otimes_V P$ est presque injectif pour tout morphisme injectif $N \to P$ de V-modules, ce qui équivaut à la presque nullité de $\operatorname{Tor}_i^A(M, N)$ pour tous $i > 0$ et $N \in \mathrm{Mod}_V$. On définit de manière analogue la notion de module* presque projectif *;*

- *M est* presque fidèlement plat *si M est presque plat et si la presque nullité de $M \otimes_V N$ entraîne celle de N pour tout $N \in \mathrm{Mod}_V$;*

- *M est* presque de type fini *si pour tout n il existe un sous V-module de type fini $N \subset M$ tel que $g^{1/p^n} M \subset N$.*

Si W est une V-algèbre, g reste p-puissant dans W, donc on peut appliquer les définitions ci-dessus aux W-modules, d'où une notion de W-module presque plat, etc. Cette remarque est utilisée dans la définition suivante :

Définition 3.10. — *Soit $g \colon A \to B$ un morphisme de V-algèbres. On dit que*

- *g est* presque étale *si B est un A-module presque plat et un $B \otimes_A B$-module (via la multiplication $B \otimes_A B \to B$) presque projectif ;*

- *g est* presque fini étale *si g est presque étale et si B est un A-module presque de type fini et presque projectif.*

---

42. Par a) il existe $d \geq 0$ tel que $(x - y)^{p^d} \in \pi A[x]$.
43. Qui semble être une manière d'écrire des $o(1)$ sans l'avouer…

3.6. Miracles perfectoïdes

Les résultats suivants de Scholze (2012) sont pour le moins surprenants : leurs analogues dans le monde des algèbres affinoïdes usuelles sont totalement faux. Dans le monde perfectoïde c'est (presque) tous les jours le printemps ...

Théorème 3.11. — *Soit* $A \in \mathrm{Perf}_K$ *et soient* $A \to B$ *et* $A \to C$ *deux morphismes dans* Perf_K*. Alors* $B\widehat{\otimes}_A C \in \mathrm{Perf}_K$ *et le morphisme naturel*[44]

$$B^0\widehat{\otimes}_{A^0}C^0 \to (B\widehat{\otimes}_A C)^0$$

est un presque isomorphisme (dans le cadre π^{1/p^∞}*).*

Démonstration. — On peut supposer que $\mathrm{car}(K) = 0$. Les anneaux $R = B^0\widehat{\otimes}_{A^0}C^0$ et $S := R/R[p^\infty]$ sont perfectoïdes (corollaire 2.11 et proposition 2.19). La proposition 3.5 montre que $S_* \in \mathcal{C}$ (cf. § 3.2), donc $T := S[1/\pi] = S_*[1/\pi]$ a une structure canonique de K-algèbre de Banach spectrale telle que $T^0 = S_*$, et on a $T \in \mathrm{Perf}_K$. Comme B et C sont uniformes, les morphismes évidents $B^0 \to R \to S$ et $C^0 \to R \to S$ s'étendent en des morphismes (dans Ban_K) $B \to T$ et $C \to T$, d'où un morphisme $B\widehat{\otimes}_A C \to T$. On construit un inverse comme suit. Soit X la boule unité de $B\widehat{\otimes}_A C$. Comme B et C sont uniformes, il existe $c \geq 1$ tel que les images de B^0 et C^0 dans $B\widehat{\otimes}_A C$ soient contenues dans $p^{-c}X$. Le morphisme induit $S \to B\widehat{\otimes}_A C$ a une image contenue dans $p^{-2c}X$ et s'étend ainsi en un morphisme $T \to B\widehat{\otimes}_A C$, inverse du morphisme $B\widehat{\otimes}_A C \to T$.

On en déduit que $B\widehat{\otimes}_A C \in \mathrm{Perf}_K$ et que $(B\widehat{\otimes}_A C)^0$ est isomorphe à $T^0 = S_*$. Le morphisme $R \to S \to S_*$ est un presque isomorphisme, puisque l'idéal $(\pi^{p^{-\infty}})$ annule le noyau et le conoyau de $R \to S$ (proposition 2.20) et aussi de $S \to S_*$. □

Si $B \in \mathrm{Ban}_K$ et si $f_1, \dots, f_n, g \in B$ engendrent l'idéal unité on dispose d'une B-algèbre de Banach universelle $B\langle\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ dans laquelle g est inversible et les $\frac{f_i}{g}$ sont à puissances bornées. Explicitement, $B\langle\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ est le quotient de l'algèbre de Banach $B\langle T_1, \dots, T_n\rangle = B\widehat{\otimes}_K K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ par *l'adhérence* de l'idéal engendré par les $gT_i - f_i$.

Théorème 3.12. — *Soit* $A \in \mathrm{Perf}_K$ *et soient* $f_1, \dots, f_n, g \in A$ *qui engendrent l'idéal unité de* A*.*

a) On a $A\langle\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle \in \mathrm{Perf}_K$*.*

b) Si $f_1, \dots, f_n, g$ *sont* p*-puissants (déf. 2.2) dans* A^0 *et si* $A^0\langle(\frac{f_1}{g})^{1/p^\infty}, \dots, (\frac{f_n}{g})^{1/p^\infty}\rangle$ *est le complété* π*-adique de* $A^0[\frac{f_i^{1/p^n}}{g^{1/p^n}},\ n \geq 0]$*, alors le morphisme naturel*

$$A^0\Big\langle\Big(\frac{f_1}{g}\Big)^{1/p^\infty}, \dots, \Big(\frac{f_n}{g}\Big)^{1/p^\infty}\Big\rangle \to A\Big\langle\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\Big\rangle^0$$

est un presque isomorphisme (dans le cadre π^{1/p^∞}*).*

44. La complétion à gauche est π-adique.

Démonstration. — Voir la section 6 de Scholze (2012) pour les détails. Le très joli argument de « réduction au cas universel » ci-dessous est dû à André (2018b). Le point a) se déduit du point b) et du théorème 3.7. Puisque $f_i, g \in A^0$ sont p-puissants, on dispose d'un morphisme $S := K^0\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}, U^{1/p^\infty}\rangle[\frac{1}{\pi}] \to A$ dans Ban_K, envoyant T^{1/p^j} sur f_i^{1/p^j} et U^{1/p^j} sur g^{1/p^j}. Soit $N \geq 1$ tel que $\pi^N \in (f_1, \dots, f_n, g) \subset A^0$. Alors $A\widehat{\otimes}_S S\langle\frac{\pi^N, T_1, \dots, T_n}{U}\rangle$ et $A\langle\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\rangle$ partagent la même propriété universelle, donc ces algèbres de Banach sont isomorphes. Le théorème 3.11 ramène donc la preuve au « cas universel », i.e. à vérifier que $S, S\langle\frac{\pi^N, T_1, \dots, T_n}{U}\rangle \in \mathrm{Perf}_K$ et que les morphismes $K^0\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}, U^{1/p^\infty}\rangle \to S^0$ et $S^0\langle(\frac{T_1}{U})^{1/p^\infty}, \dots, (\frac{T_n}{U})^{1/p^\infty}, (\frac{\pi^N}{U})^{1/p^\infty}\rangle \to S\langle\frac{\pi^N, T_1, \dots, T_n}{U}\rangle^0$ sont des presque isomorphismes, ce qui se fait par un calcul direct (assez pénible...). $\square$

Le résultat fondamental suivant, sur lequel tout repose dans la section 5, est le *théorème de presque pureté* de Faltings, étendu par Scholze (2012) et Kedlaya et Liu (2015). Voir la section 7 de Scholze (2012) pour la preuve (fort délicate) et le paragraphe 3.4 d'André (2018b) pour des compléments.

THÉORÈME 3.13. — *Soit* $(A, |\cdot|) \in \mathrm{Perf}_K$. *Pour toute* A*-algèbre finie étale* B *il existe une norme de* K*-algèbre de Banach* $||\cdot||$ *sur* B *telle que le morphisme* $(A, |\cdot|) \to (B, ||\cdot||)$ *soit continu,* $B \in \mathrm{Perf}_K$ *et* B^0 *soit presque fini étale de* A^0 *(dans le cadre* π^{1/p^∞}*). Si* $A \to B$ *est injectif,* B^0 *est presque fidèlement plate sur* A^0.

4. LE LEMME DE PLATITUDE D'ANDRÉ

Cette section est consacrée au premier pilier des travaux d'André, son lemme de platitude, un énoncé fondamental qui, loin d'être une platitude, sera systématiquement utilisé dans la preuve des résultats principaux de ce rapport. On trouvera des raffinements et des généralisations, ainsi que des applications spectaculaires dans les travaux de Bhatt et Scholze (2022), Česnavičius et Scholze (2019), Dini (2022) et dans le livre de Gabber et Ramero (2018). En particulier, on trouvera dans le paragraphe 7.3 de l'article de Bhatt et Scholze (2022) une preuve purement algébrique (mais pas facile), qui n'utilise pas la théorie des espaces perfectoïdes.

On garde les notations et les conventions introduites au début de la section 3.

4.1. Le lemme de presque platitude

Le problème qui nous occupera dans ce paragraphe est le suivant : on se donne $A \in \mathrm{Perf}_K$ et $g \in A^0$, et on cherche à construire une A-algèbre $B \in \mathrm{Perf}_K$ dans laquelle g est p-puissant (définition 2.2) et telle que B^0/π soit presque fidèlement plate sur A^0/π (dans le cadre π^{1/p^∞} (§ 3.5)).

L'idée naïve est de regarder la A-algèbre de Banach universelle munie d'un système compatible de p^∞-racines de g, i.e. $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle/\overline{(T-g)}$. L'algèbre $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ est perfectoïde (noter que $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle^0 = A^0\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ et utiliser la remarque 2.7), donc uniforme, mais en général l'uniformité ne se propage pas aux quotients. On insiste et on la remplace par son uniformisé (§ 3.2)

$$A\langle g^{1/p^\infty}\rangle := \left(A\langle T^{1/p^\infty}\rangle/\overline{(T-g)}\right)^u.$$

Le résultat un peu miraculeux d'André (2018a) [45] est que cela résout notre problème :

THÉORÈME 4.1. — *On a $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle \in \mathrm{Perf}_K$ et $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle^0/\pi$ est presque fidèlement plate sur A^0/π (dans le cadre π^{1/p^∞}).*

On a un énoncé analogue modulo π^d pour tout $d \geq 1$, se déduisant formellement du théorème. La preuve se fait en deux étapes, détaillées ci-dessous : on relie $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle$ à des localisés de l'algèbre perfectoïde $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$, puis on analyse ces localisés en utilisant de manière intensive les résultats des § 3.4 et 3.6.

4.1.1. Une autre description de $A\langle g^{1/p^\infty}\rangle$. — Soient $B \in \mathrm{Ban}_K^u$, $f \in B$ et $I = \overline{fB} \subset B$. Il convient de voir l'algèbre $(B/I)^u \in \mathrm{Ban}_K^u$ comme celle des fonctions analytiques sur le fermé Zariski $V(I)$ de $\mathcal{M}(B)$. Comme $x \in \mathcal{M}(B)$ est annulé par f si et seulement si $|f(x)| \leq |\pi^n(x)|$ pour tout $n \geq 1$, $(B/I)^u$ n'est rien d'autre que la limite inductive $\varinjlim_n B_n$ (dans la catégorie Ban_K^u, cf. § 3.2) des algèbres

$$B_n := (B\langle f/\pi^n\rangle)^u.$$

En effet, pour $S \in \mathrm{Ban}_K^u$ la donnée d'un morphisme (dans Ban_K) de $\varinjlim_n B_n$ dans S équivaut à celle d'un morphisme $\varphi\colon B \to S$ tel que $\varphi(f/\pi^n) \in S^0$ pour tout $n \geq 1$, or cela signifie précisément que φ se factorise par $(B/I)^u$ (puisque S est uniforme).

Prenons maintenant $B = A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ et $f = T - g$ dans la discussion ci-dessus. Puisque B est perfectoïde, chacune des algèbres $B\langle f/\pi^n\rangle$ l'est (théorème 3.12), donc $B_n = B\langle f/\pi^n\rangle$ et $C := A\langle g^{1/p^\infty}\rangle \in \mathrm{Perf}_K$, en tant que colimite filtrante (dans Ban_K^u) d'algèbres perfectoïdes (remarque 3.6). Comme $C^0 = (\widehat{\varinjlim_n B_n^0})_*$ est presque isomorphe à $\widehat{\varinjlim_n B_n^0}$, l'algèbre C^0/π est presque isomorphe à $\varinjlim_n B_n^0/\pi$. Il suffit donc de voir que chaque B_n^0/π est presque fidèlement plate sur A^0/π. On fixe par la suite $n \geq 1$.

4.1.2. Analyse des localisés de $A\langle T^{1/p^\infty}\rangle$ et fin de la preuve. — Par le lemme d'approximation (théorème 3.7) il existe un élément p-puissant $h \in B^0$ tel que $|h - f| \leq |p| \cdot \max(|h|, |\pi^n|)$ pour tout $|\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(B^0)$. Comme $|\frac{h-f}{\pi}| < 1$ pour tout $|\cdot| \in \mathrm{Spa}(B^0[\frac{1}{\pi}], B^0)$ et B^0 est p-close (définition 2.15) dans $B^0[\frac{1}{\pi}]$ (proposition 3.2), la proposition 3.8 montre que

$$h \equiv f \pmod{\pi B^0}.$$

L'inégalité $|h - f| \leq |p| \cdot \max(|h|, |\pi^n|)$ montre aussi que $B_n \simeq B\langle \frac{h}{\pi^n}\rangle$, et on déduit du théorème 3.12 que B_n^0/π est presque isomorphe à $\varinjlim_j C_j/\pi$, avec $C_j = B^0[\frac{h^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}}] \subset B$. Nous allons montrer que chaque C_j/π est fidèlement plate sur A^0/π, ce qui permettra de conclure. Par dévissage il suffit de montrer que $C_j/\pi^{1/p^j}$ l'est sur $A^0/\pi^{1/p^j}$.

45. L'énoncé suivant est tiré de l'article de Bhatt (2018).

On a $B^0 = A^0\langle T^{1/p^\infty}\rangle$, donc $B^0/\pi \simeq (A^0/\pi)[T^{1/p^\infty}]$, en particulier $B^0/\pi^{1/p^j} \simeq B^0/\pi$ via $x \mapsto x^{p^j}$ (puisqu'il en est de même du morphisme $A^0/\pi^{1/p^j} \to A^0/\pi$, cf. proposition 3.5) et $f = T - g$ n'est pas un diviseur de zéro modulo π. Puisque $h \equiv f \pmod{\pi B^0}$, il en est de même de h et la remarque 2.18 fournit un isomorphisme $C_j \simeq B^0[X^{1/p^j}]/(u_j)$, avec $u_j = \pi^{n/p^j} X^{1/p^j} - h^{1/p^j}$. Ainsi le morphisme $x \mapsto x^{p^j}$ et la congruence $h \equiv f \pmod{\pi B^0}$ induisent des isomorphismes

$$C_j/\pi^{1/p^j} \simeq B^0[X^{1/p^j}]/(\pi^{1/p^j}, h^{1/p^j}) \simeq$$

$$B^0[X]/(\pi, h) \simeq B^0[X]/(\pi, f) \simeq ((A^0/\pi)[T^{1/p^\infty}]/(T-g))[X],$$

exhibant $C_j/\pi^{1/p^j}$ comme une colimite filtrante de $A^0/\pi^{1/p^j} \simeq A^0/\pi$-modules libres de type fini, ce qui permet de conclure.

4.2. Le lemme de platitude

Le résultat suivant de Gabber et Ramero (2018) et Bhatt et Scholze (2022) est une vaste généralisation et un raffinement du théorème 4.1. Il a des nombreuses applications, par exemple à l'étude des sous-espaces Zariski fermés d'un espace perfectoïde, à la cohomologie prismatique (Bhatt et Scholze, 2022), etc.

Théorème 4.2 (lemme de platitude d'André). — *Soit A un anneau perfectoïde. Il existe une A-algèbre perfectoïde B telle que B/p soit fidèlement plate sur A/p et telle que tout $x \in B$ soit p-puissant (déf. 2.2). On peut même choisir B telle que tout polynôme unitaire $P \in B[X]$ possède une racine dans B.*

Nous ferons usage seulement [(46)] du théorème 4.3 ci-dessous, qui entraîne celui ci-dessus par une itération un peu pénible (cf. la preuve du théorème 2.3.4 de Česnavičius et Scholze (2019), pour les détails). Pour la preuve, on suit la présentation par Česnavičius et Scholze (2019) des arguments de Gabber et Ramero. Essentiellement, le rôle des localisés dans la preuve du théorème 4.1 est pris par les p-clôtures intégrales (définition 2.15).

Théorème 4.3. — *Soit R un anneau muni d'un élément p-puissant (déf. 2.2) π, non diviseur de zéro, tel que $\pi^p \mid p$ et $R/\pi \simeq R/\pi^p$ via le Frobenius. Soit $P \in R[X] \setminus R$ unitaire et soit B la p-clôture (déf. 2.15) de $R[X^{1/p^\infty}]/P$ dans $(R[X^{1/p^\infty}]/P)[1/\pi]$. La π-complétion de B est perfectoïde, sans π-torsion, et B/π est fidèlement plate sur R/π.*

Notons que, par construction, P possède une racine p-puissante dans B, et que $R[X^{1/p^\infty}]/P$ est sans π-torsion car P est unitaire, donc non diviseur de zéro modulo π.

Démonstration. — Soit $A = R[X^{1/p^\infty}]$. Comme le Frobenius $A/\pi \to A/\pi^p$ est un isomorphisme, A est p-close dans $A[\frac{1}{\pi}]$ et le complété π-adique $\hat{A}$ est perfectoïde (proposition 2.12). Soit $I = PA\left[\frac{1}{\pi}\right]$ et soit $u\colon A[\frac{1}{\pi}] \to (A/P)[\frac{1}{\pi}] \simeq A[\frac{1}{\pi}]/I$ la projection canonique.

46. On pourrait même se dispenser de ce paragraphe et utiliser seulement le théorème 4.1.

Pour $f \in A$ et $n \geq 1$, notons $C_{n,f}$ la p-clôture de $A[\frac{f}{\pi^n}]$ dans $A[\frac{1}{\pi}]$, et $C_{\infty,f} = \cup_{n\geq 1} C_{n,f}$. Alors $I = \bigcup_{n\geq 1} \frac{P}{\pi^n} A = \bigcup_{n\geq 1} \frac{P}{\pi^n} C_{\infty,P}$ est un idéal π-divisible de $C_{\infty,P}$, et la projection u induit un isomorphisme

$$C_{\infty,P}/I \simeq B,$$

et donc des isomorphismes $B/\pi^n \simeq C_{\infty,P}/\pi^n$ pour tout $n \geq 1$. En effet, un élément $x \in A[\frac{1}{\pi}]$ vérifie $u(x) \in B$ si et seulement s'il existe $d \geq 0$ tel que $x^{p^d} \in A + I$ (proposition 2.16), ce qui revient à dire que $x \in C_{\infty,P}$. Il suffit donc de montrer que le complété π-adique de $C_{n,P}$ est perfectoïde et que $C_{n,P}/\pi$ est fidèlement plat sur R/π pour tout $n \geq 1$.

Puisque $\hat{A}$ est perfectoïde (proposition 2.12), le théorème 3.7 fournit un élément p-puissant $g \in \widehat{A}$ tel que $|P - g| \leq |p| \max(|g|, |\pi^n|)$ pour tout $|\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(\widehat{A}) \simeq \mathrm{Spa}_\pi(A)$. Soit $(q_j)_{j\geq 0}$ une suite dans A telle que $q_j \equiv g^{1/p^j} \pmod{\pi^{n+p}\widehat{A}}$ pour tout $j \geq 0$. On a

$$|P - q_0| \leq |\pi^p| \max(|q_0|, |\pi^n|), \text{ pour tout } |\cdot| \in \mathrm{Spa}_\pi(A). \tag{4}$$

Lemme 4.4. — *Il existe $d \geq 1$ tel que $q_j^{p^j} \equiv P \pmod{\pi^{1/p^d} A}$ pour tout j, et q_j n'est pas un diviseur de zéro modulo π.*

Démonstration. — La relation (4) et la proposition 3.8 montrent qu'il existe $d \geq 1$ tel que $(P - q_0)^{p^d} \in \pi A$, donc $P - q_0 \in \pi^{1/p^d} A$ (car A est p-clos dans $A[\frac{1}{\pi}]$). On conclut en remarquant que $q_j^{p^j} \equiv g \equiv q_0 \pmod{\pi \hat{A}}$ et que P n'est pas un diviseur de zéro modulo π. □

Lemme 4.5. — *On a $C_{n,P} = \cup_{j\geq 0} A[\frac{q_j}{\pi^{n/p^j}}]$ et sa π-complétion est perfectoïde.*

Démonstration. — Notons $x_j = \frac{q_j}{\pi^{n/p^j}} \in A[\frac{1}{\pi}]$ et $y_j = \frac{g^{1/p^j}}{\pi^{n/p^j}} \in \widehat{A}[\frac{1}{\pi}]$. Alors $x_{j+1}^p - x_j \in \pi A$ (puisque $q_{j+1}^p - q_j \in \pi^{n+p} A$) et $y_{j+1}^p = y_j$, donc $T := A[x_0, x_1, \dots] \subset A[\frac{1}{\pi}]$ (resp. $S := \widehat{A}[y_0, y_1, \dots] \subset \widehat{A}[\frac{1}{\pi}]$) est la réunion croissante des sous-algèbres $A[x_j]$ (resp. $\widehat{A}[y_j]$), et $T \subset C_{n,q_0}$. Comme $x_j - y_j \in \pi \hat{A}$ et q_j n'est pas un diviseur de zéro modulo π (lemme 4.4), on a des isomorphismes naturels

$$A[x_j]/\pi \simeq A[X]/(\pi, \pi^{n/p^j} X - q_j) \simeq \widehat{A}[X]/(\pi, \pi^{n/p^j} X - g^{1/p^j}) \simeq \widehat{A}[y_j]/\pi,$$

qui se propagent en un isomorphisme $T/\pi \simeq S/\pi$. Mais S est perfectoïde (proposition 2.17), donc le Frobenius $T/\pi^{1/p} \to T/\pi$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que T est p-close dans $T[\frac{1}{\pi}] = A[\frac{1}{\pi}]$, donc $T = C_{n,q_0}$, et que le complété π-adique de T est perfectoïde. On conclut en remarquant que $C_{n,P} = C_{n,q_0}$, grâce à la relation (4) et au point b) de la proposition 3.8. □

Pour finir la preuve du théorème 4.3 il suffit de voir que chaque

$$A[q_j/\pi^{n/p^j}] \simeq R[T, X^{1/p^\infty}]/(\pi^{n/p^j} T - q_j)$$

est fidèlement plate sur R modulo π. Compte tenu du lemme 4.4, il suffit de recopier la fin de la preuve du théorème 4.1. □

5. LE LEMME D'ABHYANKAR PERFECTOÏDE D'ANDRÉ

Cette section est consacrée à la preuve de l'autre pilier de la stratégie d'André : son difficile lemme d'Abhyankar perfectoïde (André, 2018b). Rappelons le contexte classique : on se donne une extension finie et plate B d'un anneau local régulier A d'inégale caractéristique $(0, p)$. On suppose que l'extension est ramifiée le long d'un diviseur à croisements normaux défini par une équation $f = 0$, avec f multiple de p, et que les indices de ramification sont premiers à p. On peut alors rendre l'extension étale en adjoignant des racines de f d'ordre divisible par tous les indices de ramification, puis en passant à la clôture intégrale (mais *sans inverser* f). Dans le cadre perfectoïde les hypothèses concernant la ramification sont superflues, mais la conclusion reste valable seulement dans le cadre f^{1/p^∞} des presque mathématiques (§ 3.5). Le lecteur trouvera des généralisations et raffinements importants dans le livre de Gabber et Ramero (2018) (§ 16.9) et dans l'article de Bhatt et Scholze (2022) (§ 10.2).

On peut voir le lemme d'Abhyankar perfectoïde comme une généralisation au cas ramifié du théorème de presque pureté de Faltings, Scholze et Kedlaya–Liu (théorème 3.13). Ce théorème jouera d'ailleurs un rôle capital dans la preuve.

On garde les notations du début de la section 3.

5.1. Le théorème d'extension de Riemann

Le résultat suivant d'André [(47)] (inspiré par ceux de la section II de Scholze (2015)) est une version perfectoïde d'un théorème de Bartenwerfer (1976) (lui-même une version rigide analytique du théorème classique d'extension de Riemann pour les variétés complexes) : si X est un affinoïde rigide analytique *normal*, toute fonction analytique bornée sur le complémentaire d'un fermé analytique nulle part dense de X s'étend de manière unique en une fonction analytique bornée sur X. On verra que dans le monde perfectoïde l'hypothèse de normalité est superflue.

Soit $B \in \mathrm{Perf}_K$ et soit $g \in B^0$ un élément p-puissant (définition 2.2), non diviseur de zéro. Soit $B_n = B\langle \frac{\pi^n}{g} \rangle \in \mathrm{Perf}_K$ l'algèbre perfectoïde (théorème 3.12) des fonctions analytiques sur le lieu $|\pi^n| \leq |g|$ de $\mathcal{M}(B)$, et soit $B_\infty = \varprojlim_n B_n$ la K-algèbre de Fréchet des fonctions analytiques sur le lieu de non-annulation de g. On note

$$g^{-1/p^\infty} B^0 := \bigcap_{n \geq 1} g^{-1/p^n} B^0$$

le sous-anneau des $f \in B[\frac{1}{g}]$ tels que $g^{1/p^n} f \in B^0$ pour tout $n \geq 1$.

THÉORÈME 5.1. — *a) Le sous-anneau $g^{-1/p^\infty} B^0$ de $B[\frac{1}{g}]$ est la clôture intégrale complète* [(48)] *de B^0 dans $B[\frac{1}{g}]$, et $B[\frac{1}{g}]$ est intégralement clos dans B_∞.*

---

47. La démonstration, ainsi qu'une version plus forte du théorème principal, qui sera cruciale par la suite, sont empruntées de Bhatt (2018).

48. C'est-à-dire l'ensemble des $f \in B[\frac{1}{g}]$ dont les puissances sont contenues dans un sous B^0-module de type fini de $B[\frac{1}{g}]$.

b) Le morphisme $B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$ *est injectif et l'image de* $g^{-1/p^\infty}B^0$ *est* $B^0_\infty := \varprojlim_n B^0_n$.

L'injectivité du morphisme $B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$ se ramène à celle de $B \to B_\infty$. Si $f \in B$ a une image nulle dans B_∞, alors fg est nulle sur $\mathcal{M}(B)$, donc de norme spectrale nulle ; comme B est uniforme, on a $fg = 0$ puis $f = 0$. Soit C la clôture intégrale complète de B^0 dans $B[\frac{1}{g}]$. Si $f \in g^{-1/p^\infty}B^0$ alors $f^n \in g^{-1}B^0$ pour tout n, donc $f \in C$. Dans l'autre sens, soit $f \in C$. Il existe N tel que $f^n \in \frac{1}{(\pi g)^N}B^0$ pour tout $n \geq 1$. Comme B^0 est p-close (définition 2.15) dans B (proposition 3.2), on a $(\pi g)^{N/p^k}f \in B^0$ pour tout $k \geq 1$, donc $\pi^{1/p^\ell}g^{N/p^k}f \in B^0$ pour tous $k, \ell \geq 1$. Ainsi $g^{N/p^k}f \in B^0_* = B^0$ pour tout k et $f \in g^{-1/p^\infty}B^0$, montrant bien que $C = g^{-1/p^\infty}B^0$.

Si $f \in B_\infty$ est entier sur $B[\frac{1}{g}]$ alors il existe N tel que $(\pi g)^N f$ soit entier sur B^0. Mais un élément x de B_n entier sur B^0 est dans B^0_n car B_n est uniforme (en effet, les puissances de x restent dans un sous B^0_n-module de type fini de B_n, qui est borné dans B_n par uniformité). Donc $(\pi g)^N f \in B^0_\infty$. Pour finir la preuve du théorème 5.1 il suffit donc de montrer (et c'est le coeur de l'affaire) que $B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$ identifie $g^{-1/p^\infty}B^0$ et B^0_∞. Comme $B^0 = B^0_*$, il suffit de vérifier que $(\pi g)^{1/p^k}f \in B^0$ pour tous $f \in B^0_\infty$ et $k \geq 1$. Cela découle par passage à la limite du résultat plus fin suivant, dû à Bhatt (2018), et qui demande quelques préliminaires.

On se place dans le cadre $(\pi g)^{1/p^\infty}$ des presque mathématiques (§ 3.5). On dit qu'un système projectif $\{M_n\}_{n\geq 1}$ de B^0-modules est *presque nul* si pour tous $k \geq 0$ et $n \geq 1$ il existe $m \geq n$ tel que $(\pi g)^{1/p^k}$ annule l'image de M_m dans M_n. Il est équivalent de dire que pour tout $k \geq 1$ le morphisme naturel $\{M_n[(\pi g)^{1/p^k}]\}_{n\geq 1} \to \{M_n\}_{n\geq 1}$ est un isomorphisme de pro-B^0-modules. On dira qu'un morphisme $f\colon \{M_n\}_{n\geq 1} \to \{N_n\}_{n\geq 1}$ de pro-B^0-modules est un *presque isomorphisme* si le noyau et le conoyau de f sont des systèmes projectifs presque nuls.

Théorème 5.2. — *Pour tout* $d \geq 1$ *le morphisme de systèmes projectifs*

$$\{B^0/\pi^d B^0\}_{n\geq 1} \to \{B^0_n/\pi^d B^0_n\}_{n\geq 1}$$

est un presque isomorphisme dans le cadre $(\pi g)^{1/p^\infty}$.

Démonstration. — Par dévissage on peut supposer que $d = 1$. Supposons d'abord que g n'est pas un diviseur de zéro modulo π. Alors chaque $f_n\colon B^0/\pi B^0 \to B^0_n/\pi B^0_n$ est injectif : si $F \in B^0$ a une image πG dans B^0_n, avec $G \in B^0_n$, alors $u := \frac{Fg}{\pi} \in B$ satisfait à [49] $|u|_{\mathrm{sp}} \leq 1$, donc $Fg \in \pi B^0$, puis $F \in \pi B^0$.

Ensuite, fixons $k, n \geq 1$ et montrons que $(\pi g)^{1/p^k}$ annule l'image de $\mathrm{coker}(f_{n+p^k})$ dans $\mathrm{coker}(f_n)$, ce qui permettra de conclure dans le cas où g n'est pas un diviseur de zéro modulo π. Soit $i_n\colon B^0 \to B^0_n$ le morphisme canonique. On veut montrer que si $f \in B^0_{n+p^k}$ a une image F dans B^0_n, alors $(\pi g)^{1/p^k}F \in \pi B^0_n + i_n(B^0)$. En posant $S = B^0[(\frac{\pi^{n+p^k}}{g})^{1/p^j}, j \geq 0] \subset B^0_{n+p^k}$, le morphisme naturel $\widehat{S} := \varprojlim_d S/\pi^d \to B^0_{n+p^k}$ est un

49. En effet, soit $x \in \mathcal{M}(B)$, alors ou bien $|\pi(x)|^n \leq |g(x)|$, auquel cas $|u(x)| = |G(x)| \cdot |g(x)| \leq 1 \cdot 1 = 1$, ou bien $|\pi(x)|^n > |g(x)|$, auquel cas $|u(x)| \leq |\pi(x)|^{n-1}|F(x)| \leq 1 \cdot 1 = 1$.

presque isomorphisme dans le cadre π^{1/p^∞} (théorème 3.12), donc $\pi^{1/p^k} f \in S + \pi B^0_{n+p^k}$. Il suffit donc de montrer que $g^{1/p^k} H \in \pi B^0_n + i_n(B^0)$ quand H est l'image de $h = (\frac{\pi^{n+p^k}}{g})^e$ pour un $e \in \mathbf{Z}_{\geq 0}[1/p]$ arbitraire, mais cela est clair puisque $\pi^{p^k e}$ est un multiple de π pour $e \geq 1/p^k$ et

$$g^{1/p^k} H = \begin{cases} i_n(g^{\frac{1}{p^k}-e}\pi^{(n+p^k)e}) \in i_n(B^0), \ \text{si } e < 1/p^k \\ i_n(g^{1/p^k})\pi^{p^k e}(\frac{\pi^n}{g})^e \in \pi B^0_n, \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Il reste à s'affranchir de l'hypothèse sur g. Comme $g \in B^0$ est p-puissant, on dispose d'un morphisme $R := K\langle T^{1/p^\infty}\rangle \to B$, envoyant T^{1/p^j} sur g^{1/p^j}, et $B_n \simeq B\widehat{\otimes}_R R_n$, avec $R_n = R\langle \frac{\pi^n}{T}\rangle$. Le théorème 3.11 fournit un presque isomorphisme

$$B^0/\pi \otimes_{R^0/\pi} R^0_n/\pi \simeq B^0_n/\pi,$$

et comme T n'est pas diviseur de zéro modulo π dans R^0, ce qui précède montre que le morphisme $\{R^0/\pi\} \to \{R^0_n/\pi\}_{n\geq 1}$ est un presque isomorphisme de systèmes projectifs, ce qui permet de conclure facilement que $\{B^0/\pi\} \to \{B^0_n/\pi\}_{n\geq 1}$ est un presque isomorphisme. □

5.2. Le lemme d'Abhyankar perfectoïde

On garde les notations introduites juste avant le théorème 5.1. Soit C une algèbre finie étale sur $B[1/g]$. *Si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on note* $\mathrm{fi}(A, B) \subset B$ *la fermeture intégrale de A dans B.* Posons

$$\tilde{C}^0 = \mathrm{fi}(g^{-1/p^\infty} B^0, C).$$

On verra (proposition 5.6) que l'algèbre $\tilde{C} := \tilde{C}^0[\frac{1}{p}] = \mathrm{fi}(g^{-1/p^\infty} B, C)$ possède une structure naturelle de K-algèbre de Banach uniforme pour laquelle $\tilde{C}^0 = (\tilde{C})^0$ (en particulier $\tilde{C}^0$ est p-complète).

On suppose que K est de caractéristique nulle et on se place dans le cadre $(\pi g)^{1/p^\infty}$ des presque mathématiques (§ 3.5). L'un des résultats principaux de l'article d'André (2018b) s'énonce (rappelons que ξ est un générateur distingué de $\ker(\theta_{K^0})$) :

Théorème 5.3 (lemme d'Abhyankar perfectoïde). —

a) Le morphisme $\theta\colon W((\tilde{C}^0)^\flat)/\xi \to \tilde{C}^0$ est injectif et un presque isomorphisme. En particulier, le Frobenius est presque surjectif sur $\tilde{C}^0/p$.

b) Pour tout $n \geq 1$ la B^0/p^n-algèbre $\tilde{C}^0/p^n$ est presque finie étale, et elle est presque fidèlement plate si C l'est sur $B[\frac{1}{g}]$.

Remarque 5.4. — Contrairement au théorème de presque pureté, il n'est pas connu si $\tilde{C}^0$ est presque de type fini sur B^0. Si c'était le cas, on pourrait en déduire que $\tilde{C}^0$ est presque finie étale sur B^0. On peut montrer (proposition 5.2.3 d'André (2018b)) que ce dernier énoncé est tout de même vrai après inversion de g.

La preuve occupe les prochains paragraphes et fait jouer un rôle important aux algèbres
$$C_n := C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n,\ C_\infty := \varprojlim_n C_n,\ C^0_\infty := \varprojlim_n C^0_n.$$
On dispose d'isomorphismes canoniques [50]
$$C_{n+1}\widehat{\otimes}_{B_{n+1}} B_n \simeq C_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n = (C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_{n+1}) \otimes_{B_{n+1}} B_n \simeq C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n = C_n.$$

Remarque 5.5. — a) Comme C est localement libre de rang fini sur $B[\frac{1}{g}]$, le morphisme injectif (théorème 5.1) $B[\frac{1}{g}] \to B_\infty$ induit une injection $C \to C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty$, et le morphisme naturel $C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty \to C_\infty$ est un isomorphisme. On peut donc identifier C à une sous-algèbre de C_∞, via $c \mapsto (c \otimes 1)_{n\geq 1}$.

b) Puisque C_n est finie étale sur $B_n \in \mathrm{Perf}_K$, on a $C_n \in \mathrm{Perf}_K$ et C^0_n est presque finie étale sur B^0_n (théorème de presque pureté 3.13). Les isomorphismes $C_{n+1}\widehat{\otimes}_{B_{n+1}} B_n \simeq C_n$ combinés au théorème 3.11 montrent que le morphisme naturel $C^0_{n+1}\widehat{\otimes}_{B^0_{n+1}} B^0_n \to C^0_n$ est un presque isomorphisme (à priori dans le cadre π^{1/p^∞}, mais donc aussi dans le cadre $(\pi g)^{1/p^\infty}$).

5.2.1. Identification de la clôture intégrale. — Dans ce paragraphe on montre le résultat suivant.

Proposition 5.6. — *L'inclusion de C dans C_∞ identifie $\tilde{C}^0$ à C^0_∞.*

Ainsi $\tilde{C} := \tilde{C}^0[\frac{1}{p}]$ s'identifie à la limite uniforme des algèbres de Banach uniformes C_n et $(\tilde{C})^0 = \tilde{C}^0$. La preuve de la proposition demande quelques préliminaires.

Lemme 5.7. — *On a $C^0_\infty = \mathrm{fi}(B^0_\infty, C_\infty)$.*

Démonstration. — Si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{fi}(B^0_\infty, C_\infty)$, alors x_n est entier sur B^0_n, donc ses puissances restent dans un sous C^0_n-module de type fini de C_n, et $x_n \in C^0_n$ car C_n est uniforme. Ainsi $x \in C^0_\infty$. Pour l'autre inclusion, soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in C^0_\infty$ et soit $\chi_n \in B_n[X]$ le polynôme caractéristique de la multiplication par x_n dans C_n. Puisque $C_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n \simeq C_n$, il existe $\chi \in B_\infty[X]$ induisant tous les χ_n. Par Cayley–Hamilton, on a $\chi_n(x_n) = 0$ pour tout n, donc $\chi(x) = 0$. Le lemme 5.8 ci-dessous montre que $\chi_n \in B^0_n[X]$ pour tout n, donc $\chi \in B^0_\infty[X]$ et $x \in \mathrm{fi}(B^0_\infty, C_\infty)$, ce qui finit la preuve. □

Lemme 5.8. — *Soit $R \to S$ un morphisme fini étale de K-algèbres de Banach uniformes. Pour tout $s \in S^0$ le polynôme caractéristique de s est à coefficients dans R^0.*

Démonstration. — Soient $a_0, \dots, a_n$ les coefficients de ce polynôme. On veut montrer que $\max_{0\leq i\leq n} |a_i|_{\mathrm{sp}} \leq 1$, ou encore (cf. § 3.1) que $\max_{0\leq i\leq n} |a_i(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathcal{M}(S)$. Si L est le corps résiduel complété de x, on veut montrer que les $a_i(x)$ appartiennent à L^0. On peut remplacer $R \to S$ par $L \to S \otimes_R L$ et donc supposer que $R = L$, auquel cas S est un produit d'extensions finies de R ; le résultat s'en déduit. □

50. Le premier est dû au fait que C_{n+1} est un B_{n+1}-module projectif de type fini.

Lemme 5.9. — *On a $C = C^0_\infty[\frac{1}{pg}]$ à l'intérieur de C_∞.*

Démonstration. — Notons $T = C^0_\infty[\frac{1}{pg}]$. Comme C est entier sur $B[\frac{1}{g}] = B^0[\frac{1}{pg}]$, pour tout $x \in C$ il existe $n \geq 0$ tel que $(pg)^n x$ soit entier sur $B^0 \subset B^0_\infty$, et donc dans $\mathrm{fi}(B^0_\infty, C_\infty) = C^0_\infty$ (lemme 5.7). Ainsi $C \subset T$. Montrons que $T \subset C$. Par le lemme 5.7 et l'isomorphisme (théorème 5.1) $B[\frac{1}{g}] \simeq B^0_\infty[\frac{1}{pg}]$ on a $T \subset \mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty)$. Puisque le morphisme $B[\frac{1}{g}] \to C$ est entier on a $\mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty) = \mathrm{fi}(C, C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty)$. Comme $B[\frac{1}{g}] \to C$ est étale, le morphisme naturel $C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} \mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], B_\infty) \to \mathrm{fi}(C, C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_\infty)$ est un isomorphisme. Enfin, $\mathrm{fi}(B[\frac{1}{g}], B_\infty) = B[\frac{1}{g}]$ par le théorème 5.1, donc $T \subset C$. □

On finit la preuve de la proposition 5.6 en utilisant les lemmes 5.7 et 5.9 et l'égalité (dans B_∞, cf. théorème 5.1) $g^{-1/p^\infty} B^0 = B^0_\infty$:

$$\tilde{C}^0 = \mathrm{fi}(g^{-1/p^\infty} B^0, C) = \mathrm{fi}(B^0_\infty, C^0_\infty[\frac{1}{pg}]) = C^0_\infty.$$

Le lemme 5.9 a une autre conséquence importante :

Corollaire 5.10. — *Le morphisme $f\colon C^0_\infty[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_B B_n \to C_n$ induit par la projection canonique $C^0_\infty[\frac{1}{p}] \to C_n$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On a (lemme 5.9)

$$C_n = C \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n = C^0_\infty[\frac{1}{pg}] \otimes_{B[\frac{1}{g}]} B_n \simeq C^0_\infty[\frac{1}{p}] \otimes_B B_n,$$

d'où un morphisme $h\colon C_n \to C^0_\infty[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_B B_n$. En suivant les définitions on voit que $f \circ h$ est l'identité. Comme f est continu, le théorème du graphe fermé montre que h l'est aussi. On vérifie que $h \circ f$ est l'identité sur l'image de $C^0_\infty[\frac{1}{p}] \otimes_B B_n$ dans $C^0_\infty[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_B B_n$, donc aussi sur $C^0_\infty[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_B B_n$ par continuité et densité. Donc f est un isomorphisme. □

5.2.2. Etude du système projectif $\{C^0_n/\pi^d\}$ et fin de la preuve. — La différence entre les limites dans Ban^u_K et celles dans Perf_K (remarque 3.6) se fera pleinement sentir dans ce paragraphe.

Rappelons que ξ est un générateur distingué de $\ker(\theta_{K^0})$ et que π est l'image de $[\xi(0)^{1/p}]$. En posant $R_n = (C^0_n)^\flat$, on obtient (théorème 2.10) des isomorphismes $\theta_{C^0_n}\colon C^0_n \simeq W(R_n)/\xi$ compatibles avec la variation de n. Comme C^0_n est sans p-torsion, les R_n n'ont pas de $\xi(0)$-torsion, donc $R = \varprojlim_n R_n \simeq (C^0_\infty)^\flat \in \mathrm{Perf}_{\mathbf{F}_p}$ n'en a pas non plus et $S := W(R)/\xi$ est une K^0-algèbre perfectoïde plate.

Proposition 5.11. — *Les morphismes naturels $C^0_\infty/\pi \to \varprojlim_n(C^0_n/\pi)$ et $S \to C^0_\infty$ sont des presque isomorphismes dans le cadre $(\pi g)^{1/p^\infty}$, et $S \to C^0_\infty$ est injectif.*

Démonstration. — Le morphisme naturel $\varprojlim_n(C^0_n/\pi^d) \to \varprojlim_n(C^0_n/\pi^e)$ est presque surjectif pour tous $d > e$: par K^0-platitude des C_n il suffit de voir que $R^1\varprojlim_n(C^0_n/\pi)$ est presque nul ; or le système projectif $\{B_n^0/\pi\}_{n\geq 1}$ est presque Mittag-Leffler [(51)] (conséquence directe du théorème 5.2) et le presque isomorphisme $C_{n+1}^0/\pi \otimes_{B_{n+1}^0/\pi} B_n^0/\pi \to C_n^0/\pi$ (remarque 5.5) montre qu'il en est de même du système projectif $\{C_n^0/\pi\}_{n\geq 1}$.

Ainsi les transitions du système projectif $\{\varprojlim_n (C_n^0/\pi^d)\}_{d\geq 1}$ sont presque surjectives, ayant pour conséquence la presque surjectivité du morphisme

$$C_\infty^0 \simeq \varprojlim_d (\varprojlim_n (C_n^0/\pi^d)) \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi).$$

Puisque $C_\infty^0/\pi \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$ est clairement injectif, c'est un presque isomorphisme.

Pour montrer que $S \to C_\infty^0$ est injectif et un presque isomorphisme il suffit de le vérifier modulo π (les deux algèbres étant plates sur K^0 et π-complètes). Mais $S/\pi \simeq R/\xi(0)^{1/p}$, $C_n^0/\pi \simeq R_n/\xi(0)^{1/p}$ et nous avons vu que $C_\infty^0/\pi \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$ est injectif et un presque isomorphisme. Il suffit donc de vérifier que $R/\xi(0)^{1/p} \to \varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{1/p})$ est injectif et un presque isomorphisme. L'injectivité est claire puisque les R_n n'ont pas de $\xi(0)^{1/p}$-torsion. Le fait que c'est un presque isomorphisme découle (comme ci-dessus, par $\xi(0)$-complétude des R_n) de la presque surjectivité des applications canoniques $\varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{p^k}) \to \varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{p^{k-1}})$. Celle-ci s'obtient en utilisant la perfection des R_n et en appliquant successivement Frobenius au morphisme presque surjectif (cf. premier paragraphe) $\varprojlim_n (C_n^0/\pi^p) \to \varprojlim_n (C_n^0/\pi)$, qui s'identifie à $\varprojlim_n (R_n/\xi(0)) \to \varprojlim_n (R_n/\xi(0)^{1/p})$. □

Posons $T = S[\frac{1}{p}] = S_*[\frac{1}{p}] \in \mathrm{Perf}_K$ (proposition 3.5). La proposition 5.11 fournit un presque isomorphisme $T \simeq C_\infty^0[\frac{1}{p}]$. Comme πg est inversible dans B_n, cela induit un isomorphisme $T\widehat{\otimes}_B B_n \simeq C_\infty^0[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_B B_n$, d'où (corollaire 5.10) un isomorphisme $T\widehat{\otimes}_B B_n \simeq C_n$. Puisque T, B, B_n sont dans Perf_K, le morphisme naturel $T^0\widehat{\otimes}_{B^0} B_n^0 \to (T\widehat{\otimes}_B B_n)^0$ est un presque isomorphisme (théorème 3.11). On obtient donc des presque isomorphismes, compatibles avec la variation de n et d

$$T^0/\pi^d \otimes_{B^0/\pi^d} B_n^0/\pi^d \simeq C_n^0/\pi^d.$$

Par le théorème de presque pureté 3.13, la B_n^0/π^d-algèbre C_n^0/π^d est presque finie étale (et fidèlement plate, si C l'est sur $B[\frac{1}{g}]$). Les isomorphismes ci-dessus combinés avec le théorème 5.2 et le lemme 5.12 ci-dessous montrent que T^0/π^d est presque finie étale (et fidèlement plate, si C l'est sur $B[\frac{1}{g}]$) sur B^0/π^d. Mais $T^0 = S_*$ est presque isomorphe à S, qui est presque isomorphe à C_∞^0 (proposition 5.11), qui s'identifie enfin à $\tilde{C}^0$ par la proposition 5.6. Cela finit la preuve du théorème 5.3.

Le lemme suivant a joué un rôle important ci-dessus, permettant de transférer les propriétés des B_n^0/π^d-algèbres C_n^0/π^d (fournies par le théorème de presque pureté) à la B^0/π^d-algèbre T^0/π^d. On trouve dans la section 14.2 de Gabber et Ramero (2018) des résultats beaucoup plus précis et généraux que l'énoncé ci-dessous.

51. Un système projectif $\{M_n\}_{n\geq 1}$ de B^0-modules est dit presque Mittag-Leffler si pour tous k, n il existe $m \geq n$ tel que $(\pi g)^{1/p^k}\mathrm{Im}(M_m \to M_n) \subset \mathrm{Im}(M_t \to M_n)$ pour tout $t \geq m$.

Lemme 5.12. — *Soit $\mathcal{P} \in$ {plat, fidèlement plat, projectif, de type fini}. Soit M un B^0/π^d-module et $M_n := M \otimes_{B^0/\pi^d} B^0_n/\pi^d$.*

a) Si le B^0_n/π^d-module M_n est presque $\mathcal{P}$ pour tout n, alors M est presque $\mathcal{P}$.

b) Si M est une B^0/π^d-algèbre et si M_n est une B^0_n/π^d-algèbre presque finie étale pour tout n, alors M est presque finie étale sur B^0/π^d (idem avec presque finie étale et fidèlement plate).

Démonstration. — Il s'agit d'une conséquence formelle du fait que le système projectif $\{B^0_n/\pi^d\}$ est « presque constant de valeur B^0/π^d » (théorème 5.2) et de l'interprétation catégorique (à la Yoneda) de $\mathcal{P}$. Voir le théorème 14.2.39 de Gabber et Ramero (2018) pour les détails. □

6. EXISTENCE D'ALGÈBRES DE COHEN–MACAULAY

On fixe par la suite de cette section, qui est le coeur de l'exposé, un nombre premier p (d'où une notion d'anneau perfectoïde). On suppose que la caractéristique résiduelle de tous les anneaux locaux noethériens rencontrés ci-dessous est égale à p. Pour éviter des longues listes d'épithètes, introduisons :

Définition 6.1. — *La catégorie*[52] CLI_p *a pour objets les anneaux locaux noethériens complets, intègres, d'inégale caractéristique et de corps résiduel parfait (de caractéristique p), et pour morphismes les morphismes locaux d'anneaux locaux.*

Le but de cette section est d'expliquer la preuve du théorème suivant. Combiné avec les travaux de Hochster et Huneke (1992), il implique le théorème 1.10 de l'introduction.

Théorème 6.2. — *Pour tout $A \in \mathrm{CLI}_p$ il existe une A-algèbre de Cohen–Macaulay.*

Voir les théorèmes 6.18 et 6.20 pour des résultats bien plus forts et précis. Ma (2021) a remarqué qu'une construction d'André (2020) fournit une preuve relativement directe[53] du théorème ci-dessus, n'utilisant pas le difficile lemme d'Abhyankar perfectoïde (comme dans André, 2018a) : on traite d'abord le cas d'un anneau régulier, en construisant dans ce cas une A-algèbre de Cohen–Macaulay *perfectoïde* C (ceci est standard), puis on écrit l'anneau $A \in \mathrm{CLI}_p$ comme un quotient d'un anneau régulier A_0 et on fabrique à partir de C et du lemme de platitude d'André une A-algèbre *presque perfectoïde et presque de Cohen–Macaulay* C' (cf. proposition 6.14 pour l'énoncé précis, mais peu ragoûtant). Nous adaptons la méthode de Ma pour obtenir aussi une forme faible de fonctorialité de la construction, retrouvant ainsi l'un des résultats principaux d'André (2020) (on trouvera cependant dans loc.cit. des résultats bien plus forts que ceux exposés ici). Une autre construction de C' (celle d'André, 2018a) utilise plutôt le fait que A

52. CLI est l'abréviation de « complet local intègre », l'indice p indique la caractéristique résiduelle, ainsi que le caractère parfait du corps résiduel.

53. Modulo le lemme de platitude d'André, qui est tout sauf une platitude !

est une *extension* finie d'un anneau local régulier complet A_0, et le lemme d'Abhyankar perfectoïde combiné avec le lemme de platitude d'André pour construire C'. Les deux preuves produisent donc seulement une « presque algèbre de Cohen–Macaulay (presque perfectoïde) », mais il était connu, grâce aux travaux de Hochster (2002), que cela suffit pour conclure la preuve du théorème 6.2. Gabber a découvert un autre moyen, plus canonique et direct, de passer d'une presque algèbre de Cohen–Macaulay à une vraie telle algèbre, il est exposé dans le paragraphe 17.5 du livre de Gabber et Ramero (2018). On trouvera dans cette section une version encore plus simple et directe.

6.1. Algèbres perfectoïdes CM

On fixe une fois pour toutes une suite compatible $(p^{1/p^n})_{n\geq 0}$ de racines de p dans une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ et on définit le corps perfectoïde

$$K := \widehat{\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}[\frac{1}{p}],$$

pour lequel $K^0 = \widehat{\mathbf{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}$. Soit $p^\flat := (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \ldots) \in K^{0,\flat}$ et $\xi := p - [p^\flat]$, un élément distingué de $W(K^{0,\flat})$. On note $\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ la catégorie des K^0-algèbres perfectoïdes *sans* p*-torsion.*

Définition 6.3. — *Soit A un anneau local noethérien. Une* A-algèbre CM *(resp.* A-algèbre perfectoïde CM*) est une A-algèbre de Cohen–Macaulay (resp. une A-algèbre de Cohen–Macaulay qui est aussi dans* $\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$*).*

Nous aurons besoin des résultats suivants par la suite :

Lemme 6.4. — *Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ une suite régulière dans une algèbre $C \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$, avec $x_1 = p$. Le complété $(x_1, \ldots, x_d)$-adique $\hat{C}$ de C est dans* $\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$.

Démonstration. — Voir la proposition 2.2.1 d'André (2020) pour les détails. Puisque $I := (x_1, \ldots, x_d)$ est de type fini, $\widehat{C}$ est I-complet (donc aussi p-complet). Si $z \in C$ vérifie $pz \in I^{nd}C$, alors $z \in I^{n-1}C$. En effet, on a $I^{nd} \subset (p^n, x_2^n, \ldots, x_d^n)$, donc il existe $y \in C$ tel que $p(z - p^{n-1}y) \in (x_2^n, \ldots, x_d^n)C$, puis par régularité de $(p, x_2^n, \ldots, x_d^n)$ on obtient $z - p^{n-1}y \in (x_2^n, \ldots, x_d^n)C$ et $z \in I^{n-1}C$. On en déduit immédiatement que $\widehat{C}$ est sans p-torsion et que les idéaux $p^{1/p}\widehat{C}$ et $p\widehat{C}$ sont fermés dans $\widehat{C}$ pour la topologie I-adique, donc $\widehat{C}/p \simeq \widehat{C/p}$, $\hat{C}/p^{1/p} \simeq \widehat{C/p^{1/p}}$. On conclut en utilisant la proposition 2.12. □

Lemme 6.5. — *Soit $(A, \mathfrak{m}) \in \mathrm{CLI}_p$ (déf. 6.1) et soit C une A-algèbre perfectoïde* CM*, $\mathfrak{m}$-complète. Pour tous $z_1, \ldots, z_n \in A$ il existe une C-algèbre perfectoïde* CM*, $\mathfrak{m}$-complète C' dans laquelle $z_1, \ldots, z_n$ sont p-puissants (déf. 2.2).*

Démonstration. — Par le théorème 4.3 il existe une C-algèbre $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ fidèlement plate sur C modulo p et dans laquelle $z_1, \ldots, z_n$ sont p-puissants. Si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un système de paramètres de A avec $x_1 = p$, alors $(x_1, \ldots, x_d)$ est une suite régulière dans C, et elle le reste dans P par fidèle platitude modulo p de celui-ci sur C. Par la proposition 1.9 le complété $(x_1, \ldots, x_d)$-adique (qui est aussi le complété $\mathfrak{m}$-adique) C' de P est une A-algèbre CM $\mathfrak{m}$-complète, qui est dans $\mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ par le lemme 6.4. □

6.2. Algèbres perfectoïdes CM sur un anneau local régulier

Les théorèmes 6.6 et 6.8 ci-dessous sont des analogues en inégale caractéristique du célèbre résultat de Kunz (1969) : pour un anneau noethérien A de caractéristique p chacune des assertions suivantes est équivalente à la régularité de A :

- le Frobenius $\varphi\colon A \to A$ de A est un morphisme plat.
- il existe une A-algèbre parfaite et fidèlement plate.

Rappelons (proposition 1.9) que pour un anneau local régulier A une A-algèbre est CM si et seulement si elle est fidèlement plate sur A. En utilisant la partie facile du théorème de Kunz et le résultat suivant, on en déduit facilement que pour tout anneau régulier A avec $p \in \mathrm{Rad}(A)$ il existe une A-algèbre perfectoïde fidèlement plate.

Théorème 6.6. — *Pour tout anneau local régulier $(A, \mathfrak{m})$ d'inégale caractéristique il existe une A-algèbre perfectoïde* CM*, $\mathfrak{m}$-complète.*

Dans les applications nous aurons uniquement besoin du théorème pour un anneau de la forme $W(k)[[T_1, \ldots, T_d]]$, k étant un corps parfait de caractéristique p, auquel cas la preuve est parfaitement élémentaire.

Démonstration. — On peut supposer que A est complet, car le complété $\hat{A}$ de A est fidèlement plat sur A. Par le théorème de structure de Cohen et la régularité de A il existe un anneau de valuation V, complet et absolument non ramifié [(54)], ainsi qu'un élément $f \in V[[X_1, \ldots, X_n]]$, que l'on peut choisir de la forme $f = X_1$ si $p \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ et dans l'idéal $(p, X_1, \ldots, X_n)^2$ sinon, tels que

$$A \simeq V[[X_1, \ldots, X_n]]/(p - f).$$

Supposons pour commencer que k est parfait. Posons

$$A_j = V[[X_1^{1/p^j}, \ldots, X_n^{1/p^j}]]/(p - f),\ \ A_\infty = \varinjlim_j A_j$$

et montrons que le complété p-adique $\widehat{A}_\infty$ de A_∞ est une A-algèbre perfectoïde fidèlement plate. Les morphismes $A \to A_j$ sont locaux, injectifs, finis et plats, donc fidèlement plats. Ainsi A_∞ est une A-algèbre fidèlement plate, et le lemme ci-dessous montre que $\widehat{A}_\infty$ reste fidèlement plate sur A. Il est évident que $\widehat{A}_\infty$ est sans p-torsion et que le Frobenius sur A_∞/p est surjectif. Montrons qu'il existe $\pi \in \widehat{A}_\infty$ tel que $(\pi^p) = (p)$. Cela est évident si $f = X_1$, supposons donc que $f \in (p, X_1, \ldots, X_n)^2$. Puisque $A_\infty = A_\infty^p + pA_\infty$ (donc $\mathfrak{m}_{A_\infty} = \mathfrak{m}_{A_\infty}^p + pA_\infty$) et $p \in \mathfrak{m}_{A_\infty}^2$, on obtient $p = \pi^p + py$ pour certains $\pi, y \in \mathfrak{m}_{A_\infty}$, donc $(p) = (\pi^p)$. On conclut alors en utilisant la proposition 2.12 et en remarquant que le Frobenius $A_\infty/\pi \to A_\infty/\pi^p$ est injectif, puisque A_∞ est normal (tous les A_j sont réguliers, donc normaux), donc p-clos dans $A_\infty[\frac{1}{\pi}]$.

54. Cela veut dire que l'idéal maximal de V est pV.

Dans le cas général soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit $V \to W$ une extension fidèlement plate d'anneaux de valuation absolument non ramifiés, telle que le corps résiduel de W soit $\bar{k}$. Puisque $W[[X_1,\dots,X_n]]$ est une $V[[X_1,\dots,X_n]]$-algèbre fidèlement plate (par exemple par le lemme ci-dessous), $W[[X_1,\dots,X_n]]/(p-f)$ est une extension fidèlement plate de A, avec un corps résiduel algébriquement clos. Mais $W[[X_1,\dots,X_n]]/(p-f)$ possède une algèbre perfectoïde fidèlement plate S d'après ce qui précède, et elle répond à l'appel.

Ce qui précède montre qu'il existe une A-algèbre perfectoïde CM. Son complété $\mathfrak{m}$-adique répond à l'appel par les lemmes 6.4 et 6.7. □

Nous avons utilisé le résultat suivant (cf. lemme 1.1.1 d'André (2018a)) :

Lemme 6.7. — *Soit I un idéal d'un anneau noethérien A et soit B une A-algèbre plate. On note $\hat{X} = \varprojlim_n X/I^nX$ pour tout A-module X.*

a) Pour tout A-module de type fini M le morphisme naturel $M \otimes_A \hat{B} \to \widehat{M \otimes_A B}$ est un isomorphisme.

b) La A-algèbre $\hat{B}$ est plate, et même fidèlement plate si $I \subset \mathrm{Rad}(A)$.

Démonstration. — a) Une application directe du lemme d'Artin–Rees montre que le foncteur $\mathcal{F}\colon M \mapsto \widehat{M \otimes_A B}$ est exact sur les A-modules de type fini. Puisque le morphisme $f_M\colon M \otimes_A \hat{B} \to \widehat{M \otimes_A B}$ est un isomorphisme si M est libre de type fini sur A, il l'est pour tout M de type fini sur A par un argument standard.

b) La platitude découle directement du point a) et de sa preuve. Supposons que $I \subset \mathrm{Rad}(A)$ et que B est fidèlement plat sur A. Soit M un A-module de type fini tel que $M \otimes_A \hat{B} = 0$. Alors $M \otimes_A B/IB = 0$ et donc $M/IM \otimes_A B = 0$, puis $M/IM = 0$ et (lemme de Nakayama) $M = 0$. □

La preuve du résultat suivant est nettement plus délicate et nous renvoyons le lecteur à Bhatt, Iyengar et Ma (2019) car nous n'en ferons pas usage.

Théorème 6.8. — *Soit A un anneau noethérien tel que $p \in \mathrm{Rad}(A)$. S'il existe une A-algèbre perfectoïde et fidèlement plate, alors A est régulier.*

6.3. Un résultat technique crucial

On fixe dans ce paragraphe un anneau $(A,\mathfrak{m}) \in \mathrm{CLI}_p$ (déf. 6.1) et $\wp \in \mathrm{Spec} A[\frac{1}{p}]$, de hauteur $c \geq 1$. On a donc $A/\wp \in \mathrm{CLI}_p$.

Proposition 6.9. — *Il existe $g \in A \setminus \wp$ multiple de p, ainsi qu'un système de paramètres $(f_1,\dots,f_c,x_1,\dots,x_d)$ de A avec $x_1 = p$ et*

$$g\wp \subset \sqrt{(f_1,\dots,f_c)} \subset \wp.$$

La suite $(x_1,\dots,x_d)$ est un système de paramètres de $A/\wp$.

Démonstration. — Par le théorème de l'idéal principal de Krull (et un argument standard d'évitement des idéaux premiers) il existe $f_1, \ldots, f_c \in \wp$ tels que $\mathrm{ht}(p, f_1, \ldots, f_c) = c+1$. Ainsi $(p, f_1, \ldots, f_c)$ s'étend en un système de paramètres $(f_1, \ldots, f_c, x_1, \ldots, x_d)$ de A avec $x_1 = p$. Puisque $\wp$ est un idéal premier minimal de l'anneau réduit $A' := A/\sqrt{(f_1, \ldots, f_c)}$, tout élément de $\wp$ est un diviseur de zéro dans A', d'où l'existence de g (que l'on peut choisir multiple de p car $p \notin \wp$). $\square$

Définition 6.10. — *Soit R un anneau muni d'un élément p-puissant (déf. 2.2) g, et soit S une R-algèbre. Une suite $x = (x_1, \ldots, x_d)$ d'éléments de S est dite* presque régulière (dans le cadre g^{1/p^∞}) *si l'idéal $(g^{p^{-\infty}})$ annule*[55] $\frac{(x_1,\ldots,x_i):(x_{i+1})}{(x_1,\ldots,x_i)}$ *pour tout i, mais n'annule pas $S/(x_1, \ldots, x_d)$ (en particulier $g \neq 0$).*

On fera attention au fait qu'une suite régulière dans S n'a aucune raison d'être presque régulière (!) : même si $S/(x_1, \ldots, x_d)$ est non nul, il pourrait très bien être annulé par $(g^{p^{-\infty}})$. Le résultat délicat suivant (tiré et adapté d'André (2020)) montre que ce genre de canular ne se produit pas dans notre situation.

Proposition 6.11. — *Soit $(f_1, \ldots, f_c, x_1, \ldots, x_d)$ un système de paramètres de A, avec $x_1 = p$. Soit C une A-algèbre* CM, *$\mathfrak{m}$-complète, dans laquelle $p, f_1, \ldots, f_c$ sont p-puissants (déf. 2.2). Posons*

$$\bar{C} := C/(f_1^{p^{-\infty}}, \ldots, f_c^{p^{-\infty}})C, \; \widehat{\overline{C}} = \varprojlim_n \overline{C}/p^n.$$

a) La suite $(x_1, \ldots, x_d)$ est régulière dans $\bar{C}$ et dans $\widehat{\overline{C}}$.

b) Si $C \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$, il en est de même de $\widehat{\overline{C}}$.

c) Soit $\wp \in V(f_1, \ldots, f_c)$ et soit $g \in A \setminus \wp$ un élément qui devient p-puissant dans C. La suite $(x_1, \ldots, x_d)$ est presque régulière (dans le cadre g^{1/p^∞}, déf. 6.10) dans $\overline{C}$ et $\widehat{\overline{C}}$.

Démonstration. — a) Comme $x_1 = p$, il suffit de voir que $(x_1, \ldots, x_d)$ est régulière dans $\bar{C} = \varinjlim_n C/(f_1^{1/p^n}, \ldots, f_c^{1/p^n})$, ou encore que $(x_1, \ldots, x_d)$ est régulière dans $C/(f_1^{1/p^n}, \ldots, f_c^{1/p^n})$ pour tout n, or cela est clair puisque la suite $(f_1^{1/p^n}, \ldots, f_c^{1/p^n}, x_1, \ldots, x_d)$ est régulière[56] dans C.

b) Par a) $\widehat{\overline{C}}$ n'a pas de p-torsion. En utilisant la proposition 2.12, il suffit de vérifier que le Frobenius $\overline{C}/p^{1/p} \to \overline{C}/p$ est un isomorphisme, or cela découle directement des définitions et de l'isomorphisme $C/p^{1/p} \simeq C/p$ induit par le Frobenius.

c) Ceci coûte nettement plus cher. Par a) il suffit de vérifier que $\bar{C}/(x_1, \ldots, x_d)$ n'est pas annulé par $(g^{p^{-\infty}})$. Supposons que ce n'est pas le cas, donc

$$(g^{p^{-\infty}})C \subset (f_1^{p^{-\infty}}, \ldots, f_c^{p^{-\infty}})C + (x_1, \ldots, x_d)C,$$

en particulier $g \in \mathfrak{m}^n C + \sqrt{\wp C}$ pour tout n.

55. Si I, J sont deux idéaux d'un anneau S, on note $I : J = \{s \in S |\, sJ \subset I\}$.
56. Rappelons que si M est un module sur un anneau R et $x_1, \ldots, x_n \in R$, $e_1, \ldots, e_n \in \mathbf{Z}_{>0}$, alors la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ est régulière dans M si et seulement si la suite $(x_1^{e_1}, \ldots, x_n^{e_n})$ l'est.

Soit $\bar{C} = C/\wp C$, $\bar{A} = A/\wp$ et notons $\bar{x}$ l'image de x dans $\bar{C}$ (resp. $\bar{A}$) si $x \in C$ (resp. $x \in A$). Soit $f\colon \bar{C} \to \bar{A}$ un morphisme de $\bar{A}$-modules. Pour tout $n \geq 1$ il existe $\alpha \in \mathfrak{m}^n C$ et $N \geq 1$ tel que $(g-\alpha)^N \in \wp C$, donc $(\bar{g}-\overline{\alpha})^N = 0$ dans $\bar{C}$. En appliquant f on obtient $\bar{g}^N f(1) - \binom{N}{1}\bar{g}^{N-1}f(\overline{\alpha}) + \cdots + (-1)^N f(\overline{\alpha}^N) = 0$, avec $f(\overline{\alpha}^k) \in \mathfrak{m}_{\bar{C}}^{nk}$. Ainsi $x := f(1)\overline{g} \in \bar{A}$ vérifie une équation de la forme $x^N + a_1 x^{N-1} + \cdots + a_N = 0$ avec $a_i \in \mathfrak{m}_{\bar{A}}^{ni}$ (dépendant de n, bien entendu).

Montrons que cela force $x = 0$. La clôture intégrale de $\bar{A}$ dans son corps des fractions est un anneau noethérien normal et intègre (théorème de Nagata), donc une intersection d'anneaux de valuation discrète $(V_i)_{i\in I}$ (les localisés de cette clôture intégrale en ses idéaux premiers de hauteur 1) tels que le morphisme $\bar{A} \to V_i$ soit local. L'image y de x dans un tel V_i vérifie des équations du type $y^N + b_1 y^{N-1} + \cdots + b_N = 0$ avec $b_j \in \mathfrak{m}_{V_i}^{jn}$ (dépendant de n). Cela force $v(y^N) \geq \min_{1\leq j\leq N}(v(b_j) + (N-j)v(y))$, puis $v(y) \geq n$ pour tout n, et enfin $y = 0$ et $x = 0$.

On a donc $f(1)\overline{g} = 0$ dans $\bar{A} = A/\wp$, puis $f(1) = 0$ car $g \notin \wp$. En appliquant ceci au morphisme $c \mapsto f(tc)$ pour $t \in \bar{C}$ quelconque, on voit que $f = 0$, autrement dit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A/\wp}}(C/\wp C, A/\wp) = \{0\}$, contredisant le lemme ci-dessous. □

Lemme 6.12. — *Soit A un anneau local noethérien complet et intègre et soit $\wp$ un idéal premier de A. Si C est une A-algèbre* CM, *alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(C, A)$ *et* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A/\wp}}(C/\wp C, A/\wp)$ *sont non nuls.*

Démonstration. — Le très joli argument suivant est dû à Hochster (1994). Soit $A_0 \to A$ une extension finie, avec A_0 local régulier et complet, de corps résiduel k, et soit $q = A_0 \cap \wp$. Si E (resp. E') est une enveloppe injective du A_0-module (resp. A_0/q-module) k, par dualité de Matlis on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_0}}(C, A_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_0}}(C \otimes_{A_0} E, E)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_0/q}}(C/qC, A_0/q) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_0/q}}(C/qC \otimes_{A_0/q} E', E')$. Ces modules sont non nuls car $C \otimes_{A_0} E$ et $C/qC \otimes_{A_0/q} E$ le sont, puisque C (resp. C/qC) est fidèlement plat sur A_0 (resp. A_0/q), en tant que A-algèbre CM (proposition 1.9).

Pour conclure, il faut passer d'un A_0-dual à un A-dual (l'argument donné ci-dessous pour $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(C, A)$ est identique pour $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A/\wp}}(C/\wp C, A/\wp)$). Soit $f\colon C \to A_0$ un morphisme A_0-linéaire non nul. Pour tout $c \in C$ on dispose d'un morphisme A_0-linéaire $\varphi_c\colon A \to A_0, a \mapsto f(ac)$. L'application $F\colon C \to X := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_0}}(A, A_0), c \mapsto \varphi_c$ est non nulle et A-linéaire. Puisque le morphisme $A_0 \to A$ est fini, le A-module X est de type fini sur A et sans torsion [(57)], donc se plonge dans un A-module libre de type fini A^j. En projetant sur l'un des facteurs de A^j et en composant avec F on obtient un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(C, A)$. □

57. Si $a \in A \setminus \{0\}$ et $f \in X$ vérifient $a.f = 0$ alors $f(P(a)x) = 0$ pour tout $P \in XA_0[X]$ et tout $x \in A$; il suffit de prendre P tel que $P(a) \in A_0 \setminus \{0\}$ pour conclure que $f(x) = 0$.

6.4. Construction d'une algèbre presque perfectoïde et presque CM

Soit $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ et soit $g \in P \setminus \{0\}$ un élément p-puissant (définition 2.2) et multiple de p. On ne suppose *pas* que P est sans g-torsion. Soit $\iota \colon P \to P[\frac{1}{g}]$ le morphisme canonique et considérons la P-algèbre

$$Q := g^{-1/p^{\infty}} P = \bigcap_{n \geq 0} \Big\{ x \in P\Big[\frac{1}{g}\Big] \,|\, g^{1/p^n} x \in \iota(P) \Big\} \subset P\Big[\frac{1}{g}\Big].$$

L'image de g dans Q est p-puissante, multiple de p et *non diviseur de zéro*. Le morphisme $\iota \colon P \to P[\frac{1}{g}]$ induit un presque isomorphisme $\iota \colon P \to Q$ (dans le cadre $g^{1/p^{\infty}}$), car $(g^{p^{-\infty}})$ annule $P[g^{\infty}]$ (lemme 2.20). Si P, g sont comme ci-dessus, on dira que Q est une *algèbre presque perfectoïde*.

Le résultat peu ragoûtant suivant s'obtient en combinant ceux des paragraphes ci-dessus.

Proposition 6.13. — *Soit* $(A, \mathfrak{m}) \in \mathrm{CLI}_p$ *(déf. 6.1),* $\wp \in \mathrm{Spec} A[\frac{1}{p}]$ *et soient* $g \in pA \setminus \wp$ *et* $(f_1, \dots, f_c, x_1, \dots, x_d)$ *comme dans la proposition 6.9. Pour toute* A*-algèbre perfectoïde* CM $\mathfrak{m}$*-complète* C *il existe une* C*-algèbre* $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ *dans laquelle* g *devient* p*-puissant (déf. 2.2) et non nul, s'insérant dans un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A/\wp \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ P & \longrightarrow & Q := g^{-1/p^{\infty}} P \end{array}$$

et telle que l'image de $(x_1, \dots, x_d)$ *dans* P *soit une suite régulière et presque régulière (dans le cadre* $g^{1/p^{\infty}}$*, déf. 6.10) d'éléments* p*-puissants.*

Démonstration. — Par le lemme 6.5 on peut trouver une A-algèbre perfectoïde CM, $\mathfrak{m}$-complète C_1 qui est une C-algèbre dans laquelle $g, f_1, \dots, f_c, x_1, \dots, x_d$ deviennent p-puissants. Soit $\tilde{C}_1 = C_1/(f_1^{p^{-\infty}}, \dots, f_c^{p^{-\infty}})C_1$. La proposition 6.11 montre que $P := \varprojlim_n \tilde{C}_1/p^n \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ et que $(x_1, \dots, x_d)$ est une suite régulière et presque régulière (dans le cadre $g^{1/p^{\infty}}$) dans P. En particulier $g \neq 0$ dans P, sinon $g^{1/p^n} = 0$ pour tout n (car P est réduit, cf. proposition 2.20) et donc $(g^{p^{-\infty}})$ annule $P/(x_1, \dots, x_d)$, une contradiction.

Il reste à vérifier que le morphisme $A \to P$ se factorise $A/\wp \to g^{-1/p^{\infty}} P$. Si $f \in \wp$ alors $gf \in \sqrt{(f_1, \dots, f_c)}$, donc gf devient nilpotent dans $\tilde{C}_1$ et donc aussi dans P. Comme P est réduit (proposition 2.20), l'image de f dans P arrive dans $P[g]$ et $A \to P$ se factorise $A/\wp \to P/P[g^{\infty}] \to g^{-1/p^{\infty}} P$. □

Proposition 6.14. — *Pour tout* $A \in \mathrm{CLI}_p$ *(déf. 6.1) il existe un système de paramètres* $(x_1, \dots, x_d)$ *de* A *avec* $x_1 = p$*, un élément* $g \in A$ *et un objet* $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ *tels que* g *soit* p*-puissant (déf. 2.2) et non nul dans* P *et que* $Q := g^{-1/p^{\infty}} P$ *soit une* A*-algèbre dans laquelle* $(x_1, \dots, x_d)$ *est une suite presque régulière (dans le cadre* $g^{1/p^{\infty}}$*, déf. 6.10).*

Démonstration. — Soit k le corps résiduel de A. Il existe n et une surjection $A_0 := W(k)[[T_1, \ldots, T_n]] \to A$. Soit $\wp = \ker(A_0 \to A)$, donc $A \simeq A_0/\wp$. Le théorème 6.6 fournit une A_0-algèbre CM perfectoïde et $\mathfrak{m}_{A_0}$-complète C. On conclut en appliquant la proposition ci-dessus à ces données (avec A_0 à la place de A), et en remarquant que P et Q sont presque isomorphes dans le cadre g^{1/p^∞}. □

6.5. La construction de Gabber

Pour finir la preuve du théorème 6.2 il faut passer d'une presque algèbre de Cohen–Macaulay à une vraie. Voir la proposition 4.1.2 d'André (2018a) pour la méthode des *modifications partielles* de Hochster, nous allons présenter la construction de Gabber (un peu modifiée), qui est miraculeusement élémentaire et directe. Voir aussi la section 17.5 du livre de Gabber et Ramero (2018) pour des compléments.

Soit A un anneau et soit $g \in A$ un élément p-puissant (déf. 2.2) non nul. Soit

$$S = \{(g^{a_n})_{n\geq 0} \in A^{\mathbf{N}} |\ a_n \in \mathbf{N}[\frac{1}{p}],\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}.$$

Il est évident que S est une partie multiplicative de $A^{\mathbf{N}}$, qui ne contient pas $0 := (0, 0, \ldots)$. Si M est un A-module, alors $M^{\mathbf{N}}$ est un $A^{\mathbf{N}}$-module, et on définit

$$\mathcal{G}(M) := S^{-1}M^{\mathbf{N}}.$$

Lemme 6.15. — *Si $f\colon M \to N$ est un presque isomorphisme de A-modules (dans le cadre g^{1/p^∞}), alors le morphisme induit $\mathcal{G}(f)\colon \mathcal{G}(M) \to \mathcal{G}(N)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Écrivons simplement (x_n) au lieu de $(x_n)_{n\geq 0}$. Si $\mathcal{G}(f)(\frac{(m_n)}{s}) = 0$ alors $\frac{(f(m_n))}{s} = 0$ dans $S^{-1}N^{\mathbf{N}}$, donc il existe $s' = (g^{a'_n}) \in S$ tel que $s'(f(m_n)) = 0$, autrement dit $g^{a'_n} f(m_n) = 0$ pour tout n. Puisque $(g^{p^{-\infty}})$ annule $\ker f$, on obtient $g^{a'_n + 1/p^n} m_n = 0$. Ainsi $s'' := (g^{a'_n+1/p^n}) \in S$ et $s''(m_n) = 0$ dans $M^{\mathbf{N}}$, donc $\frac{(m_n)}{s} = 0$.

Ensuite, soit $\frac{(k_n)}{s} \in \mathcal{G}(N)$. Puisque $(g^{p^{-\infty}})$ annule $\operatorname{coker}(f)$, pour tout n il existe $m_n \in M$ tel que $g^{1/p^n} k_n = f(m_n)$. Posons $s' = s \cdot (g^{1/p^n}) \in S$, alors $\frac{(k_n)}{s} = \mathcal{G}(f)(\frac{(m_n)}{s'})$, ce qui permet de conclure. □

Si C est une A-algèbre, alors $\mathcal{G}(C)$ est aussi une A-algèbre, via le morphisme diagonal $A \to A^{\mathbf{N}}$.

Lemme 6.16. — *Soit C une A-algèbre et soit $x = (x_1, \ldots, x_d)$ une suite dans A. Si x est presque régulière (dans le cadre g^{1/p^∞}) dans C, alors x devient une suite régulière dans $\mathcal{G}(C)$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $\mathcal{G}(C)/(x_1, \ldots, x_d)\mathcal{G}(C) \neq \{0\}$. Sinon, il existe $\alpha_i \in S^{-1}C^{\mathbf{N}}$ tels que $1 = \sum_{i=1}^d x_i\alpha_i$, donc $1 = \sum_{i=1}^d x_i \frac{y_i}{s}$ pour certains $s \in S$ et $y_i \in C^{\mathbf{N}}$. Il existe $s' \in S$ tel que $s'(s - \sum_{i=1}^d x_i y_i) = 0$ dans $C^{\mathbf{N}}$. Si $s = (g^{a_n})_{n\geq 0}$ et $s' = (g^{a'_n})_{n\geq 0}$, on en déduit (projeter sur la n-ième composante) que $g^{a_n + a'_n} \in (x_1, \ldots, x_d)C$ pour tout n. Puisque $a_n + a'_n \to 0$, il s'ensuit que $(g^{p^{-\infty}})$ annule $C/(x_1, \ldots, x_d)$, contredisant le fait que x est presque régulière dans C.

Il nous reste à vérifier que si $a \in \mathcal{G}(C)$ vérifie $ax_{i+1} \in (x_1, \ldots, x_i)\mathcal{G}(C)$, alors $a \in (x_1, \ldots, x_i)\mathcal{G}(C)$. Il existe $s \in S$ et $b, z_k \in C^{\mathbf{N}}$ tels que $a = \frac{b}{s}$ et $ax_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} x_k \frac{z_k}{s}$, et il existe $s' \in S$ tel que $s'(bx_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} x_k z_k) = 0$. Si $s' = (g^{a'_n})$, alors (par projection sur la n-ième composante) $g^{a'_n} b_n x_{i+1} \in (x_1, \ldots, x_i)C$. Comme $(g^{p^{-\infty}})$ annule $\frac{(x_1,\ldots,x_i)C:(x_{i+1})C}{(x_1,\ldots,x_i)C}$, il s'ensuit que $g^{a'_n+1/p^n} b_n \in (x_1, \ldots, x_i)C$ pour tout n. On peut donc écrire

$$g^{a'_n+1/p^n} b_n = \sum_{k=1}^{i} x_k u_{n,k}$$

pour certains $u_{n,k} \in C$. Si l'on pose $u_k = (u_{n,k})_{n\geq 0} \in C^{\mathbf{N}}$ et $s'' = (g^{1/p^n})_{n\geq 0}$, cela s'écrit $s's''b = \sum_{k=1}^{i} x_k u_k$ dans $C^{\mathbf{N}}$, donc $a = \frac{b}{s} = \sum_{k=1}^{i} x_k \frac{u_k}{ss's''} \in (x_1, \ldots, x_i)\mathcal{G}(C)$. □

Lemme 6.17. — *Si C est un anneau perfectoïde, alors le complété p-adique de $\mathcal{G}(C)$ est un anneau perfectoïde.*

Démonstration. — $C^{\mathbf{N}}$ est un produit d'anneaux perfectoïdes, donc un anneau perfectoïde. Il suffit donc de montrer que le complété p-adique d'un localisé d'un anneau perfectoïde est encore perfectoïde, cf. cor. 2.1.6 de Česnavičius et Scholze, 2019. □

6.6. Construction d'algèbres perfectoïdes de Cohen–Macaulay, fonctorialité faible

Nous pouvons maintenant mettre ensemble les résultats ci-dessus et obtenir une preuve de l'existence de A-algèbres de Cohen–Macaulay pour tout $A \in \mathrm{CLI}_p$. Ceci a été démontré pour la première fois dans l'article d'André (2018a), et raffiné ensuite dans celui de Shimomoto (2018) sous la forme suivante :

Théorème 6.18. — *Pour tout $(A, \mathfrak{m}) \in \mathrm{CLI}_p$ (def. 6.1) il existe une A-algèbre perfectoïde* CM *(déf. 6.3) et $\mathfrak{m}$-complète.*

Démonstration. — Soient $g, x_1, \ldots, x_d, P$ et Q comme dans la proposition 6.14. Le presque isomorphisme $P \to Q$ induit un isomorphisme $\mathcal{G}(P) \simeq \mathcal{G}(Q)$ (lemme 6.15), donc $\mathcal{G}(Q) \simeq \mathcal{G}(P)$ devient un anneau perfectoïde après complétion p-adique (lemme 6.17). La suite $(x_1, \ldots, x_d)$ devient régulière dans $\mathcal{G}(Q)$ (lemme 6.16), en particulier $\mathcal{G}(Q) \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$. Le lemme 6.4 permet de conclure que le complété $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{G}(Q)$ est une A-algèbre perfectoïde CM et $\mathfrak{m}$-complète. □

Remarque 6.19. — Il n'est pas difficile d'en déduire que tout anneau local noethérien complet $(A, \mathfrak{m})$ d'inégale caractéristique $(0, p)$ admet une A-algèbre perfectoïde CM (déf. 6.3) $\mathfrak{m}$-complète. En effet, on voit facilement (utiliser le théorème de Cohen) qu'il existe une A-algèbre locale noethérienne complète $\tilde{A}$, dont le corps résiduel est algébriquement clos, et fidèlement plate sur A. Soit $\wp$ un idéal premier minimal de $\tilde{A}$ tel que $\dim \tilde{A}/\wp = \dim \tilde{A}$. Alors $\tilde{A}/\wp \in \mathrm{CLI}_p$, donc il existe une $\tilde{A}/\wp$-algèbre C perfectoïde CM, qui est automatiquement une $\tilde{A}$-algèbre perfectoïde CM. Puisque $A \to \tilde{A}$ est fidèlement plat, tout système de paramètres de A s'étend en un système de paramètres de $\tilde{A}$, et donc devient une suite régulière dans C. Ainsi C est une A-algèbre perfectoïde CM.

Il suffit de compléter C pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique et d'appliquer le lemme 6.4 pour conclure.

La méthode employée ci-dessus est assez souple pour retrouver l'un des résultats fondamentaux de l'article d'André (2020) :

Théorème 6.20. — *Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme surjectif dans CLI_p (déf. 6.1). Pour toute A-algèbre perfectoïde* CM *et $\mathfrak{m}_A$-complète C il existe une A'-algèbre perfectoïde* CM *et $\mathfrak{m}_{A'}$-complète C' s'insérant dans un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & C' \end{array}$$

Démonstration. — On peut supposer que f est la projection canonique $A \to A/\wp$ pour un $\wp \in \mathrm{Spec} A[\frac{1}{p}]$. Il suffit de remplacer l'usage de la proposition 6.14 dans la preuve ci-dessus par celui de la proposition 6.13. En effet, les arguments utilisés dans la preuve du théorème 6.18 montrent que le complété $\mathfrak{m}$-adique C' de $\mathcal{G}(Q)$ (avec Q comme dans la proposition 6.13) répond à l'appel : c'est une A'-algèbre perfectoïde CM et $\mathfrak{m}_{A'}$-complète, et on dispose d'un morphisme $P \to C'$, donc aussi d'un morphisme $C \to C'$, qui s'insère dans un diagramme comme dans le théorème par construction. $\square$

Remarque 6.21. —

1. On trouve dans le théorème 4.1.1 d'André (2020) et dans le livre de Gabber et Ramero (2018) des formes plus raffinées et générales, mais le théorème ci-dessus contient déjà bon nombre de difficultés essentielles.
2. En utilisant des factorisations de Cohen, on peut en déduire que tout morphisme $f\colon A \to A'$ dans CLI_p s'insère dans un diagramme comme ci-dessus, pour une A-algèbre CM C et une A'-algèbre CM C'. Ceci a des multiples applications, voir par exemple l'article de Hochster et Huneke (1995). Mentionnons simplement une conséquence frappante : si A est un anneau local régulier, extension scindée d'un sous-anneau A', alors A' est un anneau de Cohen–Macaulay [(58)].

7. ALGÈBRES DE COHEN–MACAULAY VIA LE LEMME D'ABHYANKAR PERFECTOÏDE

Dans cette dernière section nous présentons l'approche initiale d'André (2018a) pour construire des algèbres de Cohen–Macaulay, en utilisant le lemme d'Abhyankar perfectoïde. Il est possible de pousser cette méthode pour obtenir une preuve du théorème 6.20 (c'est ce qui est fait dans l'article d'André (2020)), mais on ne le fera pas ici.

58. Ceci avait été obtenu en inégale caractéristique par Heitmann et Ma (2018), avant l'article d'André (2020).

Pour toute K^0-algèbre R notons $R^\natural = W(R^\flat)/(p-[p^\flat])$. Si $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ alors $P^\natural \simeq P$ via θ_P, donc si R est une P-algèbre, alors $R^\natural$ est une $P \simeq P^\natural$-algèbre. Si R est p-complète, tout morphisme $P \to R$ se factorise canoniquement $P \to R^\natural \to R$.

7.1. La construction fondamentale

Motivés par la proposition 6.13, considérons le contexte suivant. On se donne

- un morphisme $A' \to A$ dans CLI_p (déf. 6.1) et un élément $g \in pA'$.
- une algèbre $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ dans laquelle g devient p-puissant et non nul et s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ P \arrow[r] & Q := g^{-1/p^\infty} P \end{tikzcd}$$

Notons que l'image de g dans Q est non nulle, car P est réduit.

Soit $A \to A_1$ une extension finie, étale après inversion de g, et posons [59]

$$\mathcal{F}(A_1) = \mathrm{fi}(Q, A_1 \otimes_A Q[\frac{1}{g}]).$$

Puisque $A \to A_1$ est entier, le morphisme naturel $A_1 \to A_1 \otimes_A Q[\frac{1}{g}]$ se factorise à travers $\mathcal{F}(A_1)$, induisant ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d] \\ Q \arrow[r] & \mathcal{F}(A_1) \end{tikzcd}$$

Considérons la P-algèbre

$$\mathcal{P}(A_1) := \mathcal{F}(A_1)^\natural.$$

Il n'est pas clair que $\mathcal{F}(A_1)$ soit p-complète, mais la preuve du résultat ci-dessus montrera que c'est bien le cas, donc le morphisme $P \to Q \to \mathcal{F}(A_1)$ se factorise $P \to \mathcal{P}(A_1) \to \mathcal{F}(A_1)$.

Proposition 7.1. — *Soit $A \to A_1$ une extension finie, étale après inversion de g. La P-algèbre $\mathcal{P}(A_1)$ est presque fidèlement plate (dans le cadre g^{1/p^∞}) modulo p sur P, sans g-torsion et $g^{-1/p^\infty}\mathcal{P}(A_1) = \mathcal{F}(A_1)$.*

Ce résultat est une application du lemme d'Abhyankar perfectoïde, mais la vérification des hypothèses demande quelques préliminaires.

Lemme 7.2. — *Si $S \in \{Q, Q^\natural\}$ alors l'algèbre S est p-complète, sans g-torsion, et p-close dans $S[\frac{1}{p}]$.*

59. Rappelons que $\mathrm{fi}(A, B)$ désigne la clôture intégrale de A and B.

Démonstration. — Posons $R = Q^\natural$. Comme Q est sans g-torsion et $p \mid g$, l'algèbre Q est sans p-torsion. Il en est de même de R puisque $p^\flat$ n'est pas un diviseur de zéro dans $Q^\flat$: si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in Q^\flat$ vérifie $p^\flat x = 0$, et si $a_n \in Q$ est un relèvement de $x_n \in Q/p$, alors $a_n \in p^{1-1/p^n}Q$ et $a_n \equiv a_{n+1}^p \equiv 0 \pmod{pQ}$ pour tout n, donc $x = 0$.

L'anneau R est p-complet car perfectoïde (proposition 2.8). Montrons que Q est p-complet. Soit $g_n = g^{\frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}}}$. Le morphisme $\iota\colon P \to P[\frac{1}{g}]$ induit un isomorphisme [60]

$$\alpha\colon Q \to \varprojlim_{\cdot g_n} \iota(P),\ x \mapsto (g^{1/p^n}x)_{n\geq 0}.$$

Puisque $I := (g^{p^{-\infty}})$ annule le noyau de $\iota\colon P \to \iota(P)$ et contient les g_n, le morphisme ι induit un isomorphisme de pro-systèmes $\{P, (\cdot g_n)\} \to \{\iota(P), (\cdot g_n)\}$, d'où

$$Q \simeq \varprojlim_{\cdot g_n} \iota(P) \simeq \varprojlim_{\cdot g_n} P.$$

Comme P est p-complet et sans p-torsion, on en déduit facilement que Q est p-complet.

Montrons que Q (resp. R) est p-clos dans $Q[\frac{1}{p}]$ (resp. $R[\frac{1}{p}]$). La proposition 3.5 montre que P (resp. R) est p-clos dans $P[\frac{1}{p}]$ (resp. $R[\frac{1}{p}]$). Pour conclure il suffit de montrer que si $x \in Q$ vérifie $x^p \in pQ$, alors $\frac{x}{p^{1/p}} \in P[\frac{1}{g}]$ est dans Q, ou encore que $\alpha\beta\frac{x}{p^{1/p}} \in \iota(P)$ pour tous $\alpha, \beta \in I$. Comme $x \in Q$ et $x^p \in pQ$, il existe $a, b \in P$ tels que $\alpha x = \iota(a)$ et $(\alpha x)^p = p\iota(b)$. Alors $\beta^p(a^p - pb) = 0$ (car $a^p - pb \in \ker(\iota)$ et I annule $\ker(\iota)$), donc $(\beta a)^p \in pP$. Comme P est p-clos dans $P[\frac{1}{p}]$, cela force $\beta a \in p^{1/p}P$ et $\alpha\beta\frac{x}{p^{1/p}} = \iota(\frac{\beta a}{p^{1/p}}) \in \iota(P)$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 7.3. — *Le morphisme $\theta_Q\colon Q^\natural \to Q$ est injectif et $(g^{p^{-\infty}})$ annule son conoyau. On a donc $Q = g^{-1/p^\infty}Q^\natural \subset Q^\natural[\frac{1}{g}]$ et $Q^\natural$ est sans g-torsion.*

Démonstration. — Notons encore $R = Q^\natural$. Montrons que $\theta_Q\colon R \to Q$ est injective, en particulier g n'est pas un diviseur de zéro dans R. Comme R et Q sont sans p-torsion et p-complets par la proposition ci-dessus, il suffit de montrer l'injectivité de $R/p \simeq Q^\flat/p^\flat \to Q/p$, qui se déduit de celle du Frobenius $Q/p^{1/p} \to Q/p$, cf. lemme 7.2. Puisque $\iota\colon P \to Q$ est un presque isomorphisme dans le cadre g^{1/p^∞} et se factorise $P \to R \to Q$, pour conclure il suffit de montrer que $P \to R$ est un presque isomorphisme, ou encore qu'il en est de même de $\iota^\flat\colon P^\flat \to Q^\flat$, ce qui est clair. □

Lemme 7.4. — *La K-algèbre $B := Q^\natural[\frac{1}{p}]$ possède une structure de K-algèbre de Banach perfectoïde sans g-torsion, telle que $g^{-1/p^\infty}B^0 = Q$, en particulier $B[\frac{1}{g}] = Q[\frac{1}{g}] \simeq P[\frac{1}{g}]$.*

Démonstration. — Par la proposition 3.5 l'algèbre $Q^\natural_* := p^{-1/p^\infty}Q^\natural$ est perfectoïde, donc $B := Q^\natural[\frac{1}{p}]$ possède une structure de K-algèbre de Banach perfectoïde sans g-torsion, telle que $B^0 = Q^\natural_*$. Comme $p \mid g$ et $Q = g^{-1/p^\infty}Q^\natural$ (lemme 7.3), on a

$$g^{-1/p^\infty}B^0 = g^{-1/p^\infty}Q^\natural_* = g^{-1/p^\infty}Q^\natural = Q,$$

60. L'injectivité est claire, et si $(x_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_{\cdot g_n} \iota(P)$ alors la suite $(g^{-1/p^n}x_n)_{n\geq 0}$ est constante dans $P[\frac{1}{g}]$, sa valeur x est dans Q par définition et $\alpha(x) = (x_n)_{n\geq 0}$.

ce qui permet de conclure. □

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 7.1. Par le lemme 7.4 on peut munir $B := Q^\natural[\frac{1}{p}]$ d'une structure de K-algèbre de Banach perfectoïde sans g-torsion, telle que $g^{-1/p^\infty}B^0 = Q$, en particulier $B[\frac{1}{g}] = Q[\frac{1}{g}] \simeq P[\frac{1}{g}]$. Puisque $A \to A_1$ est étale après inversion de g, l'algèbre $C = A_1 \otimes_A B[\frac{1}{g}] = A_1 \otimes_A Q[\frac{1}{g}]$ est finie, étale et fidèlement plate sur $B[\frac{1}{g}]$. Le lemme d'Abhyankar perfectoïde [(61)] montre que $\mathcal{F}(A')$ est presque fidèlement plat sur B^0 modulo p, donc aussi sur P modulo p (car B^0 et P sont presque isomorphes dans le cadre g^{1/p^∞}), et le morphisme $\mathcal{P}(A_1) = \mathcal{F}(A_1)^\natural \to \mathcal{F}(A_1)$ est injectif, de conoyau tué par $(g^{p^{-\infty}})$. Cela permet de conclure.

7.2. Nouvelle preuve de la proposition 6.14

La proposition 7.1 et le lemme de platitude d'André fournissent une nouvelle preuve [(62)] de la proposition 6.14. Comme expliqué dans la section précédente, ceci implique le théorème 6.18 via la construction de Gabber.

Soit $A \in \mathrm{CLI}_p$ et soit $(x_1, \dots, x_d)$ un système de paramètres, avec $x_1 = p$. Le morphisme de $W(k)$-algèbres $A_0 := W(k)[[T_2, \dots, T_d]] \to A, T_i \mapsto x_i$ est fini et injectif. Soit $g \in pA_0 \setminus \{0\}$ tel que $A_0[\frac{1}{g}] \to A[\frac{1}{g}]$ soit étale, et soit $P \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{tf}}_{K^0}$ une A_0-algèbre fidèlement plate modulo p sur A_0, dans laquelle g devient p-puissant (cf. théorème 6.6 et 4.3 ; le théorème 4.1 ferait aussi l'affaire).

Lemme 7.5. — *La suite $(x_1, \dots, x_d)$ est régulière et presque régulière dans P (dans le cadre g^{1/p^∞}) et l'image de g dans P n'est pas nulle.*

Démonstration. — Si l'image de g dans P était nulle, elle le serait modulo p^n pour tout n, or $A_0/p^n \to P/p^n$ est fidèlement plat, donc $g \in \cap_{n\geq 1} p^n A_0 = \{0\}$, une contradiction avec $g \in A_0 \setminus \{0\}$. Ensuite, comme P est fidèlement plat modulo p sur A_0 et $x_1 = p$, la suite est régulière dans P. Il reste à expliquer pourquoi l'inclusion $(g^{p^{-\infty}})P \subset (x_1, \dots, x_d)P$ est impossible. Si elle avait lieu, on aurait $g \in (x_1, \dots, x_d)^k P$ pour tout k, et comme P/p^n est fidèlement plat sur A_0/p^n pour tout n, cela forcerait $g \in \bigcap_k (x_1, \dots, x_d)^k$, puis $g = 0$ par le théorème d'intersection de Krull. □

En appliquant la proposition 7.1 au morphisme identité $A_0 \to A_0$, avec $A_1 = A$ on obtient une P-algèbre perfectoïde $\mathcal{P}(A)$ presque fidèlement plate modulo p sur P, dans laquelle g est non diviseur de zéro et qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ P \arrow[r] & g^{-1/p^\infty}\mathcal{P}(A) \end{tikzcd}$$

L'algèbre $\mathcal{P}(A)$ répond à l'appel lancé par la proposition 6.14 grâce au lemme ci-dessous :

61. Noter que, compte tenu de la discussion ci-dessus on a $\mathcal{F}(A') = \tilde{C}^0$ dans les notations du théorème 5.3.

62. Il s'agit en fait de la première preuve de ce résultat, due à André (2018a).

Lemme 7.6. — *Soit R un anneau sans p-torsion, $g \in R$ un élément p-puissant et $x = (x_1, \dots, x_d)$ une suite dans R, avec $x_1 = p$. Si x est presque régulière dans R (dans le cadre g^{1/p^∞}), elle le reste dans toute R-algèbre S qui est presque fidèlement plate sur R modulo p.*

Démonstration. — Soit $I = (g^{p^{-\infty}}) \subset R$. Puisque $S/(x_1, \dots, x_d)$ est presque fidèlement plat sur $R/(x_1, \dots, x_d)$ (car $x_1 = p$) le morphisme $R/(x_1, \dots, x_d) \to S/(x_1, \dots, x_d)$ est presque injectif, donc $S/(x_1, \dots, x_d)$ n'est pas presque nul. Pour montrer que I annule $\frac{(x_1,\dots,x_i)S:x_{i+1}S}{(x_1,\dots,x_i)S}$ on peut supposer que $i > 0$ car S est sans p-torsion. Notons $\bar{R} := R/p$, $\bar{S} := S/p$. Il suffit de montrer que I annule $\frac{(x_2,\dots,x_i)\bar{S}:x_{i+1}\bar{S}}{(x_2,\dots,x_i)\bar{S}}$. Par presque platitude de $\bar{S}$ sur $\bar{R}$ on a un presque isomorphisme [63]

$$(x_2, \dots, x_i)\bar{S} : x_{i+1}\bar{S} \simeq ((x_2, \dots, x_i)\bar{R} : x_{i+1}\bar{R})\bar{S},$$

ce qui permet de conclure. □

RÉFÉRENCES

Yves André (2018a). « La conjecture du facteur direct », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **127**, p. 71–93.

——— (2018b). « Le lemme d'Abhyankar perfectoide », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **127**, p. 1–70.

——— (2018c). « Perfectoid spaces and the homological conjectures », in : *Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018. Volume II. Invited lectures.* Hackensack, NJ : World Scientific ; Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), p. 277–289.

——— (2020). « Weak functoriality of Cohen–Macaulay algebras », *J. Am. Math. Soc.* **33** (2), p. 363–380.

Yves André et Luisa Fiorot (2022). « On the canonical, fpqc, and finite topologies on affine schemes. The state of the art », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)*, **23** (1), p. 81–114.

Wolfgang Bartenwerfer (1976). « Der erste Riemannsche Hebbarkeitssatz im nichtarchimedischen Fall », *J. Reine Angew. Math.* **286/287**, p. 144–163.

Jaap Bartijn et Jan R. Strooker (1983). *Modifications monomiales.* Semin. d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, 35ème Année, Proc., Paris 1982, Lect. Notes Math. 1029, 192-217 (1983).

Bhargav Bhatt (2012). « Derived splinters in positive characteristic », *Compos. Math.* **148** (6), p. 1757–1786.

63. Il suffit de tensoriser avec $\bar{S}$ la suite exacte

$$0 \to (x_2, \dots, x_i) : x_{i+1}\bar{R} \to \bar{R} \to \bar{R}/(x_2, \dots, x_i).$$

——— (2014a). « Almost direct summands », *Nagoya Math. J.* **214**, p. 195–204.

——— (2014b). « On the non-existence of small Cohen–Macaulay algebras », *J. Algebra*, **411**, p. 1–11.

——— (2018). « On the direct summand conjecture and its derived variant », *Invent. Math.* **212** (2), p. 297–317.

——— (2020). « Cohen–Macaulayness of absolute integral closures ». arXiv. URL : https://arxiv.org/abs/2008.08070.

Bhargav Bhatt, Srikanth B. Iyengar et Linquan Ma (2019). « Regular rings and perfect(oid) algebras », *Commun. Algebra*, **47** (6), p. 2367–2383.

Bhargav Bhatt et Jacob Lurie (2023). « A p-adic Riemann–Hilbert functor : $\mathbf{Z}/p^n$-coefficients ». en préparation.

Bhargav Bhatt, Matthew Morrow et Peter Scholze (2018). « Integral p-adic Hodge theory », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **128**, p. 219–397.

Bhargav Bhatt et Peter Scholze (2022). « Prisms and prismatic cohomology », *Ann. Math. (2)*, **196** (3), p. 1135–1275.

Kęstutis Česnavičius (2021). « Macaulayfication of Noetherian schemes », *Duke Math. J.* **170** (7), p. 1419–1455.

Kęstutis Česnavičius et Peter Scholze (2019). « Purity for flat cohomology ». preprint. URL : https://arxiv.org/abs/1912.10932.

Pierre Colmez (2002). « Espaces de Banach de dimension finie », *J. Inst. Math. Jussieu*, **1** (3), p. 331–439.

Pierre Colmez et Jean-Marc Fontaine (2000). « Construction des représentations p-adiques semi-stables », *Invent. Math.* **140** (1), p. 1–43.

Dimitri Dini (2022). « Topological spectrum and perfectoid Tate rings », *Algebra and Number Theory*, **16** (6), p. 1463–1500.

Sankar P. Dutta (1987). « On the canonical element conjecture », *Trans. Am. Math. Soc.* **299**, p. 803–811.

E. Graham Evans et Phillip Griffith (1981). « The syzygy problem », *Ann. Math. (2)*, **114**, p. 323–333.

Gerd Faltings (1988). « p-adic Hodge theory », *J. Am. Math. Soc.* **1** (1), p. 255–299.

——— (2002). « Almost étale extensions », in : *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II).* T. 279. Astérisque. Paris : Société Mathématique de France, p. 185–270.

Jean-Marc Fontaine (2013). « Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids [d'après Peter Scholze] », in : *Séminaire Bourbaki. Volume 2011/2012. Exposés 1043–1058.* Paris : Société Mathématique de France (SMF), 509–534, ex.

Ofer Gabber et Lorenzo Ramero (2003). *Almost ring theory.* T. 1800. Lect. Notes Math. Berlin : Springer.

——— (2018). « Almost rings and perfectoid spaces ». preprint. URL : https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/lorenzo_ramero/research.html.

Raymond Heitmann (2002). « The direct summand conjecture in dimension three. » *Ann. Math. (2)*, **156** (2), p. 695–712.

Raymond Heitmann et Linquan Ma (2018). « Big Cohen–Macaulay algebras and the vanishing conjecture for maps of Tor in mixed characteristic », *Algebra Number Theory*, **12** (7), p. 1659–1674.

Melvin Hochster (1973). « Contracted ideals from integral extensions of regular rings », *Nagoya Math. J.* **51**, p. 25–43.

——— (1975). *Topics in the homological theory of modules over commutative rings.* T. 24. Reg. Conf. Ser. Math. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI.

——— (1977). « Cyclic purity versus purity in excellent Noetherian rings », *Trans. Am. Math. Soc.* **231**, p. 463–488.

——— (1979). « Big and small Cohen-Macaulay modules ». In : *Module theory (Proc. Special Session, Amer. Math. Soc., Univ. Washington, Seattle, Wash., 1977).* T. 700. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 119–142.

——— (1983). « Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture », *J. Algebra*, **84**, p. 503–553.

——— (1994). « Solid closure », in : *Commutative algebra : syzygies, multiplicities, and birational algebra (South Hadley, MA, 1992).* T. 159. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 103–172.

——— (2002). « Big Cohen–Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem. » *J. Algebra*, **254** (2), p. 395–408.

——— (2007). « Homological conjectures, old and new », *Ill. J. Math.* **51** (1), p. 151–169.

Melvin Hochster et Craig Huneke (1992). « Infinite integral extensions and big Cohen–Macaulay algebras », *Ann. Math. (2)*, **135** (1), p. 53–89.

——— (1995). « Applications of the existence of big Cohen–Macaulay algebras », *Adv. Math.* **113** (1), p. 45–117.

Craig Huneke et Gennady Lyubeznik (2007). « Absolute integral closure in positive characteristic », *Adv. Math.* **210** (2), p. 498–504.

Kiran S. Kedlaya et Ruochuan Liu (2015). *Relative p-adic Hodge theory : foundations.* T. 371. Astérisque. Paris : Société Mathématique de France (SMF).

Sándor J. Kovács (2000). « A characterization of rational singularities », *Duke Math. J.* **102** (2), p. 187–191.

Ernst Kunz (1969). « Characterizations of regular local rings of characteristic p », *Am. J. Math.* **91**, p. 772–784.

Linquan Ma (2021). « A short proof of the direct summand theorem via the flatness lemma ». URL : https://www.math.purdue.edu/~ma326/DSC.pdf.

Linquan Ma et Karl Schwede (2018). « Perfectoid multiplier/test ideals in regular rings and bounds on symbolic powers », *Invent. Math.* **214** (2), p. 913–955.

——— (2021). « Singularities in mixed characteristic via perfectoid big Cohen–Macaulay algebras », *Duke Math. J.* **170** (13), p. 2815–2890.

Linquan Ma, Karl Schwede, Kevin Tucker, Joe Waldron et Jakub Witaszek (2022). « An analog of adjoint ideals and PLT singularities in mixed characteristic », *J. Algebr. Geom.* **31**, p. 497–559.

Matthew Morrow (2019). « The Fargues-Fontaine curve and diamonds [d'après Fargues, Fontaine, and Scholze] », in : *Séminaire Bourbaki. Volume 2017/2018. Exposés 1136–1150.* Paris : Société Mathématique de France (SMF), 533–572, ex.

Takeo Ohi (1996). « Direct summand conjecture and descent for flatness », *Proc. Am. Math. Soc.* **124** (7), p. 1967–1968.

Jean-Pierre Olivier (1973). « Descente de quelques propriétés élémentaires par morphismes purs », *Anais Acad. Brasil. Ci.* **45**, p. 17–33.

Christian Peskine et Lucien Szpiro (1972). « Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la demonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **42**, p. 47–119.

Michel Raynaud et Laurent Gruson (1971). « Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module », *Invent. Math.* **13**, p. 1–89.

Paul Roberts (1987). « Le théorème d'intersection », *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, **304**, p. 177–180.

——— (1992). « The homological conjectures », in : *Free resolutions in commutative algebra and algebraic geometry (Sundance, UT, 1990).* T. 2. Res. Notes Math. Jones et Bartlett, Boston, MA, p. 121–132.

——— (2008). « The root closure of a ring of mixed characteristic ». preprint. URL : https://arxiv.org/abs/0810.0215.

Peter Scholze (2012). « Perfectoid spaces », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **116**, p. 245–313.

——— (2013). « p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties », *Forum Math. Pi*, **1**, e1, 77.

——— (2015). « On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties », *Ann. Math. (2)*, **182** (3), p. 945–1066.

Kazuma Shimomoto (2018). « Integral perfectoid big Cohen–Macaulay algebras via André's theorem », *Math. Ann.* **372** (3-4), p. 1167–1188.

Gabriel Dospinescu

UMPA, ENS Lyon, CNRS
E-mail : gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr